

УДК 004.891

Э.Г. НОВАКОВСКАЯ, С.В. ДЁМИНА

*Донецкий институт автомобильного транспорта, Украина*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ АКТИВАМИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Статья посвящена разработке экономико-математических моделей, положенных в основу задач подсистем прогноза и планирования системы контроля распределения активов страховой компании.

**страховые резервы, платежеспособность, активы, система контроля, множество, нелинейные дифференциальные уравнения**

### Введение

Проблема управления портфелем активов и финансовых инструментов является фундаментальной в финансовой теории и практике. Для отечественных условий рынка активов актуальной является задача синтеза экономико-математических моделей прогноза стоимости и доходности активов и алгоритмов оптимального формирования портфеля активов страховой компании с учетом установленных условий обеспечения платежеспособности и правил формирования и размещения страховых резервов.

**Анализ исследований и публикаций.** Представленные математические модели изменения активов, капитала страховой компании, а также модели инвестиционной деятельности позволяют принимать решения об изменении пропорций в портфеле, состоящем из денежных средств и приносящих доход прочих активов [1 – 3]. Представленные математические модели не позволяют оценивать стоимость ликвидности активов при конвертации денежных средств в другие активы и наоборот, не учитывают специфические для страхования принципы формирования резервов и установленные условия обеспечения платежеспособности, что не позволяет осуществлять управление активами в стратегическом аспекте.

**Постановка задачи.** Практическая и теоретическая значимость моделирования оптимального размещения капитала страховой компании в активы в условиях стохастического изменения параметров

инвестиционной среды определили выбор динамической стохастической модели изменения активов страховой компании, описывающей структуру активов и динамику каждого отдельного вложения во взаимосвязи с поведением других вложений, положенной в основе задач подсистем планирования системы контроля распределения активов страховой компании, и модели, представленной в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений, положенной в основе задач подсистем прогноза.

### Основной материал

В соответствии с представленной в работе [4] структурой системы контроля распределения активов страховой компании и поставленными задачами для каждой из подсистем математическая модель разрабатывается на трех уровнях (микроуровень, средний уровень, макроуровень).

В рамках данной работы будут рассмотрены модели, положенные в основу задач подсистем, отнесенных к микроуровню и макроуровню.

На микроуровне осуществляется прогноз динамики потока денежных средств, обеспечивающий формирование ресурсов страховой компании. Исследование характеристик страховой компании дало возможность определить нелинейный, случайный характер и нестационарность процесса страхования и составить гипотезу о механизме страхования, на основании которой поставлены задачи моделирования.

Уравнения подмоделей микроуровня, описывающие динамику поступлений по договорам страхования (подсистема прогноза поступления страховых платежей) представлены в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) – (5).

Изменение количества заключаемых договоров страхования  $j$ -го вида страхования, заключаемых со страхователями:

$$\frac{dk_{2j}(t)}{dt} = \lambda \cdot \lambda_{1j} k_{2j}(t), \quad (1)$$

где  $j \in Vid$ ,  $Vid = \{Vid_1, \dots, Vid_v\}$  – множество видов страхования, которыми занимается страховая компания (где  $v$  – количество видов страхования, которыми занимается страховая компания);  $\lambda_{1j}$  – параметр модели;  $k_{2j}(t)$  – количество договоров страхования  $j$ -го вида страхования, заключаемых со страхователями;  $\lambda$  – доля рынка в общем объеме поступивших страховых платежей.

Изменение общего количества договоров страхования  $k_2$  представлено в виде

$$\frac{dk_2(t)}{dt} = \sum_{j \in Vid} k_{2j}^*(t), \quad (2)$$

где  $k_{2j}^*(t)$  определяется при расчете правых частей

$$k_{2j}^*(t) = k_{2j}^*(0) + \int_{t-\Delta t}^t \frac{dk_{2j}(t)}{dt} d\tau.$$

Изменение страхового тарифа по  $i$ -му договору  $j$ -го вида страхования:

$$(i = 1..k_{2j}, j \in Vid, Vid = \{Vid_1, \dots, Vid_v\}):$$

$$\frac{dP_{22ij}(t)}{dt} = \lambda_{2j} P_{22ij}(t), \quad (3)$$

где  $\lambda_{2j}$  – параметр модели;  $P_{22ij}$  – страховой тариф по  $i$ -му договору  $j$ -го вида страхования.

