

УДК 512.25/26

А.В. КАРТАШОВ, Н.В. ЛУЧЕНЦОВА

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского "ХАИ", Украина***ОДНА РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ОДИНОЧНОГО  
РАЗМЕЩЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ  
КРУГОВ РАЗЛИЧНЫХ РАДИУСОВ В ПОЛОСЕ**

Работа посвящена проблеме оптимального размещения кругов на плоскости. В статье приводится математическая модель задачи размещения кругов различных радиусов в полубесконечной полосе. Рассматривается алгоритм, реализующий метод последовательно-одиночного размещения для решения этой задачи, и анализируется его сложность. Приводятся примеры решения задач, полученные с помощью рассматриваемого алгоритма.

**задачи размещения и упаковки; круги; математическое программирование; оптимизация.****Введение**

Интерес к множеству задач размещения вызван их сложностью и нетривиальностью математических моделей, необходимых для адекватного описания, а так же широким спектром практических приложений. Задачи размещения геометрических объектов возникают при раскрое различных материалов, проектировании, упаковке. Одной из таких задач является задача оптимального размещения кругов в двумерном пространстве. Важность данной задачи подчёркивается множеством публикаций в международных журналах [1] – [8].

В статьях [1] – [3] рассматриваются исследования, сводимые к размещению одинаковых кругов на плоскости.

В работах [4] – [8] изучалось размещение кругов различных радиусов. В первых двух статьях используется эвристические подходы к решению задачи. В статье [7] исследуется задача размещения с дополнительными ограничениями на расстояния между объектами, а в работе [8] рассматривается метод поиска локального экстремума и эвристические подходы к направленному перебору локальных экстремумов. Результаты последних работ дают очень хорошие размещения, но требуют объемных вычислений.

Таким образом, актуальными остаются методы, позволяющие достаточно быстро находить рациональное решение, в комбинации с методами направленного перебора таких решений.

Целью данной работы является реализация одного из таких методов – метода последовательно-одиночного размещения для решения задачи оптимального размещения кругов различных радиусов в полосе и оценка её вычислительной сложности.

**1. Постановка задачи исследования**

Будем рассматривать задачу размещения  $n$  кругов в полосе без взаимных пересечений так, чтобы длина занятой части полосы была минимальной. Введём необходимые обозначения.

Обозначим полубесконечную полосу через  $S$ , её ширину –  $M$ ,  $i$ -й круг –  $T_i$ , радиус  $i$ -го круга –  $R_i$ ,  $i \in [1..n]$ . Полусом круга будем называть его центр.

Параметрами размещения  $i$ -го круга будем называть координаты его полюса относительно левого нижнего угла полосы, и обозначать  $X_i = (x_i, y_i)^T$ . Таким образом, разместить  $n$  кругов означает выбрать координаты их полюсов. Будем обозначать через  $T_i(X_i)$  круг  $T_i$ , полюс которого находится в точке  $X_i$ .

При размещении должны соблюдаться следующие условия:

а) круги должны принадлежать полосе:

$$T_i(X_i) \in S, \quad \forall i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

б) круги не должны пересекаться между собой:

$$\text{int } T_i(X_i) \cap \text{int } T_j(X_j) = 0, \quad \forall i, j \in [1, n]; \quad i \neq j. \quad (2)$$

Допустимое размещение пары кругов приведено на рис. 1.

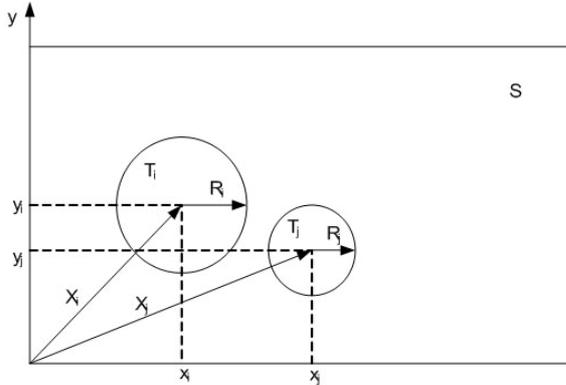


Рис. 1. Допустимое размещение кругов

Все вектора  $X_i$  составляют вектор переменных задачи

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in R^{2n}. \quad (3)$$

Таким образом, задача представляется в пространстве  $R^{2n}$  и состоит в поиске

