

УДК 621.371.322

И.П. ЗАЙКИН, Ал-й А. ТКАЧЕНКО, Ал-ра А. ТКАЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

## РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СИММЕТРИЧНОМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЛИНИЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Рассмотрена задача дифракции аксиально-симметричных  $TM(e)$ - и  $TE(h)$ -волн на симметричном стыке двух полубесконечных коаксиальных линий и цилиндрического резонатора с диэлектрическим заполнением. Для строгого решения внутренней краевой задачи использован метод частичных областей. Решение получено в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно амплитуд волн пространственного спектра дифрагированного поля. Задача решена без ограничений на параметры структуры. Для длинноволнового приближения в случае  $e$ -волн решение системы уравнений получено в явном виде. Представлены численные результаты для этого приближения.

**Ключевые слова:** рассеяние, поляризация, коаксиальная линия, коэффициенты преобразования, диэлектрическое заполнение.

### Введение

Для соединения узлов и блоков радиоаппаратуры чаще всего применяются коаксиальные линии (КЛ). Основными их достоинствами являются широкополосность, отсутствие паразитного излучения, минимальные габаритные размеры и масса, устойчивость к механическим и климатическим воздействиям и возможность изготовления в виде гибких коаксиальных кабелей.

Жесткие конструкции КЛ применяются для передачи больших мощностей, когда достаточно большие размеры поперечного сечения позволяют обеспечивать необходимую электрическую прочность. КЛ и элементы коаксиального типа используются на частотах не выше 20 ГГц. В некоторых специальных случаях, когда не требуется большая длина линии, например, при подводе энергии к резонатору или отводе ее из него, КЛ могут применяться и на более высоких частотах [1].

**Целью работы** является строгое решение задачи рассеяния аксиально-симметричных поперечно-магнитных и поперечно-электрических волн на симметричном соединении двух полубесконечных коаксиальных линий и цилиндрического резонатора с диэлектрическим заполнением для определения коэффициентов преобразования волн на такой структуре.

**Формулирование проблемы.** Освоение средствами телекоммуникаций высокочастотных областей (до 60 ГГц и выше) предъявляет все более высокие требования к линиям передачи и соедини-

тельным элементам на отрезках из них, обеспечивающих качественную многоканальную связь. Коаксиальные линии на сегодня – одна из наиболее распространенных и применяемых линий передачи. Она широко используется при вводе и выводе энергии из колебательных систем, хотя ее свойства на стыке с резонатором требуют более тщательного исследования.

Рассмотрим структуру, показанную на рис. 1.

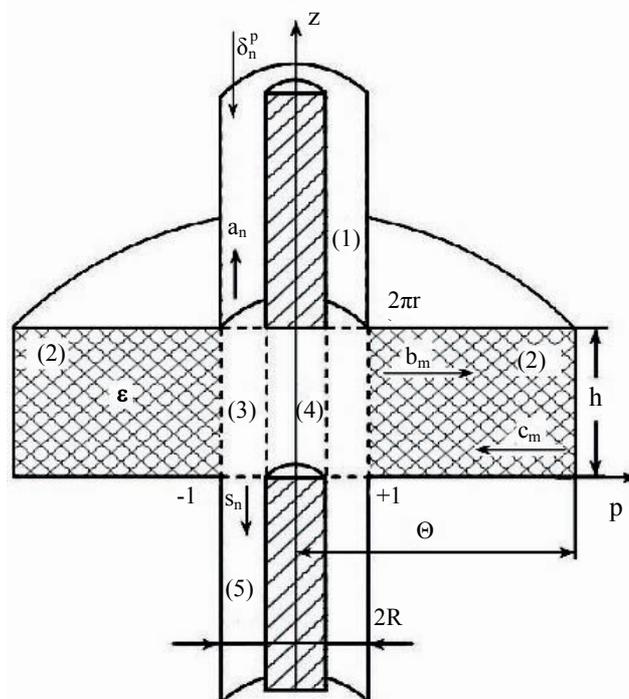


Рис. 1. Симметричное соединение двух коаксиальных линий и цилиндрического резонатора

Положим, что внешняя оболочка коаксиальной линии, круглый волновод и отверстия связи имеют единичные радиусы ( $R = 1$ ), тогда их периметры будут равны  $\ell = 2\pi R = 2\pi$ . Внутренний радиус коаксиальной линии обозначим через  $t$ .

Радиус цилиндрического резонатора обозначим через  $\theta$ , а его высоту  $h$  – через  $2\pi g$ , где  $g$  – некоторый малый параметр, равный  $g = h/\ell$ .

Области 1 и 5 на рис. 1 представляют собой регулярные участки коаксиальных линий, область 2 – цилиндрический резонатор, заполненный однородным изотропным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , область 3 – нерегулярный участок, общий для коаксиальных линий, и область 4 – нерегулярный, общий для торцов внутренних проводников коаксиальных линий участок.

Пусть на соединение (рис. 1) со стороны области 1 ( $z > 0$ ) набегают поперечные магнитные ТМ-волны (или е-волны) или поперечные электрические ТЕ-волны (или h-волны) порядка  $p$  единичной амплитуды  $\delta_n^p$ , где  $\delta_n^p$  – символ Кронекера.

Тогда дифрагированное на соединении поле будет иметь вид набора волн, отраженных в область 1 и проникающих в область 3, а через нее – в области 2, 4 и 5. Коэффициенты преобразования на структуре обозначим как:  $a_n$  – коэффициенты отражения от границы 1-3 в область 1;  $b_m$  – коэффициенты прохождения из области 3 в область 2;  $c_m$  – коэффициенты отражения от вертикальных стенок резонатора в сторону области 2;  $d_n$  – коэффициенты отражения от границ 1-3 и 3-5 в область 3;  $f_m$  – коэффициенты отражения от границы областей 2-3 в область 3;  $\ell_n$  – коэффициенты отражения от торцов центральных проводников коаксиальных линий в область 4;  $k_m$  – коэффициенты отражения от границы областей 3-4 в область 4;  $s_n$  – коэффициенты прохождения из области 3 в область 5.

Зависимость от координаты  $z$  для волн, распространяющихся в коаксиальных линиях и воображаемом круглом волноводе (область 4) в направлениях  $\pm z$  будем представлять в виде

$$\exp(\pm i g_n z) \text{ и } \exp(\pm i \gamma_n z),$$

а зависимость от координаты  $\rho$  для цилиндрического резонатора в направлениях  $\pm \rho$  – в виде

$$H_0^{(1)}(\Gamma_m \rho), H_0^{(2)}(\Gamma_m \rho), H_1^{(1)}(\Gamma_m \rho), H_1^{(2)}(\Gamma_m \rho)$$

силу поведения функций Ханкеля при больших  $\Gamma_m \rho$  [2].

Продольные постоянные распространения вдоль  $z$  в областях 1, 3 и 5 запишем как

$$g_n = \sqrt{\alpha^2 - h_{ne}^2} \text{ или } g_n = \sqrt{\alpha^2 - h_{nh}^2}, \quad (1)$$

где  $h_{ne}$  – корни уравнения

$$\frac{J_0(h_{ne})}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne})}{Y_0(h_{ne}t)} = 0, \quad (2)$$

$h_{nh}$  – корни уравнения

$$\frac{J_1(h_{nh})}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh})}{Y_1(h_{nh}t)} = 0, \quad (3)$$

а  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  и  $N_0(x)$ ,  $N_1(x)$  – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков.