$$P_{22ij}^D(t) \in P_2^D, j \in U_5,$$

$$P_{22ij}^O(t) \in P_2^O, j \in U_6, U_5 \cup U_6 = Vid, \quad (4)$$

$P_2^D$  – множество нормативно установленных страховых тарифов по  $j$ -му добровольному виду страхования;  $P_2^O$  – множество нормативно установленных

страховых тарифов по  $j$ -му обязательному виду страхования;  $U_5, U_6$  – множество договоров добровольных и обязательных видов страхования соответственно;  $Vid$  – множество видов страхования, которыми занимается страховая компания.

Уравнение, описывающее изменение страховой суммы по  $i$ -му договору страхования представлено как

$$\frac{dP_{21i}(t)}{dt} = \lambda_3 P_{21i}(P_p, t), \quad (5)$$

где  $\lambda_3$  – параметр модели;  $P_{21i}(P_p, t)$  – страховая сумма по  $i$ -му договору страхования в момент времени  $t$ , которая зависит также от поступивших страховых платежей по существующему портфелю договоров –  $P_p$ .

Аналогично (1) – (5) рассчитываются страховые суммы  $P_{31i}, P_{41i}$  и тарифы  $P_{32i}, P_{42i}$  по договорам перестрахования и договорам страхования, заключаемым агентами страховой компании, и соответственно количество этих договоров –  $k_3, k_4$ .

Динамика других поступлений финансовых ресурсов страховой компании представлена на микроуровне в виде динамической стохастической модели.

Подсистема прогноза дивидендов по долгосрочным и текущим финансовым вложениям представлена уравнениями (6) – (8):

Изменение величины доходности  $j$ -й долгосрочной финансовой инвестиции:

$$dr_{AK_{OB3j}}(t) = \alpha_{AK_{OB3j}} \cdot (\gamma_{AK_{OB3j}} - r_{AK_{OB3j}}(t)) dt + \sigma_{AK_{OB3j}} dz, \quad (6)$$

где  $\alpha_{AK_{OB3j}}$  – параметр характеризует скорость возвращения процесса к долгосрочному среднему значению, пропорциональную отклонению текущего значения ставки доходности от среднего ( $\gamma_{AK_{OB3j}} - r_{AK_{OB3j}}(t)$ );  $\gamma_{AK_{OB3j}}$  – долгосрочное среднее значение ставки доходности;  $\sigma_{AK_{OB3j}}$  – величина дисперсии долгосрочных финансовых инвестиций;  $z(t)$  – винеровский процесс.

Динамика величины доходности  $j$ -й текущей финансовой инвестиции:

$$dr_{AK_{OB_{12j}}}(t) = r_{AK_{OB_{12j}}}(t)dt + \sigma_{AK_{OB_{12j}}} dz, \quad (7)$$

где  $\sigma_{AK_{OB_{12j}}}$  – величина дисперсии текущих финансовых инвестиций;  $z(t)$  – винеровский процесс.

Динамика дивидендов, полученных от инвестирования средств страховой компании в долгосрочные и текущие финансовые инвестиции:

$$dDiv(t) = \sum_{j=1}^{k_{AK_{OB_3}}} r_{AK_{OB_{3j}}}(t) \cdot AK_{OB_{3j}}(t)dt + \sum_{j=1}^{k_{AK_{OB_{12}}}} r_{AK_{OB_{12j}}}(t) \cdot AK_{OB_{12j}}(t)dt, \quad (8)$$

где  $k_{AK_{OB_3}}$  и  $k_{AK_{OB_{12}}}$  – количество долгосрочных и текущих финансовых вложений;  $r_{AK_{OB_{3j}}}(t)$  и  $r_{AK_{OB_{12j}}}(t)$  – доходности  $j$ -й долгосрочной и текущей финансовой инвестиции;  $AK_{OB_{3j}}(t)$  и  $AK_{OB_{12j}}(t)$  – соответственно объем средств  $j$ -го долгосрочного и текущего финансового вложения.