$$\min_{x \in D} f(x), \quad (4)$$

где  $f(x) = \max_{i \in [1..n]} (x_i + R_i). \quad (5)$

Область допустимых решений  $D \subseteq R^{2n}$  определяется выполнением ограничений (1), (2). Представим их в аналитическом виде в пространстве  $R^{2n}$ .

Условие (1) эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} y_i + R_i - M \leq 0; \\ y_i - R_i \geq 0; \\ x_i - R_i \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Графическая иллюстрация этого условия приведена на рис. 2. Неравенство  $y_i + R_i - M \leq 0$  представляет собой условие непересечения кругом  $T_i$  верхней границы полосы, неравенство  $y_i - R_i \geq 0$  – нижней, неравенство  $x_i - R_i \geq 0$  – левой.

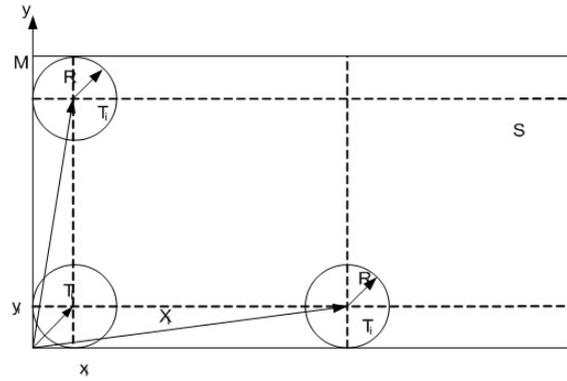


Рис. 2. Графическое представление условий принадлежности кругов полосе

Условие (2) эквивалентно неравенству

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (R_i + R_j)^2 \geq 0, \quad (7)$$

а его графическая иллюстрация приведена на рис. 3.

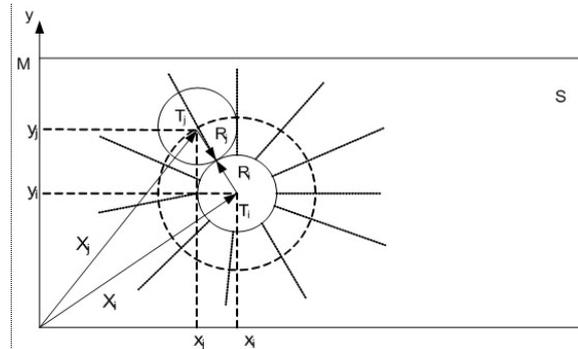


Рис. 3. Геометрическое представление условия непересечения пары кругов

Следовательно, задача имеет вид:

$$\text{найти } \min_{X \in D \subset R^{2n}} \max_{i \in [1..n]} (x_i + R_i), \quad (8)$$

где

$$D = \left\{ X \in R^{2n} \left| \begin{cases} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (R_i + R_j)^2 \geq 0; \\ i, j = \overline{1, n}, i \neq j; \\ f_i^{(k)}(X_i) \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}, k = \overline{1, 3}. \end{cases} \right. \right\} \quad (9)$$

Задача (8) – (9) представляет собой многоэкстремальную оптимизационную задачу нелинейного программирования в пространстве  $R^{2n}$ . Даже поиск локального экстремума для нее является достаточно трудоёмкой и сложной задачей, поэтому при размещении большого количества кругов актуальным остается метод последовательно одиночного размещения [9]. В данной работе рассматривается одна алгоритмическая реализация этого метода с анализом ее вычислительной сложности.