Продольные постоянные распространения вдоль  $z$  в области 4 и вдоль  $\rho$  в областях 2, 3, 4 запишем в виде [3]:

$$\gamma_{n4} = \sqrt{\alpha^2 - (j_{0n}/t)^2} \text{ или } \gamma_{n4} = \sqrt{\alpha^2 - (j_{1n}/t)^2}; \quad (4)$$

$$\Gamma_{m2} = \sqrt{\alpha^2 \varepsilon - (m/2r)^2} \quad (5)$$

$$\Gamma_m = \sqrt{\alpha^2 - (m/2r)^2}, \quad (6)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  – для поперечно-магнитных волн ТМ и  $m = 1, 2, 3, \dots$  – для поперечно-электрических волн ТЕ;  $\alpha = kR = 2\pi/\lambda$  – безразмерное волновое число;  $j_{0n}, j_{1n}$  – поперечные волновые числа в воображаемом круглом волноводе 4 для волн  $E_{0n}$  и  $H_{0n}$  соответственно – корни уравнений  $J_0(j_{0n}) = 0$  и  $J_1(j_{1n}) = 0$ ;  $m/2r$  – поперечные волновые числа в цилиндрическом резонаторе;  $H_0^{(1)}(x)$ ,  $H_0^{(2)}(x)$ ,  $H_1^{(1)}(x)$ ,  $H_1^{(2)}(x)$  – функции Ханкеля первого и второго рода нулевого и первого порядков. Искомые поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла, условиям непрерывности и граничным условиям, а также условиям излучения и условиям на ребре [2].

Основным типом волны в коаксиальной линии является волна ТЕМ. Если же средний периметр линии  $\pi(t+R)$  становится равным длине волны  $\lambda$ , в линии возникают волны высших типов, которые разделяются на поперечные магнитные ТМ-волны (или е-волны) и поперечные электрические ТЕ-волны (или h-волны).

### Решение проблемы. ТМ<sub>0n</sub>(e<sub>0n</sub>)-волны

При больших аргументах функции Бесселя и Неймана в (2) могут быть заменены их асимптотическими представлениями, позволяющими привести уравнение (2) к виду [4]:

$$\sin[(R-t)h_{ne}] = 0 \Rightarrow h_{ne} = \frac{n\pi}{R-t} \Rightarrow \lambda_{кр} = \frac{2(R-t)}{n}.$$

Простейшей ТМ-волной в коаксиальной линии является волна ТМ<sub>01</sub>(e<sub>01</sub>), обладающая наименьшей

критической частотой (наибольшей критической длиной волны) из всех волн типа ТМ:

$$(\lambda_{кр})_{e_{01}} = 2,029(R-t).$$

Класс частных решений уравнений Максвелла будем искать с помощью скалярных собственных функций для коаксиальных волноводов, выражения для которых в областях 1 – 5 структуры рис. 1 запишем в виде [2, 3]:

$$\begin{aligned} \Psi_e^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}; \\ \Psi_e^{(2)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ b_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2})} + \right. \\ &\quad \left. + c_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \\ \Psi_e^{(3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} + e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\} + \\ &\quad + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m \rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \\ \Psi_e^{(4)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n H_0^{(1)}(j_{0n}) J_0\left(\frac{j_{0n}}{t}\rho\right) \times \\ &\quad \times \left\{ e^{iy_{n4}(2\pi r+z)} + e^{iy_{n4}(2\pi r-z)} \right\} + \\ &\quad + \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0\left(\frac{\Gamma_m}{t}\rho\right) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \\ \Psi_e^{(5)} &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{-ig_n z} \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a_n, d_n, \ell_n, s_n \sim E_n^{(p)}$ ,  $b_m, c_m, f_m, k_m \sim F_m^{(p)}$  – искомые элементы  $p$ -го столбца матрицы рассеяния на стыке.

Отличные от нуля составляющие поля определяются из уравнений Максвелла по формулам:

$$\begin{aligned} E_z &= \left( \alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_e; \quad E_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \Psi_e; \\ H_\phi &= i \alpha \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi_e \end{aligned} \quad (8)$$

и имеют вид:

– в области 1:

$$E_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} h_{ne}^2 \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\};$$

$$\begin{aligned} E_\rho^{(1)} &= i \sum_{n=1}^{\infty} h_{ne} g_n \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} - a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} H_\phi^{(1)} &= -i \alpha \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} h_{ne} \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}, \end{aligned}$$

где  $g_n$  определяется левой формулой (1);

– в области 2:

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m2}^2 \left\{ b_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2})} + \right. \\ &\quad \left. + c_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{m}{2r}-\pi\right)}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E_\rho^{(2)} &= -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m2} \frac{m}{2r} \left\{ b_m \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2})} + \right. \\ &\quad \left. + c_m \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\phi^{(2)} &= -i \alpha \varepsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m2} \left\{ b_m \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2})} + \right. \\ &\quad \left. + c_m \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma_{m2}$  определяется формулой (5);

– в области 3:

$$E_z^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne} \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} + e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m^2 H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m \rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$\begin{aligned} E_\rho^{(3)} &= -i \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne} g_n \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} - e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\} - \end{aligned} \quad (11)$$

$$-i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m \frac{m}{2r} H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$H_{\phi}^{(3)} = -i\alpha \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_n \left\{ e^{i g_n (2\pi r + z)} + e^{i g_n (2\pi r - z)} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\} - \\ - i\alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)},$$

где  $\Gamma_m$  определяется формулой (6);

– в области 4:

$$E_z^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \left( \frac{j_{0n}}{t} \right)^2 H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1 \left( \frac{j_{0n}}{t} \rho \right) \times \\ \times \left\{ e^{i \gamma_{n4} (2\pi r + z)} + e^{i \gamma_{n4} (2\pi r - z)} \right\} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \Gamma_m^2 H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0 \left( \frac{\Gamma_m}{t} \rho \right) e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)}; \\ E_{\rho}^{(4)} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{j_{0n}}{t} \gamma_{n4} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1 \left( \frac{j_{0n}}{t} \rho \right) \times \\ \times \left\{ e^{i \gamma_{n4} (2\pi r + z)} - e^{i \gamma_{n4} (2\pi r - z)} \right\} - \\ - i \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \frac{\Gamma_m}{t} \frac{m}{2r} H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1 \left( \frac{\Gamma_m}{t} \rho \right) e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)}; \\ H_{\phi}^{(4)} = -i\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{j_{0n}}{t} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1 \left( \frac{j_{0n}}{t} \rho \right) \times \\ \times \left\{ e^{i \gamma_{n4} (2\pi r + z)} + e^{i \gamma_{n4} (2\pi r - z)} \right\} - \\ - i\alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \frac{\Gamma_m}{t} H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_1 \left( \frac{\Gamma_m}{t} \rho \right) e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)},$$

где  $\gamma_{n4}$  определяется левой формулой (4);

– в области 5:

$$E_z^{(5)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n h_{ne}^2 e^{-i g_n z} \left\{ \frac{J_0(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}; \\ E_{\rho}^{(5)} = i \sum_{n=1}^{\infty} s_n h_{ne} g_n e^{-i g_n z} \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}; (13) \\ H_{\phi}^{(5)} = -i \alpha \sum_{n=1}^{\infty} s_n h_{ne} e^{-i g_n z} \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}.$$

Для удовлетворения условий непрерывности необходимо также выполнение между амплитудами  $f_m$  промежуточной области 3 соотношения

$$f_m = f_{-m}. \quad (14)$$

Из условия непрерывности  $E_{\rho}^{(1)} = E_{\rho}^{(3)}$  при  $z = 2\pi r$  следует связь между амплитудами  $a_n$  и  $d_n$  [2]:

$$a_n = d_n (e_n^2 - 1) + \delta_n^p, \quad e_n^2 = e^{4i g_n \pi r}. \quad (15)$$

Из граничного условия  $E_z^{(2)} = 0$  при  $\rho = \theta$  имеем

$$b_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2}\theta)}{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2})} + c_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2}\theta)}{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2})} = 0,$$

или  
где

$$c_m = -b_m \lambda_m^e, \quad (16)$$

$$\lambda_m^e = \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2}\theta) H_0^{(2)}(\Gamma_{m2})}{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2}\theta) H_0^{(1)}(\Gamma_{m2})}.$$

Выполнение условия непрерывности составляющих  $E_z$  на границе  $\rho = 1$  приводит к соотношению

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m^2 H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m) e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{ne}^2 \left\{ e^{i g_n (2\pi r + z)} + e^{i g_n (2\pi r - z)} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{J_0(h_{ne})}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_0(h_{ne})}{Y_0(h_{ne}t)} \right\} = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m2}^2 (b_m + c_m) e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)},$$

