

УДК 621.396:681.34

А.В. ТОЦКИЙ

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Украина***ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ БИСПЕКТРА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ СИГНАЛОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ ШУМА**

Представлены результаты анализа точности оценки биспектральной плотности смеси сигнала неизвестной формы и аддитивного гауссова шума. Получены выражения для дисперсии оценки вещественной и мнимой составляющих биспектральной плотности. Методом математического моделирования исследована точность оценки биспектральной плотности для сигналов различной формы в присутствии помех разного уровня.

восстановление сигнала, амплитудный Фурье спектр, оценка биспектральной плотности**Введение**

Методы биспектрального анализа находят широкое применение в цифровой обработке сигналов [1 – 3], астрономии [4], радиолокации [5, 6], в системах обработки биомедицинских сигналов [7], а также во многих других приложениях [8].

К основному преимуществу обработки сигналов с использованием оценки биспектра (комплексной двумерной статистики третьего порядка) по сравнению с традиционной вещественной одномерной статистикой (спектром мощности) относится возможность сохранения и восстановления фазовой информации и способность подавления аддитивной помехи с симметричной функцией плотности вероятности в условиях априорной неопределенности в отношении характеристик сигнала и помехи.

Точность восстановления сигналов с использованием восстановления оценки комплексного Фурье спектра сигнала по оценке биспектральной плотности наблюдения зависит в первую очередь от точности оценки последней [4 – 7]. Другими словами, для того, чтобы восстановить сигнал априорно неизвестной формы по оценке биспектральной плотности наблюдения, например, смеси детерминированного сигнала и аддитивного белого гауссова шума (АБГШ) – необходимо сформировать такую оценку

биспектра, которая наиболее близка по выбранному критерию (например, по минимуму среднего квадратического отклонения) к биспектру истинного сигнала.

В работе [3] рассмотрена задача биспектрального восстановления детерминированных сигналов, наблюдаемых на фоне АБГШ. Опираясь на результаты теоретического анализа, авторы данной работы вводят утверждение, что оценка биспектра детерминированного вещественного сигнала с ненулевым средним значением является асимптотически несмещенной при условии исключения из обработки тех отсчетов, которые лежат на частотных и диагональных осях на биспектральной плоскости.

Данное теоретическое утверждение, с нашей точки зрения, требует практической проверки и уточнения. В этой связи основное внимание в настоящей работе посвящено исследованию точности биспектральной оценки в задаче восстановления детерминированного сигнала неизвестной формы с ненулевым средним значением на фоне АБГШ.

Постановка задачи

Предположим, что на входе измерительной радиосистемы наблюдают вещественный дискретный временной процесс $\{x_m(i)\}$ в виде выборки

объемом M . Отдельная m -ая реализация ($m = \overline{1, M}$) наблюдения $\{x_m(i)\}$ равна

$$x_m(i) = s(i - \tau_m) + n_m(i), \quad (1)$$

где $i = \overline{0, I-1}$ – индекс (номер) временного отсчета; $s(i)$ – вещественный детерминированный сигнал неизвестной формы; τ_m – случайный временной сдвиг сигнала $s(i)$, который меняется от реализации к реализации, принимая целочисленные значения; $n_m(i)$ – m -ая реализация АБГШ с нулевым средним значением и выборочной дисперсией σ_n^2 неизвестной величины; полезный сигнал $s(i)$ и шум полагаются статистически независимыми; биспектр сигнала $s(i)$ полагается отличным от нуля. Отметим, что случайный сдвиг τ_m в (1), который может возникать на практике вследствие флуктуаций параметров случайно-неоднородного канала распространения радиоволн, а также из-за флуктуаций бортовых антенных систем, не позволяет эффективно выделить полезный сигнал $s(i)$ на фоне помехи $n_m(i)$, например, с помощью простого статистического усреднения наблюдений (1).

Для восстановления сигнала $s(i)$ неизвестной формы по наблюдениям (1) воспользуемся алгоритмом восстановления оценки амплитудного и фазового Фурье спектра сигнала из оценки биспектра наблюдений [4].