Представленные выше зависимости образуют систему дифференциальных уравнений со следующими начальными условиями (9) – (10):

$$AK_{OB_{3j}}(0) = AK_{OB_{3j}}^0; AK_{OB_{12j}}(0) = AK_{OB_{12j}}^0; r_{AK_{OB_{3j}}}(0) = r_{AK_{OB_{3j}}}^0; r_{AK_{OB_{12j}}}(0) = r_{AK_{OB_{12j}}}^0; \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{k_{AK_{OB_3}}} AK_{OB_{3j}}^0 = AK_{OB_3}^0 = AK_{OB_3}(0), \sum_{j=1}^{k_{AK_{OB_{12}}}} AK_{OB_{12j}}^0 = AK_{OB_{12}}^0 = AK_{OB_{12}}(0), \quad (10)$$

Аналогично динамика величины доходности  $j$ -го банковского депозита:

$$dr_{AK_{OB_{14j}}}(t) = r_{AK_{OB_{14j}}}(t)dt + \sigma_{AK_{OB_{14j}}} dz, \quad (11)$$

где  $\sigma_{AK_{OB_{14j}}}$  – величина дисперсии банковских вкладов;  $z(t)$  – винеровский процесс.

Динамика дивидендов, полученных от инвестирования средств страховой компании на банковские депозиты:

$$dPr(t) = \sum_{j=1}^{n_2} r_{AK_{OB_{14j}}}(t) \cdot AK_{OB_{14j}}(t)dt, \quad (12)$$

где  $n_2$  – количество банков, в которых размещены депозитные вклады;  $r_{AK_{OB_{14j}}}$  – доходность  $j$ -го банковского депозита;  $AK_{OB_{14j}}(t)$  – объем средств в  $j$ -м банке.

$$AK_{OB_{14j}}(0) = AK_{OB_{14j}}^0; r_{AK_{OB_{14j}}}(0) = r_{AK_{OB_{14j}}}^0; \sum_{j=1}^{n_2} AK_{OB_{14j}}^0 = AK_{OB_{14}}^0 = AK_{OB_{14}}(0). \quad (13)$$

Динамика платежей, которые получает страховая компания от сдачи в аренду своего имущества, представлена зависимостью (14):

$$\frac{dAr(t)}{dt} = \lambda_{15} \cdot S_{am} \cdot AK_{p_3}(t); AK_{p_3}(0) = AK_{p_3}^0, \quad (14)$$

где  $\lambda_{15}$  – параметр модели;  $S_{am}$  – средняя норма амортизационных отчислений;  $AK_{p_3}(t)$  – стоимость недвижимого имущества страховой компании.

Расчет правых частей осуществляется следующим образом:

$$Ar^*(t) = Ar^*(0) + \int_{t-\Delta t}^t \frac{dAr(t)}{dt} d\tau. \quad (15)$$

Прогноз динамики потока денежных средств, обеспечивающий формирование ресурсов страховой компании на микроуровне, позволяет решить задачи подсистем прогноза поступления кредитных ресурсов, прогноза поступлений регрессных платежей и страховых возмещений от перестраховщиков, подсистем планирования переданных перестраховочных платежей, планирования административных расходов, планирования расходов на реализацию, подсистемы прогноза прочих расходов среднего уровня и

определить объем полученных кредитных средств -  $Kr(t)$ , объем средств ( $Reg(t)$ ), который возвращается в страховую компанию по регрессным требованиям к лицам, виновным за наступления страхового случая, и сумму страховых выплат ( $PER(t)$ ), которые возвращены перестраховщиками по договорам перестрахования принятых на себя рисков страховой компанией, а также полученную тантьему по рискам, переданным в перестрахование ( $T(t)$ ), а также определить административные расходы, расходы на реализацию и другие расходы страховой компании в заданный момент времени  $t$  соответственно  $AD_r(t)$ ,  $ZAT_r(t)$ ,  $D_{ras}(t)$  и амортизационные отчисления на содержание основных фондов  $AM(t)$ .