которое, в силу выполнения уравнения (2), связывает между собой амплитуды  $f_m$  и  $b_m$ :

$$f_m = b_m \frac{\Gamma_{m2}^2}{\Gamma_m^2} \frac{1 - \lambda_m^e}{H_0^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m)}. \quad (17)$$

Из условия непрерывности составляющих  $E_z$  на границе  $\rho = t$  следует соотношение [2]:

$$k_m = f_m \frac{J_0(\Gamma_m t)}{J_0(\Gamma_m)}. \quad (18)$$

Сшивание составляющих  $H_{\phi}$  на границе областей 2 и 3 приводит, с учетом (17), к функциональному уравнению

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \tau_n^e e_n \left\{ e^{i g_n z} + e^{-i g_n z} \right\} = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \Delta_m^e e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)}, \quad (19)$$

где

$$\Delta_m^e = \Gamma_{m2} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2})}{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2})} - \lambda_m^e \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2})}{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2})} - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma_{m2}}{\Gamma_m} (1 - \lambda_m^e) \frac{J_1(\Gamma_m)}{J_0(\Gamma_m)} \right\},$$

$$\tau_n^e = h_{ne} \left\{ \frac{J_1(h_{ne})}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne})}{Y_0(h_{ne}t)} \right\}, \quad e_n = e^{2\pi i g_n}. \quad (20)$$

Используя представление (21) в [2], получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно  $b_m$  и  $d_n$ :

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_m^n, \quad (21)$$

где коэффициенты  $\alpha_m^n$  определяются выражением [2]:

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \frac{\tau_n^e (e_n^2 - 1)}{2\pi i \Delta_m^e} \frac{g_n}{g_n^2 - (m/2r)^2}, & g_n \neq \frac{m}{2r}, \\ \tau_n^e / \Delta_m^e, & g_n = m/2r. \end{cases} \quad (22)$$

Выполняя условие непрерывности  $H_\varphi^{(3)} = H_\varphi^{(4)}$  при  $\rho = t$  и учитывая (15) и (17), а также соотношение

$$j_{0n} H_0^{(1)}(j_{0n}) J_1(j_{0n}) = -2/\pi i,$$

получим функциональное уравнение [2]:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n^e e_n \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{2e_{n4}}{\pi i t} \left\{ e^{i\gamma_{n4} z} + e^{-i\gamma_{n4} z} \right\} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \Omega_m^e e^{im \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\phi_n^e = h_{ne} \left\{ \frac{J_1(h_{ne} t)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{Y_1(h_{ne} t)}{Y_0(h_{ne} t)} \right\};$$

$$e_{n4} = e^{2\pi i \gamma_{n4}},$$

$$\Omega_m^e = \frac{(1 - \lambda_m^e)}{t} \left\{ \frac{\Gamma_m J_0(\Gamma_m t) J_1(\Gamma_m)}{J_0^2(\Gamma_m)} - \frac{(\Gamma_m t) J_0(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m t)}{J_0^2(\Gamma_m)} \right\}.$$

Произведем в (23) переразложения:

$$\phi_n^e e_n \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m^n \Omega_m^e e^{im \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)}, \quad (24)$$

$$\frac{2e_{n4}}{\pi i t} \left\{ e^{i\gamma_{n4} z} + e^{-i\gamma_{n4} z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m^n \Omega_m^e e^{im \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)} \quad (25)$$

с коэффициентами

$$\mu_m^n = \frac{\phi_n^e e_n}{\Omega_m^e 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{ig_n z} + e^{-ig_n z} \right\} e^{-im \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)} dz,$$

$$\xi_m^n = \frac{2e_{n4}}{\pi i t \Omega_m^e 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i\gamma_{n4} z} + e^{-i\gamma_{n4} z} \right\} e^{-im \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)} dz,$$

равными

$$\mu_m^n = \begin{cases} \frac{\phi_n^e (e_n^2 - 1)}{\Omega_m^e 2\pi r i} \frac{g_n}{g_n^2 - (m/2r)^2}, & g_n \neq m/2r, \\ \phi_n^e / \Omega_m^e, & g_n = m/2r, \end{cases}$$

$$\xi_m^n = \begin{cases} \frac{1 - e_{n4}^2}{\pi^2 t r \Omega_m^e} \frac{\gamma_{n4}}{\gamma_{n4}^2 - (m/2r)^2}, & \gamma_{n4} \neq \frac{m}{2r}, \\ 2i / \pi t \Omega_m^e, & \gamma_{n4} = m/2r. \end{cases}$$

После подстановки (24) и (25) в (23) имеем

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu_m^n + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \xi_m^n,$$

а с учетом (21) –

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_m^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu_m^n + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \xi_m^n,$$

откуда 
$$\ell_n = d_n \frac{\alpha_m^n - \mu_m^n}{\xi_m^n}. \quad (26)$$

Выполнение условия непрерывности составляющих  $H_\varphi^{(3)} = H_\varphi^{(5)}$  на границе  $z = 0$  приводит к функциональному уравнению

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - 2d_n e_n) h_{ne} \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{Y_1(h_{ne} \rho)}{Y_0(h_{ne} t)} \right\} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (-1)^m \frac{\Gamma_m^2 (1 - \lambda_m^e)}{\Gamma_m J_0(\Gamma_m)} J_1(\Gamma_m \rho). \end{aligned} \quad (27)$$

Используем переразложение

$$(-1)^m \frac{\Gamma_m^2 (1 - \lambda_m^e)}{\Gamma_m J_0(\Gamma_m)} J_1(\Gamma_m \rho) = \quad (28)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m h_{ne} \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{Y_1(h_{ne} \rho)}{Y_0(h_{ne} t)} \right\},$$

где

$$\beta_n^m = \frac{(-1)^m \Gamma_m^2 (1 - \lambda_m^e)}{h_{ne} \Gamma_m J_0(\Gamma_m)} \times$$

$$\begin{aligned} & \int_t^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{Y_1(h_{ne} \rho)}{Y_0(h_{ne} t)} \right\} d\rho \\ & \times \frac{1}{t \int_t^1 \rho \left\{ \frac{J_1(h_{ne} \rho)}{J_0(h_{ne} t)} - \frac{Y_1(h_{ne} \rho)}{Y_0(h_{ne} t)} \right\}^2 d\rho}. \end{aligned} \quad (29)$$

Обозначим интеграл в знаменателе как

$$\sigma_n^e = I_1 + I_2 + I_3 \quad (30)$$

и вычислим  $I_1, I_2$  и  $I_3$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_t^1 \rho \frac{J_1^2(h_{ne} \rho)}{J_0^2(h_{ne} t)} d\rho = \frac{1}{J_0^2(h_{ne} t)} \int_t^1 \rho J_1^2(h_{ne} \rho) d\rho = \\ & = \frac{1}{J_0^2(h_{ne} t)} \left\{ \frac{1}{2} \left[ J_0^2(h_{ne}) + J_1^2(h_{ne}) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{h_{ne}} J_0(h_{ne}) J_1(h_{ne}) - \frac{t^2}{2} \left[ J_0^2(h_{ne}t) + J_1^2(h_{ne}t) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{h_{ne}t} J_0(h_{ne}t) J_1(h_{ne}t) \right] \Bigg\}; \\
I_2 &= \int_t^1 \rho \frac{Y_1^2(h_{ne}\rho)}{Y_0^2(h_{ne}t)} d\rho = \frac{1}{Y_0^2(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho Y_1^2(h_{ne}\rho) d\rho = \\
&= \frac{1}{Y_0^2(h_{ne}t)} \left\{ \frac{1}{2} \left[ Y_0^2(h_{ne}) + Y_1^2(h_{ne}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{h_{ne}t} Y_0(h_{ne}t) Y_1(h_{ne}t) \right] \right\}; \\
I_3 &= \frac{-2}{J_0(h_{ne}t) Y_0(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_1(h_{ne}\rho) Y_1(h_{ne}\rho) d\rho = \\
&= \frac{-1}{h_{ne} J_0(h_{ne}t) Y_0(h_{ne}t)} \left\{ [J_2(h_{ne}) Y_1(h_{ne}) - \right. \\
& \quad - t J_2(h_{ne}t) Y_1(h_{ne}t)] - [J_1(h_{ne}) Y_2(h_{ne}) - \\
& \quad \left. - t J_1(h_{ne}t) Y_2(h_{ne}t)] \right\}.
\end{aligned}$$

При вычислении  $I_3$  использован интеграл

$$\begin{aligned}
& \int_0^t z C_1(kz) D_1(pz) dz = \\
&= \frac{1}{k^2 + p^2} \left\{ \left( \frac{k}{p} \right)^2 + kt C_2(kt) D_1(pt) - \right. \\
& \quad \left. - pt C_1(kt) D_2(pt) \right\}, \quad (31)
\end{aligned}$$

где  $C_1(kz)$ ,  $D_1(pz)$  – произвольные цилиндрические функции [5].