## 2. Метод последовательно-одиночного размещения

Данный метод является модификацией метода Гаусса-Зайделя. Суть этого метода заключается в том, что объекты размещаются последовательно по одному. Ранее размещенные объекты считаются неподвижными, т.е. их параметры размещения имеют вполне определенные фиксированные значения. Каждый объект размещается так, что из всех его возможных положений выбирается такое, при котором значение функции цели достигает наименьшего значения только по тем переменным, которые являются параметрами размещаемого объекта.

Достоинством данного метода является то, что задача оптимизации в многомерном пространстве заменяется последовательностью оптимизационных задач в двухмерном пространстве. Недостатком такого подхода является то, что он в общем случае не гарантирует достижение локального экстремума, а дает лишь достаточно хорошее к нему приближение.

Получаемый результат зависит от порядка размещения объектов. Поэтому применение метода последовательно-одиночного размещения порождает задачу дискретной оптимизации на множестве перестановок, где каждому порядку размещения соответствует своё приближение к локальному экстремуму. В данной работе эта задача не исследуется, а порядок размещения объектов выбирается случайным образом.

## 3. Алгоритмическое представление метода последовательно – одиночного размещения и анализ сложности алгоритма

Метод состоит в последовательном решении задач размещения очередного объекта относительно ранее установленных. Рассматриваемая алгоритмическая реализация [10] метода основана на том, что, так как функция цели кусочно-линейная, решение находится в крайней точке области допустимых решений. В двумерном пространстве в крайних точках

являются активными, по крайней мере, два ограничения. При реализации описываемого алгоритма, каждый круг будем размещать таким образом, чтобы он касался или двух уже размещенных кругов одновременно, или круга и любой кромки полосы, или одновременно двух кромок полосы. Сечение границы ограничений (6), (7) гиперплоскостью

$$\begin{cases} x_i = 0; \\ y_i = 0. \end{cases}$$

называется годографом функции плотного размещения [9] (в дальнейшем просто годографом) для полосы и круга и пары кругов соответственно. Т.о. любая крайняя точка будет пересечением пары из набора годографов очередного объекта с уже установленными кругами и с полосой. Каждый шаг метода сводится к последовательному перебору крайних точек. Для реализации метода последовательно-одиночного размещения используется *алгоритм 1*, следующий ниже. Алгоритм приведен в виде псевдокода для размещения кругов в естественном порядке – от первого до  $n$ -го. Псевдокод написан на основе Паскаля, лишь вместо скобок *begin...end* используется сдвиг текста вправо, т.е. в цикле, начинающемся оператором 1 выполняются все операторы с 2 по 12, а цикл, начинающийся оператором 8, заканчивается оператором 11.

### Алгоритм 1.

```

1 For i:=1 to n do // цикл по всем кругам
2   Ti:= очередной размещаемый круг;
3   Построить годографы Ti с полосой S и уже
      размещенными Tk, k ∈ [1,i-1];
4   Points:=массив точек пересечения всех
      построенных годографов;
5   m:=(6+i)*(i-1)+2; // размер массива Points
6   Сортировка Points по возрастанию координаты x;
7   j:=0;
8   repeat
9     j:=j+1;
10    P:=Points[j];
11    until ( Ti (P) ∈ S ) and
      ( int Ti (P) ∩ int Tk(Xk) = 0 √ k ∈ [1,i-1]);
12   Xi:=P.
```

Годографы, которые строятся в шаге 3, определяется из формул (6), (7) заменой неравенств на равенства.

При выполнении оператора 4 нахождение точек пересечения окружности и прямой не вызывает трудностей. Для облегчения нахождения точки пересечения пары кругов используется преобразование пространства так, чтобы один из них находился в начале координат, а центр другого лежал на оси X. При этом вместо системы уравнений общего вида

$$\begin{cases} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = R_1^2; \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 = R_2^2 \end{cases} \quad (10)$$

решается система уравнений вида

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = R_1^2; \\ (x'_2 - x')^2 + y'^2 = R_2^2, \end{cases} \quad (11)$$

которая является частным случаем системы (10). Решение системы уравнений (11) гораздо проще, чем исходной системы (10). После нахождения точек пересечения окружностей в новой системе координат, для них выполняется обратное преобразование в исходную.