В соответствии с подходом, предложенным в работе [4], на первом этапе обработки формируют выборочную оценку биспектра $\hat{B}_{xm}(p, q)$, полученную по единственной m -й реализации наблюдаемого процесса $x_m(i)$ (1), в виде следующего тройного произведения:

$$\hat{B}_{xm}(p, q) = \dot{X}_m(p) \dot{X}_m(q) \dot{X}_m^*(p+q), \quad (2)$$

где $p = \overline{0, I-1}$; $q = \overline{0, I-1}$ – независимые индексы частотных отсчетов на биспектральной плоскости;

$$\dot{X}_m(p) = \sum_{i=0}^{I-1} x_m(i) e^{-j \frac{2\pi}{I} ip} -$$

дискретное преобразование Фурье (ДПФ) m -й реализации наблюдения (1); * – символ комплексного сопряжения; $j = \sqrt{-1}$.

Для получения сглаженной оценки биспектра следует формировать усредненную по M реализациям (2) оценку вида

$$\hat{B}_x(p, q) = \left\langle \hat{B}_{xm}(p, q) \right\rangle_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{B}_{xm}(p, q), \quad (3)$$

где $\langle \dots \rangle_M$ означает усреднение по M реализациям.

Рекурсивный алгоритм [4] восстановления оценки амплитудного и фазового Фурье спектра сигнала из результата измерения оценки биспектра (3) сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \left| \hat{B}_x(p, q) \right| &= \left| \hat{X}(p) \right| \left| \hat{X}(q) \right| \left| \hat{X}^*(p+q) \right|; \\ \hat{\beta}_x(p, q) &= \hat{\phi}_x(p) + \hat{\phi}_x(q) - \hat{\phi}_x(p+q), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\left| \hat{B}_x(p, q) \right|$ и $\hat{\beta}_x(p, q)$ – оценки амплитудного и фазового биспектра, а $\left| \hat{X}(p) \right|$ и $\hat{\phi}_x(p)$ – оценки амплитудного и фазового Фурье спектров наблюдения (1) соответственно.

При достаточном объеме выборки M и большом (значительно большим единицы) входном отношении сигнал/шум решение системы уравнений (4) позволяет по биспектральной оценке (3) восстановить с высокой точностью амплитудный и фазовый Фурье спектры сигнала, а затем – и сам сигнал с помощью процедуры обратного ДПФ.

Однако в практически важном случае ограниченного набора M наблюдений (1) и при малых входных отношениях сигнал/шум ситуация резко меняется вследствие роста искажений оценки биспектра (3). Поэтому **целью настоящей работы** является исследование точности оценки биспектра в практической ситуации ограниченного объема выборки M и низких входных отношений сигнал/шум.

Согласно принятой модели наблюдения (1) получим развернутую формулу для сглаженной оценки биспектра (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\hat{B}_x(p, q) = & \dot{S}(p)\dot{S}(q)\dot{S}^*(p+q) + \\
& + \dot{S}(p)\dot{S}(q)\left\langle \dot{N}_m^*(p+q)e^{-j\tau_m p} \right\rangle_M + \\
& + \dot{S}(p)\dot{S}^*(p+q)\left\langle \dot{N}_m(q)e^{j\tau_m q} \right\rangle_M + \\
& + \dot{S}(q)\dot{S}^*(p+q)\left\langle \dot{N}_m(p)e^{j\tau_m p} \right\rangle_M + \\
& + \dot{S}(p)\left\langle \dot{N}_m(q)\dot{N}_m^*(p+q)e^{-j\tau_m p} \right\rangle_M + \\
& + \dot{S}(q)\left\langle \dot{N}_m(p)\dot{N}_m^*(p+q)e^{-j\tau_m q} \right\rangle_M + \\
& + \dot{S}^*(p+q)\left\langle \dot{N}_m(p)\dot{N}_m(q)e^{j\tau_m(p+q)} \right\rangle_M + \\
& + \left\langle \dot{N}_m(p)\dot{N}_m(q)\dot{N}_m^*(p+q) \right\rangle_M = \\
& = \dot{B}_s(p, q) + \dot{B}_{err}(p, q),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\dot{N}_m(p) = \sum_{i=0}^{I-1} n_m(i) e^{-j \frac{2\pi i p}{I}}$ – ДПФ m -й реализации шума;

$\dot{B}_s(p, q) = \dot{S}(p)\dot{S}(q)\dot{S}^*(p+q)$, $\dot{B}_{err}(p, q)$ – биспектр сигнала и компонента искажений оценки биспектра соответственно; $\dot{S}(p)$ – комплексный Фурье спектр исходного сигнала $s(i)$.