Интеграл в числителе обозначим как

$$v_n^m = I_4 - I_5 \quad (32)$$

и вычислим  $I_4$  и  $I_5$ , используя формулы Ломмеля [6]:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{J_0(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) J_1(h_{ne} \rho) d\rho = \\
&= \frac{[\Gamma_m J_1(h_{ne}) J_0(\Gamma_m) - h_{ne} J_1(\Gamma_m) J_0(h_{ne})]}{J_0(h_{ne}t) (\Gamma_m^2 - h_{ne}^2)} - \\
& \quad - \frac{t [\Gamma_m J_0(\Gamma_m t) J_1(h_{ne}t) - h_{ne} J_1(\Gamma_m t) J_0(h_{ne}t)]}{J_0(h_{ne}t) (\Gamma_m^2 - h_{ne}^2)}, \\
I_5 &= \frac{1}{Y_0(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) Y_1(h_{ne} \rho) d\rho = \\
&= \frac{[\Gamma_m Y_1(h_{ne}) J_0(\Gamma_m) - h_{ne} J_1(\Gamma_m) Y_0(h_{ne})]}{Y_0(h_{ne}t) (\Gamma_m^2 - h_{ne}^2)} -
\end{aligned}$$

$$- \frac{t [\Gamma_m Y_1(h_{ne}t) J_0(\Gamma_m t) - h_{ne} J_1(\Gamma_m t) Y_0(h_{ne}t)]}{Y_0(h_{ne}t) (\Gamma_m^2 - h_{ne}^2)}.$$

После подстановки  $\sigma_n^e$  и  $\varepsilon_n^m$  в (29) получим

$$\beta_n^m = \frac{(-1)^m (1 - \lambda_m^e) \Gamma_{m2}^2 v_m^n}{\Gamma_m h_{ne} J_0(\Gamma_m)} \frac{v_m^n}{\sigma_n^e},$$

тогда уравнение (27) примет вид

$$s_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \beta_n^m + 2d_n e_n \quad (33)$$

Выполнение условия непрерывности  $H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(3)}$  на границе  $z = 2\pi t$  приводит, после использования (15) и (17), к функциональному уравнению

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \{2\delta_n^p - 2d_n\} h_{ne} \left\{ \frac{J_1(h_{ne}\rho)}{J_0(h_{ne}t)} - \frac{Y_1(h_{ne}\rho)}{Y_0(h_{ne}t)} \right\} = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (-1)^m \frac{(-1)^m \Gamma_{m2}^2 (1 - \lambda_m^e)}{\Gamma_m J_0(\Gamma_m)} J_1(\Gamma_m \rho), \quad (34)
\end{aligned}$$

используя в котором переразложение (28), находим

$$d_v + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \frac{(-1)^m}{2} \beta_v^m = \delta_v^p. \quad (35)$$

Подставляя в (35) вместо  $b_m$  его значение из (21), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов  $d_n$ :

$$d_v + \sum_{n=1}^{\infty} d_n P_{nv} = \delta_v^p, \quad (36)$$

$$P_{nv} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \alpha_m^n \beta_v^m. \quad (37)$$

Коэффициенты  $a_n$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ ,  $f_m$ ,  $k_m$ ,  $\ell_n$  и  $s_n$  вычисляются по формулам (15), (21), (16), (17), (18), (26) и (33).

### Длинноволновое приближение

Явные формулы для определения коэффициентов преобразования на структуре в длинноволновом приближении ( $\alpha t \ll 1$ ) определим способом, использованным в [3].

Представим матричные коэффициенты  $P_{nv}$  как

$$P_{nv} = P_{nv}^{(0)} + \tilde{P}_{nv}, \quad (38)$$

а решение системы (36) – как

$$d_v = d_v^{(0)} + \tilde{d}_v,$$

и в выражении для  $P_{nv}$  удержим лишь слагаемые, пропорциональные  $1/\alpha t$ . Тогда решение приближенной системы

$$d_v^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(0)} P_{nv}^{(0)} = \delta_v^p \quad (39)$$

$d_v^{(0)}$  будет отличаться от решения исходной системы  $d_v$  на величину  $\alpha \varepsilon \ll 1$ .

Выражение для  $P_{nv}^{(0)}$  ( $m = 0$ ) имеет вид

$$P_{nv}^{(0)} = \frac{\alpha \varepsilon (1 - \lambda_0^e) J_0(\alpha x)}{4\pi i \Delta_0^e} \varphi_n \psi_v, \quad (40)$$

где

$$\lambda_0^e = \frac{H_0^{(1)}(\alpha \theta \sqrt{\varepsilon}) H_0^{(2)}(\alpha \sqrt{\varepsilon})}{H_0^{(2)}(\alpha \theta \sqrt{\varepsilon}) H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{\varepsilon})},$$

$$\Delta_0^e = \alpha \sqrt{\varepsilon} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(\alpha \sqrt{\varepsilon})}{H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{\varepsilon})} - \lambda_0^e \frac{H_1^{(2)}(\alpha \sqrt{\varepsilon})}{H_0^{(2)}(\alpha \sqrt{\varepsilon})} - \sqrt{\varepsilon} (1 - \lambda_0^e) \frac{J_1(\alpha)}{J_0(\alpha)} \right\},$$

$$\varphi_n = \frac{\tau_n^e (e_n^2 - 1)}{g_n}, \quad \psi_v = \frac{\nu_0^v}{\sigma_v^e h_{ve}}, \quad h_{ve} = \frac{\nu \pi}{1 - t},$$

а  $g_n$ ,  $\tau_n^e$ ,  $\sigma_n^e$  и  $\nu_0^v$  определяются выражениями (1), (20), (30) и (32).

Из (40) видно, что система имеет вырожденное ядро:

$$d_v^{(0)} + \frac{\alpha \varepsilon (1 - \lambda_0^e) J_0(\alpha x) \psi_v}{4\pi i \Delta_0^e} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(0)} \varphi_n = \delta_v^p. \quad (41)$$

После умножения (41) на  $\varphi_v$  и суммирования по  $\nu$ , получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(0)} \varphi_n = \frac{4\pi i \Delta_0^e J_0(k) \varphi_p}{4\pi i \Delta_0^e J_0(\alpha) + \alpha \varepsilon (1 - \lambda_0^e) S_1}, \quad (42)$$

где

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_{\nu} \psi_{\nu}.$$

Подставляя (42) в (41), найдем

$$d_v^{(0)} = \delta_v^p - \frac{\tau_p^e (e_p^2 - 1) \nu_0^v C}{g_p \sigma_v^e h_{ve}}, \quad (43)$$

где

$$C = \frac{\alpha \varepsilon (1 - \lambda_0^e)}{4\pi i \Delta_0^e J_0(k) + \alpha \varepsilon (1 - \lambda_0^e) S_1},$$

тогда коэффициенты отражения в верхнюю коаксиальную линию будут равны

$$a_n^{(0)} = \delta_n^p - (e_n^2 - 1) \left[ \delta_n^p - \frac{\nu_0^e \tau_p^e (e_p^2 - 1) C}{\sigma_n^e h_{ne} g_p} \right], \quad (44)$$

а коэффициенты прохождения в нижнюю коаксиальную линию –

$$s_n = 2e_n d_n^{(0)} + \beta_n^0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(0)} \alpha_n^n, \quad (45)$$

где  $\beta_n^0 = \frac{(1 - \lambda_0^e) \alpha \varepsilon \nu_0^n}{h_{ne} J_0(\alpha) \sigma_n^e}, \quad \alpha_n^n = \frac{\tau_n^e (e_n^2 - 1)}{2\pi i \Delta_0^e g_n}.$

Коэффициенты  $c_m$ ,  $f_m$ ,  $k_m$ ,  $b_m$  и  $\ell_m$  легко определяются из выражений (16), (17), (18), (21) и (26) соответственно.