Стратегия управления портфелем активов на макроуровне (подсистема планирования размещения активов) определяется путем перераспределения капитала между различными видами активов посредством текущего банковского счета в соответствии со стратегией инвестирования средств в активы, при ограничениях на размеры активов, берущихся в покрытие резервов.

Функционал цели задачи подсистемы планирования размещения активов представлен в виде (16), система ограничений представлена в виде (17) – (27).

$$P = \sum_{i=1}^{11} AK_{P_i}^r (\Delta AK_{P_i}, \Delta AK_{OB_i}) - OB \rightarrow \max_{\substack{\Delta AK_{P_i}, i=1..11, i \neq 8 \\ \Delta AK_{OB_i}, j=1..15, j \neq 13}}, \quad (16)$$

где  $AK_{P_i}^r$  – часть разрешенного для покрытия технических резервов актива  $AK_{P_i}$ , которая берется в покрытие резервов страховой компании;  $OB$  – обязательства страховой компании.

В результате выбора управляющих воздействий  $\Delta AK_{P_i}, \Delta AK_{OB_i}$  происходит перераспределение капитала между различными видами активов посредством текущего банковского счета.

Изменения денежных средств на текущем банковском счете во времени описывается дифференциальным уравнением:

$$dAK_{OB_{13}}(t) = \left[ AK_{OB_{13}}^0 + Reg(t) + PER(t) + T(t) + Div(t) + Pr(t) + Kr(t) + \sum_{i=1}^{k_2} P_{2_{1i}}(t) \cdot P_{2_{2i}}(t) + \sum_{i=1}^{k_3} P_{3_{1i}}(t) \cdot P_{3_{2i}}(t) + \sum_{i=1}^{k_4} P_{4_{1i}}(t) \cdot P_{4_{2i}}(t) - ZAT_r(t) - D_{ras}(t) - AD_r(t) - \sum_{i=1, i \neq 13}^{15} \Delta AK_{OB_i}(t) \right] dt, \quad (17)$$

где  $AK_{OB_{13}}^0$  – начальное значение суммы денежных средств, которые находятся на текущем банковском счете;  $Reg(t), PER(t), T(t), Div(t), Pr(t), Kr(t), P_{2_{1i}}(t), P_{2_{2i}}(t), P_{3_{1i}}(t), P_{3_{2i}}(t), P_{4_{1i}}(t), P_{4_{2i}}(t), ZAT_r(t), D_{ras}(t), AD_r(t)$  – рассчитываются соответственно на основании уравнений подмоделей микроуровня и среднего уровня;  $\Delta AK_{OB_i}(t)$  – сумма перераспределяемого капитала между банковским счетом и  $i$ -м активом ( $i = 1..15, i \neq 13$ ),  $\Delta AK_{OB_i}(t) > 0$  означает перевод капитала в сумму  $\Delta AK_{OB_i}(t)$  с банковского счета в  $i$ -й актив,  $\Delta AK_{OB_i}(t) < 0$  – перераспределение капитала с  $i$ -го актива на текущий банковский счет.

Динамика основных средств страховой компании представлено в виде:

$$dAK_{OB_1}(t) = \left[ \mu_1(t)dt + \sum_{j=1}^{15} \sigma_{1j}(t)d\omega_j(t) \right] \times \left[ \Delta AK_{OB_1}(t) + AK_{OB_1}^0 - AM(t) \right], \quad (18)$$

где  $\mu_i(t)$  – ставка роста курса актива;  $\omega_j(t)$  – стандартные независимые винеровские процессы;  $\sigma_{1j}(t)$  – коэффициент волатильности активов;  $\Delta AK_{OB_1}(t)$  – сумма перераспределяемого капитала между банковским счетом и основными средствами страховой компании;  $AK_{OB_1}^0$  – начальное значение стоимости основных фондов страховой компании,  $AM(t)$  – амортизационные отчисления на содержание основных фондов – рассчитывается на основании уравнений подмоделей среднего уровня.