Оценим сложность шагов *алгоритма 1* по приведенному псевдокоду:

1. Операторы 2 – 12 выполняются  $n$  раз.
2. Сложность оператора 3 –  $O(i)$ .
3. При выполнении оператора 4 находятся точки попарного пересечения  $(i - 1)$  кругов (по 2 точки для  $i(i - 1)/2$  пересечений) и пересечение каждого из  $(i - 1)$  кругов с тремя прямыми (по 2 точки для  $3(i - 1)$  пересечений). Кроме того, в рассмотрении участвуют две крайние точки годографа  $T_i$  с полосой  $S$ . Отсюда максимальное количество точек –  $m$  (некоторые из них могут не существовать), определяемое оператором 5. Таким образом, сложность оператора 4 –  $O(i^2)$ .

4. Сложность оператора 6 –  $O(m \cdot \log_2 m)$  или, выражая  $m$  через  $i$ ,  $O(i^2 \cdot \log_2 i)$ .

5. Максимальное количество повторений операторов цикла 9 – 11 равна  $m$ , т.е. оценка этого количества –  $O(i^2)$ .

6. Максимальное количество проверок условия, записанного во второй строке оператора 11 –  $(i - 1)$ .

Общая сложность *алгоритма 1* таким образом определяется формулой:

$$\sum_{i=1}^n (O(i) + O(i^2) + O(i^2 \log_2 i) + O(i^2) \cdot O(i - 1)).$$

Порядок выражения под знаком суммы  $O(i^3)$ . А так как  $i$  меняется от 1 до  $n$ , то оценкой сложности всего алгоритма можно считать  $O(n^4)$ .

#### 4. Численные тесты

Описанный алгоритм был программно реализован в среде C++Builder 6.0 с использованием объектно-ориентированный подхода.

Программа случайным образом перебирает последовательность следования объектов размещения и работает до тех пор, пока пользователь её не остановит. Лучший результат запоминается. Экспериментальная зависимость времени расчёта одного варианта размещения от количества размещаемых объектов приведена на рис. 4.

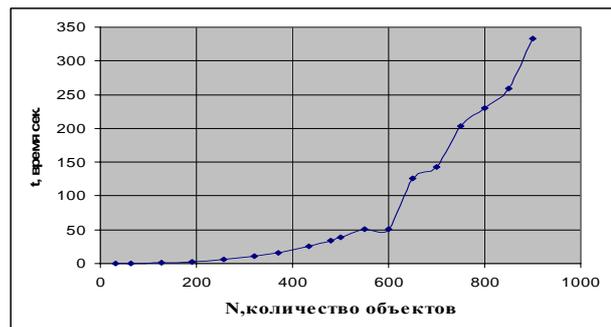


Рис. 4. График зависимости времени расчёта размещения от количества объектов

На рис. 5 приведен результат работы программы для 150 кругов, радиусы которых были взяты случайным образом из диапазона от 0 до 5 и являются дробными числами, в результате длина полосы составила 92. Время вычисления одной случайным образом выбранной перестановки составило около 9 мс, а плотность заполнения занятой части полосы – 78,5%. Условия еще одного тестового примера для 30 кругов взяты из работы [8]. Ширина полосы – 9,5. Радиусы кругов и параметры их размещения для лучшего из полученных вариантов представлены в табл. 1.