На рис. 2...5 приведены зависимости от безразмерного волнового числа амплитуд отраженных в верхнюю КЛ  $|a_1|$  и прошедших в нижнюю КЛ  $|s_1|$  волн  $e_{01}$  при различных размерах резонатора, его диэлектрического заполнения и радиуса центрального проводника КЛ, построенные по формулам (44) и (45) в длинноволновом приближении.

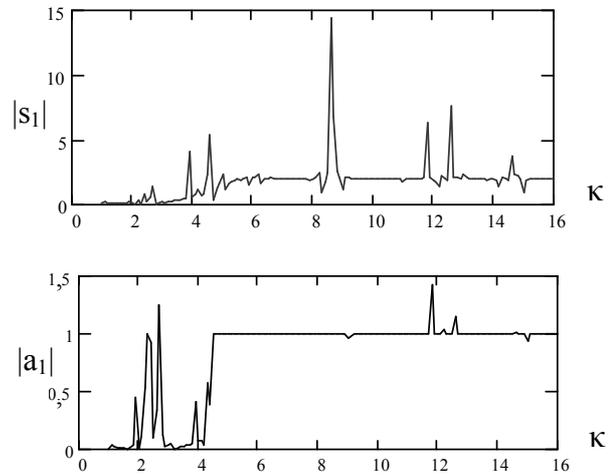


Рис. 2. Коэффициенты отражения в верхнюю КЛ  $|a_1|$  и прохождения в нижнюю КЛ  $|s_1|$  для волны  $e_{01}$  при  $\theta = 5R$ ;  $r = 0,1R$ ;  $t = 0,3R$ ;  $\varepsilon = 2,5$

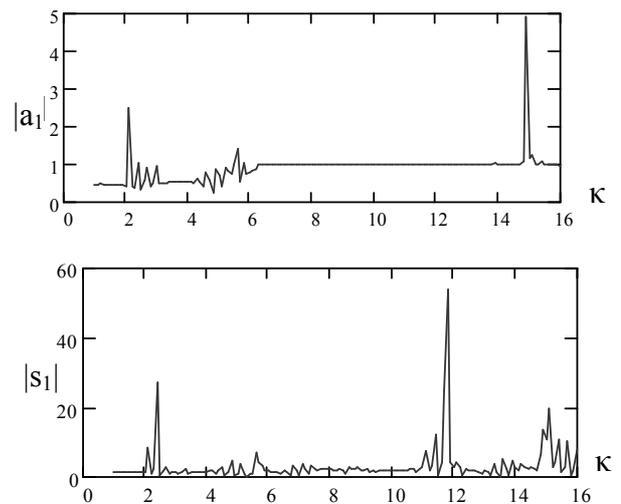


Рис. 3. Коэффициенты отражения в верхнюю КЛ  $|a_1|$  и прохождения в нижнюю КЛ  $|s_1|$  для волны  $e_{01}$  при  $\theta = 7R$ ;  $r = 0,01R$ ;  $t = 0,5R$ ;  $\varepsilon = 2,1$

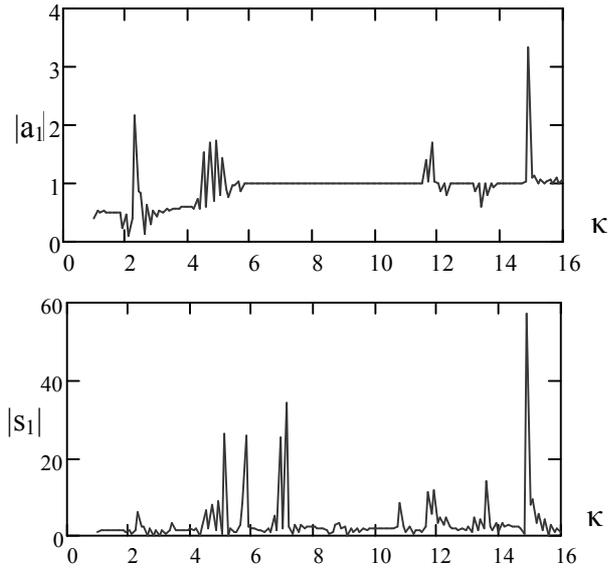


Рис. 4. Коэффициент прохождения в нижнюю КЛ  $|s_1|$  для волны  $e_{01}$  при  $\theta = 10R$ ;  $r = 0,01R$ ;  $t = 0,45R$ ;  $\varepsilon = 2,1$

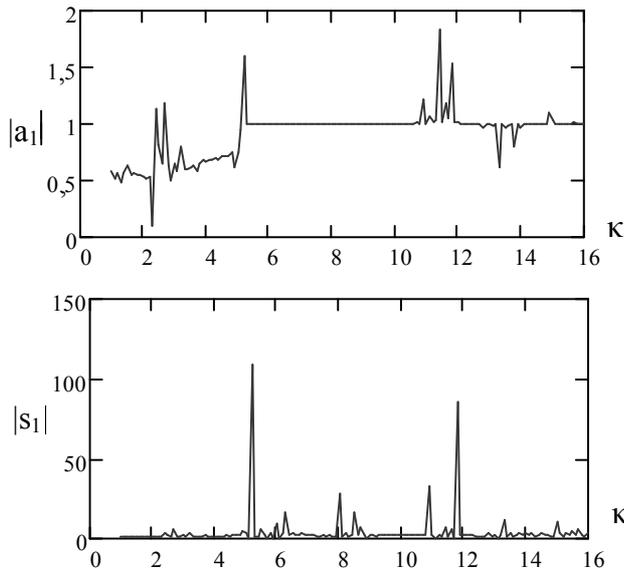


Рис. 5. Коэффициенты отражения в верхнюю КЛ  $|a_1|$  и прохождения в нижнюю КЛ  $|s_1|$  для волны  $e_{01}$  при  $\theta = 15R$ ;  $r = 0,01R$ ;  $t = 0,4R$ ;  $\varepsilon = 1,5$

### $TE_{0n}(h_{0n})$ -волны

Класс частных решений уравнений Максвелла будем искать с помощью скалярных собственных функций для коаксиальных линий, выражения для которых в областях 1 – 5 структуры рис. 1 запишем в виде [2, 3]:

$$\psi_e^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{J_0(h_{nh}\rho) - Y_0(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t) - Y_1(h_{nh}t)} \right\};$$

$$\psi_e^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ b_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2})} + c_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \quad (46)$$

$$\psi_e^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} - e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{J_0(h_{nh}\rho) - Y_0(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t) - Y_1(h_{nh}t)} \right\} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m \rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$\psi_e^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0\left(\frac{j_{1n}}{t} \rho\right) \times$$

$$\times \left\{ e^{iy_{n4}(2\pi r+z)} - e^{iy_{n4}(2\pi r-z)} \right\} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_0\left(\frac{\Gamma_m}{t} \rho\right) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$\psi_e^{(5)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{-ig_n z} \left\{ \frac{J_0(h_{nh}\rho) - Y_0(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t) - Y_1(h_{nh}t)} \right\},$$

где  $a_n, d_n, \ell_n, s_n \sim E_n^{(p)}$ ,  $b_m, c_m, f_m, k_m \sim F_m^{(p)}$  – искомые элементы  $p$ -го столбца матрицы рассеяния на стыке.