Динамика капитала, соответствующего  $i$ -му ак-

тиву описується стохастическим дифференціальним уравнением:

$$dAK_{OB_i}(t) = \left[ \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{15} \sigma_{ij}(t)d\omega_j(t) \right] \times \left[ \Delta AK_{OB_i}(t) + AK_{OB_i}^0 \right], i = 2..15, i \neq 13, \quad (19)$$

где  $\mu_i(t)$  – ставка роста курса актива;  $\sigma_{ij}(t)$  – коэффициент волатильности активов, служит мерой взаимосвязи активов, входящих в портфель;  $\omega_j(t)$  – стандартные независимые винеровские процессы;  $\Delta AK_{OB_i}(t)$  – сумма перераспределяемого капитала между банковским счетом и  $i$ -м активом ( $i = 2..15, i \neq 13$ ).

Аналогично, динамика капитала, соответствующего  $i$ -му разрешенному для покрытия технических резервов активу описывается стохастическим дифференціальным уравнением ( $i = 1..11, i \neq 8$ ):

$$dAK_{P_i}(t) = \left[ \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{11} \sigma_{ij}(t)d\omega_j(t) \right] \times \left[ \Delta AK_{P_i}(t) + AK_{P_i}^0 \right], i = 1..11, i \neq 8; \quad (20)$$

$$AK_{P_8}(t) = F(Per(t)); \quad (21)$$

$$AK_{P_1}(t) = AK_{OB_{13}}(t); \quad AK_{P_2}(t) = AK_{OB_{14}}(t); \quad (22)$$

$$AK_{P_3}(t) \leq AK_{OB_2}(t); \quad AK_{P_4}(t) \leq AK_{OB_{12}}(t); \quad (23)$$

$$AK_{P_5}(t) \leq AK_{OB_{12}}(t); \quad AK_{P_6}(t) \leq AK_{OB_{12}}(t); \quad (24)$$

$$AK_{P_7}(t) \leq AK_{OB_{12}}(t); \quad AK_{P_9}(t) \leq AK_{OB_3}(t); \quad (25)$$

$$AK_{P_{10}}(t) \leq AK_{OB_{15}}(t); \quad AK_{P_{11}}(t) \leq AK_{OB_{15}}(t). \quad (26)$$

Часть ( $AK_{P_i}^r(t)$ ) разрешенного для покрытия технических резервов актива, которая берется в покрытие резервов, в момент времени  $t$ , определяется как

$$AK_{P_i}^r(t) = \begin{cases} AK_{P_i}(t), a_i \cdot TR(t) \geq AK_{P_i}(t) \\ a_i \cdot TR(t), \end{cases}$$

где  $a_i$  – норматив для представления технических резервов;  $TR(t)$  – размер сформированных технических резервов.

## Заключение

Научная новизна данной работы заключается в разработке динамических нелинейных моделей, положенных в основу задач системы контроля распределения активов страховой компании, которые учитывают критерии обеспечения платежеспособности, правила формирования и размещения страховых резервов. Функционирование приведенной системы, реализующей задачи в области финансово-инвестиционной деятельности, обуславливает внедрения в процесс страхования автоматизированных информационных технологий.

Практическая значимость состоит в том, что разработанные в статье модели ориентированы на решение тактических и стратегических задач при осуществлении страховой компанией управления финансовым инвестированием в рисковые активы в стохастической инвестиционной среде.

## Литература

1. Бенинг В. Е., Ротарь В. И. Одна модель оптимального поведения страховой компании // Экономика и математические методы. – 1993. – № 4. – С. 617-627.
2. Пепеляева Т. В. Нелинейные динамические модели в задачах финансовой математики и теории риска: Авторефер. дис... кад. ф.-м. наук: 01.05.01 / ИК НАН Украины. – К., 2004. – 21 с.
3. Ткаченко Н. В. Инвестиционная деятельность страховых компаний: Авторефер. дис... кад. эконом. наук: 08.04.01 / Институт экономического прогнозирования НАН Украины. – К., 2004. – 22 с.
4. Новаковская Э. Г., Дёмина С. В. Структура системы контроля за движением активов страховой компании // Искусственный интеллект. – Донецк, ДГГИИИ. – 2005. – № 1. – С.189-193.

Поступила в редакцию 21.03.2007

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Б.В. Бондарев, Донецкий национальный университет, Донецк.