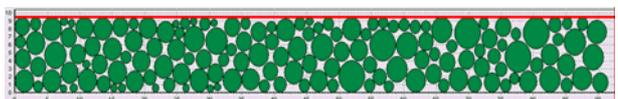


Рис. 5. Результат работы программы для 150 кругов

Таблица 1

Результаты размещения тестового примера

радиус	координаты	радиус	координаты
0,855	(0,855;0,855)	0,845	(0,845;2,55)
0,564	(0,564;3,936)	1,551	(1,551;5,806)
1,292	(2,816;1,729)	1,281	(3,034;8,219)
0,868	(0,868;8,127)	1,484	(4,115;4,182)
1,18	(4,974;6,704)	1,739	(6,217;1,739)
1,399	(6,887;4,975)	1,493	(7,308;8,007)
1,275	(8,866;3,177)	1,404	(9,466;6,074)
1,491	(11,059;1,491)	1,085	(10,311;8,415)
0,955	(10,861;4,172)	0,887	(8,701;0,887)
2,05	(12,877;6,614)	0,527	(1,625;3,683)
1,274	(13,149;3,301)	1,044	(13,679;1,044)
1,374	(15,533;4,453)	1,67	(16,393;7,83)
0,807	(5,067;8,693)	0,592	(14,187;8,908)
0,853	(15,133;2,262)	1,237	(16,954;1,237)
0,76	(17,267;3,209)	0,747	(17,319;5,598)

Полученное размещение приведено на рис. 6. Программа работала 10 мин. Для различных перестановок время вычисления одного расположения составляло несколько мс. Плотность расположения лучшего результата (рис. 6) – 79%, а значение длины занятой части полосы – 18,2. Результат, полученный в [8], – 17,49, затраченное время – 40 мин.

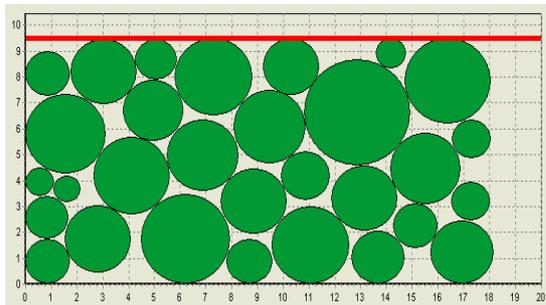


Рис. 6. Результат работы программы для 30 кругов

### Выводы

Метод последовательно-одиночного размещения остается актуальным при решении задач достаточно большой размерности – размещении сотен объектов. При этом перспективным представляется дальнейшая работа по улучшению быстродействия этого метода, так как оценку  $O(n^4)$  нельзя считать оптимальной.

### Литература

1. Dowsland K.A. Palletisation of cylinders in cases // O.R Spektrum. – 1991. – Vol. 13. – P. 171-172.

2. Fraser H.J., George J.A. Integrated container loading software for pulp and paper industry // European Journal of Operational Research. – 1994. – Vol. 77. – P. 466-474.

3. Graham R.L., Lubachevsky B.D. Repeated pattern of dense packings of equal disks in a square // Electronic Journal of Combinatory. – 1996. – Vol. 3, report No.16. – P. 45-49.

4. George J.A., George J.M., Lamer B.W. Packing different-sized circles into a rectangular container // European Journal of Operational Research. – 1995. – Vol. 84. – P. 693-712.

5. Hifi M., Paschos V.Th., Zissimopoulos V.A. Simulated annealing approach for the circular cutting problem // European Journal of Operational Research. – 2004. – Vol. 159. – P. 430-448.

6. Hifi M., M'Hallah R. Approximate algorithms for constrained circular cutting problems // Comput. Opns. Res. – 2004. – Vol. 31. – P. 675-694.

7. Stoyan Yu. G., Yaskov G. Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints // Inc. Trans. Opl. Res. – 1998. – Vol. 5. – P. 45-57.

8. Stoyan Yu. G., Yaskov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip // European Journal of Operational Research. – 2004. – Vol. 156. – P. 590-600.

9. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов. – К.: Наук. думка, 1975. – 240 с.

10. Гиль Н.И. Математическое моделирование нерегулярного размещения плоских геометрических объектов в системах автоматизации проектирования (теоретические основы, методы, приложения). Автореф. дис... докт. техн. наук. – М-ск, 1990. – 32 с.

Поступила в редакцию 11.06.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.