Отличные от нуля составляющие поля определяются из уравнений Максвелла по формулам:

$$H_z = \left( \varkappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_h;$$

$$H_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \psi_h; \quad (47)$$

$$E_\varphi = -i \varkappa \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_h$$

и имеют вид:

– в области 1:

$$H_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} h_{nh}^2 \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{J_0(h_{nh}\rho) - Y_0(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t) - Y_1(h_{nh}t)} \right\};$$

$$H_\rho^{(1)} = i \sum_{n=1}^{\infty} h_{nh} g_n \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} - a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\}; \quad (48)$$

$$E_{\varphi}^{(1)} = i\alpha \sum_{n=1}^{\infty} h_{nh} \left\{ \delta_n^p e^{-ig_n(z-2\pi r)} + a_n e^{ig_n(z-2\pi r)} \right\} \times \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\},$$

где  $g_n$  определяется правой формулой (1);

– в области 2:

$$H_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m2}^2 \left\{ b_m \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2})} + c_m \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}; \quad (49)$$

$$H_{\rho}^{(2)} = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m2} \frac{m}{2r} \left\{ b_m \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2})} + c_m \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$E_{\varphi}^{(2)} = i\alpha \varepsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_m \left\{ b_m \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2})} + c_m \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2}\rho)}{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2})} \right\} e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)},$$

где в выражении (5) следует полагать  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;

– в области 3:

$$H_z^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{nh} \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} - e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \left\{ \frac{J_0(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_0(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m^2 H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_0(\Gamma_m \rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$H_{\rho}^{(3)} = -i \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{nh} g_n \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} + e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\} - \quad (50)$$

$$-i \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$E_{\varphi}^{(3)} = i\alpha \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{nh} \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} - e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\} -$$

$$+ i\alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)},$$

где в выражении (6) нужно полагать  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;

– в области 4:

$$H_z^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \left( \frac{j_0 n}{t} \right)^2 H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1 \left( \frac{j_{1n}}{t} \rho \right) \times \left\{ e^{i\gamma_{n4}(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_{n4}(2\pi r-z)} \right\} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \Gamma_m^2 H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_0 \left( \frac{\Gamma_m}{t} \rho \right) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$H_{\rho}^{(4)} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{j_{1n}}{t} \gamma_{n4} H_0^{(1)}(j_{1n}) J_1 \left( \frac{j_{1n}}{t} \rho \right) \times \left\{ e^{i\gamma_{n4}(2\pi r+z)} + e^{i\gamma_{n4}(2\pi r-z)} \right\} - \quad (51)$$

$$-i \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \frac{\Gamma_m}{t} \frac{m}{2r} H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1 \left( \frac{\Gamma_m}{t} \rho \right) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)};$$

$$E_{\varphi}^{(4)} = i\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{j_{1n}}{t} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1 \left( \frac{j_{1n}}{t} \rho \right) \times \left\{ e^{i\gamma_{n4}(2\pi r+z)} - e^{i\gamma_{n4}(2\pi r-z)} \right\} -$$

$$+ i\alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \frac{\Gamma_m}{t} H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1 \left( \frac{\Gamma_m}{t} \rho \right) e^{im\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)},$$

где  $\gamma_{n4}$  определяется формулой (3), а индекс  $m$  в выражении (6) принимает значения  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;

– в области 5:

$$H_z^{(5)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n h_{nh}^2 e^{-ig_n z} \left\{ \frac{J_0(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_0(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\};$$

$$H_{\rho}^{(5)} = i \sum_{n=1}^{\infty} s_n h_{nh} g_n e^{-ig_n z} \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\}; \quad (52)$$

$$E_{\varphi}^{(5)} = i \alpha \sum_{n=1}^{\infty} s_n h_{nh} e^{-ig_n z} \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\}.$$

Для удовлетворения условий непрерывности необходимо также выполнение между амплитудами  $f_m$  промежуточной области 3 соотношения

$$f_m = -f_{-m}. \quad (53)$$

Из условия непрерывности  $E_{\varphi}^{(1)} = E_{\varphi}^{(3)}$  при  $z = 2\pi r$  следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_{nh} \left\{ \delta_n^p + a_n \right\} \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{ne}t)} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{nh} (e_n^2 - 1) \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\},$$

а так как, с учетом соотношения (14),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m \rho) \equiv 0,$$

то получим связь между  $a_n$  и  $d_n$ :

$$a_n = d_n(e_n^2 - 1) - \delta_n^p, \quad e_n^2 = e^{4ig_n\pi r}. \quad (54)$$

Из граничного условия  $E_\varphi^{(2)} = 0$  при  $\rho = \theta$  имеем

$$b_m \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2}\theta)}{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2})} + c_m \frac{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2}\theta)}{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2})} = 0,$$

или

$$c_m = -b_m \lambda_m^h, \quad (55)$$

где

$$\lambda_m^h = \frac{H_1^{(1)}(\Gamma_{m2}\theta)H_1^{(2)}(\Gamma_{m2})}{H_1^{(2)}(\Gamma_{m2}\theta)H_1^{(1)}(\Gamma_{m2})}.$$

Выполнение условия непрерывности составляющих  $E_\varphi$  на границе  $\rho = 1$  приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{nh} \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} - e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{J_1(h_{nh})}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{N_1(h_{nh})}{N_1(h_{nh}t)} \right\} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m2} (b_m + c_m) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \end{aligned}$$

которое, в силу выполнения уравнения (3), связывает между собой амплитуды  $f_m$  и  $b_m$ :

$$f_m = b_m \frac{\Gamma_{m2}}{\Gamma_m} \frac{1 - \lambda_m^h}{H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m)}. \quad (56)$$

Из условия непрерывности составляющих  $E_\varphi$  на границе  $\rho = t$  следует уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} d_n h_{nh} \left\{ e^{ig_n(2\pi r+z)} - e^{ig_n(2\pi r-z)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{J_1(h_{nh}t)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}t)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m t) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{j_{1n}}{t} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_1(j_{1n}) \times \\ & \times \left\{ e^{iy_{n4}(2\pi r+z)} - e^{iy_{n4}(2\pi r-z)} \right\} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m \Gamma_m H_1^{(1)}(\Gamma_m) J_1(\Gamma_m) e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \end{aligned}$$

из которого, в силу  $J_1(j_{1n}) = 0$  и выполнения (3), следует соотношение

$$k_m = f_m \frac{J_1(\Gamma_m t)}{J_1(\Gamma_m)}. \quad (57)$$

Сшивание составляющих  $H_z$  на границе областей 2 и 3 приводит, с учетом (53), к функциональному уравнению

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \tau_n^h e_n \left\{ e^{ig_n z} - e^{-ig_n z} \right\} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \Delta_m^h e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_m^e = \Gamma_{m2}^2 & \left\{ \frac{H_0^{(1)}(\Gamma_m)}{H_1^{(1)}(\Gamma_m)} - \lambda_m^h \frac{H_0^{(2)}(\Gamma_m)}{H_1^{(2)}(\Gamma_m)} - \right. \\ & \left. - (1 - \lambda_m^h) \frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m2}} \frac{J_0(\Gamma_m)}{J_1(\Gamma_m)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\tau_n^h = h_{nh}^2 \left\{ \frac{J_0(h_{nh})}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_0(h_{nh})}{Y_1(h_{nh}t)} \right\}, \quad e_n = e^{2\pi i g_n}.$$

Представим в (57):

$$\tau_n^h e_n \left\{ e^{ig_n z} - e^{-ig_n z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \Delta_m^h e^{\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)}, \quad (59)$$

где коэффициенты  $\alpha_m^n$  найдем как

$$\begin{aligned} \alpha_m^n & = \frac{\tau_n^h e_n}{\Delta_m^h 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{ig_n z} - e^{-ig_n z} \right\} e^{-\operatorname{im}\left(\frac{z}{2r}-\pi\right)} dz = \\ & = \frac{\tau_n^h e_n (-1)^m}{\Delta_m^h 4\pi r} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \left\{ e^{i(g_n - m/2r)z} - e^{i(g_n + m/2r)z} \right\} dz = \\ & = \frac{\tau_n^h e_n \sin(2g_n \pi r)}{\Delta_m^h 2\pi r} \left\{ \frac{1}{g_n - m/2r} - \frac{1}{g_n + m/2r} \right\} = \\ & = \frac{\tau_n^h (e_n^2 - 1)}{2\pi i \Delta_m^h} \frac{m/2r}{g_n^2 - (m/2r)^2}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \frac{\tau_n^h (e_n^2 - 1)}{2\pi i \Delta_m^h} \frac{m/2r}{g_n^2 - (m/2r)^2}, & g_n \neq \frac{m}{2r}, \\ \tau_n^h / \Delta_m^h, & g_n = m/2r. \end{cases}$$

Подставив (59) в (58), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $b_m$  и  $d_n$ :

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_m^n. \quad (60)$$

Выполняя условие непрерывности  $H_\varphi^{(3)} = H_\varphi^{(4)}$  при  $\rho = t$  и учитывая (17) и (18), а также соотношение

$$j_{1n} H_1^{(1)}(j_{1n}) J_0(j_{0n}) = \frac{2}{\pi i},$$

получим функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n^h e_n \left\{ e^{i g_n z} - e^{-i g_n z} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \frac{2 j_{1n} e_{n4}}{\pi i t^2} \left\{ e^{i \gamma_{n4} z} + e^{-i \gamma_{n4} z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \Omega_m^h e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)}, \quad (61)$$

где

$$\phi_n^h = h_{nh}^2 \left\{ \frac{J_0(h_{nh} t)}{J_1(h_{nh} t)} - \frac{N_0(h_{nh} t)}{N_1(h_{nh} t)} \right\},$$

$$\Omega_m^e = (1 - \lambda_m^h) \Gamma_m^2 \left\{ \frac{J_1(\Gamma_m t) J_0(\Gamma_m)}{J_1^2(\Gamma_m)} - \frac{J_0(\Gamma_m t)}{J_1(\Gamma_m)} \right\},$$

$$e_{n4} = e^{2 \pi i \gamma_{n4}}.$$

Произведем в (60) перерасложения:

$$\phi_n^h e_n \left\{ e^{i g_n z} - e^{-i g_n z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m^n \Omega_m^h e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)}, \quad (62)$$

$$\frac{2 j_{1n} e_{n4}}{\pi i t^2} \left\{ e^{i \gamma_{n4} z} - e^{-i \gamma_{n4} z} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m^n \Omega_m^h e^{i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)} \quad (63)$$

с коэффициентами

$$\mu_m^n = \frac{\phi_n^h e_n}{\Omega_m^h 4 \pi r} \int_{-2 \pi r}^{2 \pi r} \left\{ e^{i g_n z} - e^{-i g_n z} \right\} e^{-i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)} dz,$$

$$\xi_m^n = \frac{2 j_{1n} e_{n4}}{\pi i t^2 \Omega_m^h 4 \pi r} \int_{-2 \pi r}^{2 \pi r} \left\{ e^{i \gamma_{n4} z} - e^{-i \gamma_{n4} z} \right\} e^{-i m \left( \frac{z}{2r} - \pi \right)} dz,$$

равными

$$\mu_m^n = \begin{cases} \frac{\phi_n^h (e_n^2 - 1)}{\Omega_m^h 2 \pi r i} \frac{m/2r}{g_n^2 - (m/2r)^2}, & g_n \neq m/2r, \\ \phi_n^h / \Omega_m^h, & g_n = m/2r, \end{cases}$$

$$\xi_m^n = \begin{cases} \frac{j_{1n} (1 - e_{n4}^2)}{\pi^2 t^2 r \Omega_m^h} \frac{m/2r}{\gamma_{n4}^2 - (m/2r)^2}, & \gamma_{n4} \neq \frac{m}{2r}, \\ 2 j_{1n} / \pi i t^2 \Omega_m^h, & \gamma_{n4} = m/2r. \end{cases}$$

Коэффициенты  $\mu_m^n$  определены как

$$\mu_m^n = \frac{\phi_n^h e_n (-1)^m}{4 \pi r \Omega_m^h} \int_{-2 \pi r}^{2 \pi r} \left\{ e^{i \left( g_n - \frac{m}{2r} \right) z} - e^{-i \left( g_n + \frac{m}{2r} \right) z} \right\} dz = \frac{\phi_n^h (e_n^2 - 1)}{2 \pi r i \Omega_m^h} \frac{m/2r}{g_n^2 - (m/2r)^2},$$

а коэффициенты  $\xi_m^n$  – как

$$\xi_m^n = \frac{j_{1n} e_{n4} (-1)^m}{t^2 \pi i \Omega_m^h 2 \pi r} \times$$

$$\times \int_{-2 \pi r}^{2 \pi r} \left\{ e^{i (\gamma_{n4} - m/2r) z} - e^{-i (\gamma_{n4} + m/2r) z} \right\} dz =$$

$$= - \frac{j_{1n} (e_{n4}^2 - 1)}{t^2 \pi^2 r \Omega_m^h} \frac{m/2r}{\gamma_{n4}^2 - (m/2r)^2}.$$

После подстановки (61) и (62) в (60) имеем

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu_m^n + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \xi_m^n,$$

а с учетом (21):

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_m^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu_m^n - \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \xi_m^n,$$

откуда

$$\ell_n = d_n \frac{\mu_m^n - \alpha_m^n}{\xi_m^n}. \quad (64)$$

Выполнение условия непрерывности составляющих  $H_p$  на границе  $z = 0$  приводит к функциональному уравнению

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_n + 2 e_n d_n) h_{nh} g_n \left\{ \frac{J_1(h_{nh} \rho)}{J_1(h_{nh} t)} - \frac{Y_1(h_{nh} \rho)}{Y_1(h_{nh} t)} \right\} = \quad (65)$$

$$= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \frac{(-1)^m (1 - \lambda_m^h) \Gamma_{m2} m/2r}{J_1(\Gamma_m)} J_1(\Gamma_m \rho).$$

Используем перерасложение

$$\frac{(-1)^m \Gamma_{m2} (1 - \lambda_m^h) m/2r}{J_1(\Gamma_m)} J_1(\Gamma_m \rho) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^m h_{nh} g_n \left\{ \frac{J_1(h_{nh} \rho)}{J_1(h_{nh} t)} - \frac{Y_1(h_{nh} \rho)}{Y_1(h_{nh} t)} \right\}, \quad (66)$$

где

$$\beta_n^m = \frac{-(-1)^m \Gamma_{m2} (1 - \lambda_m^h) m/2r}{h_{nh} g_n J_1(\Gamma_m)} \times \quad (67)$$

$$\frac{\int_t^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) \left\{ \frac{J_1(h_{nh} \rho)}{J_1(h_{nh} t)} - \frac{Y_1(h_{nh} \rho)}{Y_1(h_{nh} t)} \right\} d\rho}{\int_t^1 \rho \left\{ \frac{J_1(h_{nh} \rho)}{J_1(h_{nh} t)} - \frac{Y_1(h_{nh} \rho)}{Y_1(h_{nh} t)} \right\}^2 d\rho}.$$

Обозначим интеграл в знаменателе как

$$\sigma_n^h = I_1 + I_2 + I_3 \quad (68)$$

и вычислим  $I_1, I_2$  и  $I_3$ :

$$I_1 = \int_t^1 \rho \frac{J_1^2(h_{nh} \rho)}{J_1^2(h_{nh} t)} d\rho = \frac{1}{J_1^2(h_{nh} t)} \int_t^1 \rho J_1^2(h_{nh} \rho) d\rho =$$

$$= \frac{1}{J_1^2(h_{nh} t)} \left\{ \frac{1}{2} \left[ J_0^2(h_{nh}) + J_1^2(h_{nh}) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{h_{nh}} J_0(h_{nh}) J_1(h_{nh}) \left. - \frac{t^2}{2} \left[ J_0^2(h_{nh}t) + J_1^2(h_{nh}t) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{h_{nh}t} J_0(h_{nh}t) J_1(h_{nh}t) \right] \right\}; \\
I_2 &= \int_t^1 \rho \frac{Y_1^2(h_{nh}\rho)}{Y_1^2(h_{nh}t)} d\rho = \frac{1}{Y_1^2(h_{nh}t)} \int_t^1 \rho Y_1^2(h_{nh}\rho) d\rho = \\
&= \frac{1}{Y_1^2(h_{nh}t)} \left\{ \frac{1}{2} \left[ Y_0^2(h_{nh}) + Y_1^2(h_{nh}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{h_{nh}} Y_0(h_{nh}) Y_1(h_{nh}) \right] - \frac{t^2}{2} \left[ Y_0^2(h_{nh}t) + Y_1^2(h_{nh}t) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{h_{nh}t} Y_0(h_{nh}t) Y_1(h_{nh}t) \right] \right\}; \\
I_3 &= \frac{-2}{J_0(h_{ne}t) Y_0(h_{ne}t)} \int_t^1 \rho J_1(h_{ne}\rho) Y_1(h_{ne}\rho) d\rho = \\
&= \frac{-1}{h_{ne} J_0(h_{ne}t) Y_0(h_{ne}t)} \left\{ \left[ J_2(h_{ne}) Y_1(h_{ne}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - t J_2(h_{ne}t) Y_1(h_{ne}t) \right] - \left[ J_1(h_{ne}) Y_2(h_{ne}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - t J_1(h_{ne}t) Y_2(h_{ne}t) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

При вычислении  $I_3$  использован интеграл (31).

Интеграл в числителе обозначим как

$$v_n^m = I_4 - I_5 \quad (69)$$

и вычислим  $I_4$  и  $I_5$ , пользуясь формулами Ломеля:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{J_1(h_{nh}t)} \int_t^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) J_1(h_{nh} \rho) d\rho = \\
&= \frac{[\Gamma_m J_1(h_{nh}) J_0(\Gamma_m) - h_{nh} J_1(\Gamma_m) J_0(h_{nh})]}{J_1(h_{nh}t) (\Gamma_m^2 - h_{nh}^2)} - \\
& \quad - \frac{t [\Gamma_m J_0(\Gamma_m t) J_1(h_{nh}t) - h_{nh} J_1(\Gamma_m t) J_0(h_{nh}t)]}{J_1(h_{nh}t) (\Gamma_m^2 - h_{nh}^2)}, \\
I_5 &= \frac{1}{Y_1(h_{nh}t)} \int_t^1 \rho J_1(\Gamma_m \rho) Y_1(h_{nh} \rho) d\rho = \\
&= \frac{[\Gamma_m Y_1(h_{nh}) J_0(\Gamma_m) - h_{nh} J_1(\Gamma_m) Y_0(h_{nh})]}{Y_1(h_{nh}t) (\Gamma_m^2 - h_{nh}^2)} - \\
& \quad - \frac{t [\Gamma_m Y_1(h_{nh}t) J_0(\Gamma_m t) - h_{nh} J_1(\Gamma_m t) Y_0(h_{nh}t)]}{Y_1(h_{nh}t) (\Gamma_m^2 - h_{nh}^2)}
\end{aligned}$$

После подстановки (28) и (30) в (27) найдем

$$\beta_n^m = \frac{-(-1)^m \Gamma_m^2 (1 - \lambda_m^h) m / 2\Gamma v_n^m}{h_{nh} g_n J_1(\Gamma_m) \sigma_n^h}.$$

Тогда уравнение (65) примет вид

$$s_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \beta_n^m - 2d_n e_n. \quad (70)$$

Сшивая составляющие  $H_\rho$  на границе  $z = 2\Gamma$  и учитывая соотношения (15) и (17), получаем функциональное уравнение

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (2\delta_n^p + 2d_n) h_{nh} g_n \left\{ \frac{J_1(h_{nh}\rho)}{J_1(h_{nh}t)} - \frac{Y_1(h_{nh}\rho)}{Y_1(h_{nh}t)} \right\} = \\
&= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (-1)^m \frac{(-1)^m \Gamma_m^2 (1 - \lambda_m^h) m / 2\Gamma}{J_1(\Gamma_m)} J_1(\Gamma_m \rho),
\end{aligned}$$

используя в котором переразложение (66), найдем

$$d_v - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (-1)^m \beta_v^m = -\delta_v^p. \quad (71)$$

После подстановки в (71) выражения (60) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов преобразования  $d_v$ :

$$d_v - \sum_{n=1}^{\infty} d_n P_{nv} = -\delta_v^p \quad (72)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{nv} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \alpha_m^n \beta_v^m. \quad (73)$$

Коэффициенты  $a_n$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ ,  $f_m$ ,  $k_m$ ,  $\ell_n$  и вычисляются по формулам (15), (21), (16), (17), (18), (25) и (32).

## Заключение

В результате строгого решения задачи методом частичных областей получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно амплитуд волн пространственного спектра дифрагированного поля. Решение получено без ограничений на параметры структуры.

Для предельного случая – длинноволнового приближения выражения для коэффициентов преобразования получены в виде простых явных формул. Представлены результаты численной реализации этих выражений, позволяющие быстро и с достаточной для практики точностью оценить целесообразность использования той или иной структуры.

## Литература

1. *Микроволновые технологии в телекоммуникационных системах* / Т.Н. Нарытник, В.П. Бабак, М.Е. Ильченко, С.А. Кравчук. – К.: Техніка, 2000. – 304 с.
2. *Заикин И.П. Рассеяние электромагнитных волн на симметричном соединении коаксиальной*

линии и круглого волновода с цилиндрическим резонатором. ТМ(е)-волны / И.П. Заикин, А.А. Ткаченко // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. – 2008. – № 4 (31). – С. 7-16.

3. Заикин И.П. Рассеяние электромагнитных волн на симметричном соединении двух круглых волноводов и цилиндрического резонатора, заполненных диэлектриком / И.П. Заикин, А.А. Ткаченко, А.В. Фатеев // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. – 2008. – № 3 (30). – С. 7-17.

4. Гольдштейн Л.Д. Электромагнитные поля и волны / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. – М.: Сов. радио, 1971. – 662 с.

5. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

6. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1965. – 778 с.

Поступила в редакцию 8.12.2008

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой теоретической радиофизики Н.Н. Колчигин, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина.

### РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА СИМЕТРИЧНОМУ З'ЄДНАННІ ДВОХ КОАКСІАЛЬНИХ ЛІНІЙ І ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗОНАТОРА З ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ЗАПОВНЕННЯМ

*І.П. Зайкін, Ол-й О. Ткаченко, Ол-ра О. Ткаченко*

Розглянута задача дифракції аксіально-симетричних ТМ(е)- та ТЕ(н)-хвиль на симетричному з'єднанні двох напівнескінчених коаксіальних ліній і циліндричного резонатора з діелектричним заповненням. Для строгого розв'язання внутрішньої крайової задачі використаний метод часткових областей. Рішення одержано у вигляді нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно амплітуд хвиль просторового спектру дифрагованого поля. Задача розв'язана без обмежень на параметри структури. Для довгохвильового наближення у випадку е – хвиль рішення системи рівнянь одержано у явному вигляді. Подані результати чисельних розрахунків для цього наближення.

**Ключові слова:** розсіяння, поляризація, коаксіальна лінія, коефіцієнти перетворення, діелектричне заповнення.

### DISPERSION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON SYMMETRICAL CONNECTION OF TWO COAXIAL LINES AND CYLINDRICAL RESONATOR FILLED BY DIELECTRIC

*I.P. Zaikin, Alex A. Tkachenko, Al-ra A. Tkachenko*

The problem of dispersion of the axial-symmetrical TM (e)- and TE(h)-waves on symmetrical connection of two seminfinte coaxial lines and cylindrical resonator dielectric loading is considered. For rigorous solution of such internal boundary problem the method of partial domains is proposed. Solution is obtained in the appearance infinite system of linear algebraic equations of second kind relatively to amplitudes of waves spatial spectrum of diffracted field. The problem without restrictions at the characteristics of structure is solved. Simple obvious formulas for long-wave approximation in case e – waves are obtained. Results of numerical calculations for this approximation are obtained.

**Key words:** dispersion, polarization, coaxial line, coefficients transformation, dielectric loading.

**Заикин Иван Павлович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри приёма, передачі і обробки сигналів, Національний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського "ХАІ", Харків, Україна.

**Ткаченко Алексей Александрович** – магістр кафедри приёма, передачі і обробки сигналів, Національний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського "ХАІ", Харків, Україна.

**Ткаченко Александра Александровна** – студентка кафедри приёма, передачі і обробки сигналів, Національний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського "ХАІ", Харків, Україна.