Анализ выражения (5) позволяет отметить следующее:

– компонента искажений оценки биспектра $\dot{B}_{err}(p, q)$ определяется суммой последних семи членов в (5);

– первые три члена, определяющие функцию $\dot{B}_{err}(p, q)$, асимптотически (т.е. при $M \rightarrow \infty$) стремятся к нулю, если АБГШ $n_m(i)$ в уравнении наблюдения (1) имеет нулевое среднее значение;

– последний член в формуле (5) – статистика третьего порядка, соответствующая асимметрии АБГШ с симметричной функцией плотности вероятности, также асимптотически стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$;

– пятый, шестой и седьмой члены суммы (5) являются мультипликативно зависимыми от комплексного Фурье спектра сигнала $\dot{S}(p)$.

По утверждению авторов статьи [3], даже если среднее значение сигнала $s(i)$ отличается от нуля,

можно получить несмещенную оценку биспектра при исключении отсчетов биспектра, лежащих на осях и диагонали в биспектральной плоскости:

$$p = 0 \text{ или } q = 0 \text{ или } p + q = 0. \tag{6}$$

Данное утверждение справедливо, с нашей точки зрения, только для больших входных отношений сигнал/шум и бесконечно больших ($M \rightarrow \infty$) объемах выборки. Поэтому представляет определенный практический интерес проверка выше отмеченной гипотезы с помощью количественного анализа влияния отсчетов, принадлежащих (6), на точность оценок биспектральной плотности (5) для сигналов различной формы и разного уровня АБГШ.

Для исследования точности оценки биспектра воспользуемся среднеквадратической мерой, которую определим суммой дисперсии оценки вещественной и мнимой частей двумерной комплексной функции $\dot{B}_{err}(p, q)$.

Дисперсию $\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q)$ оценки биспектра (5) определим с помощью суммы дисперсии оценки вещественной $\hat{\sigma}_{\text{Re}}^2(p, q)$ и мнимой $\hat{\sigma}_{\text{Im}}^2(p, q)$ частей и запишем как

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q) = & \hat{\sigma}_{\text{Re}}^2(p, q) + \hat{\sigma}_{\text{Im}}^2(p, q) = \\
& + \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M \left\{ \text{Re}[\dot{B}_{err}(p, q)] - \text{Re} \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \dot{B}_{err}(p, q) \right] \right\}^2 + \\
& + \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M \left\{ \text{Im}[\dot{B}_{err}(p, q)] - \text{Im} \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \dot{B}_{err}(p, q) \right] \right\}^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

При подстановке $\dot{B}_{err}(p, q)$ из (5) в (7) каждое из двух слагаемых в последней формуле будет содержать сумму из 55 членов. Поэтому количественный анализ точности оценки биспектра проводился компьютерным моделированием.

Результаты моделирования

Исследование точности оценки биспектра было выполнено как для одиночных импульсных сигналов $s(i)$ различной формы, так и для последователь-

ностей импульсов. При этом варьировались величины случайного временного сдвига сигнала τ_m и СКО σ_n АБГШ на входе системы восстановления.

Для количественной оценки интегральной величины дисперсии (7) было введено понятие полной суммарной дисперсии (ПСД), которая определялась в виде двойной суммы отсчетов

$$\hat{\sigma}_{ПСД}^2 = \sum_p \sum_q \hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q), \quad (8)$$

и рассчитывалась в главной треугольной области симметрии биспектра [1], ограниченной условиями:

$$0 \leq p \leq q \leq I/2; \quad p + q \leq I/2. \quad (9)$$

С целью анализа влияния на точность оценки биспектра отсчетов, лежащих на осях и диагоналях (6), наряду с расчетами ПСД вида (8) рассчитывалась также усеченная суммарная дисперсия (УСД). Последняя величина определялась в виде двойной суммы (8), из которой были исключены отсчеты, принадлежащие осям и диагоналям (6).

Вначале для различных объемов выборки M анализировалось поведение трехмерной функции (7) для сигналов различной формы при разных величинах СКО шума. Статистическая устойчивость функции $\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q)$ наблюдалась, начиная с объема выборки, равного $M = 50$. На рис. 1 представлен характерный пример поведения дисперсии оценки биспектра $\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q)$ вида (7), рассчитанной для тестового сигнала $s(i)$ в виде одиночного импульса прямоугольной формы единичной амплитуды, длительности $T = 10$ отсчетов, СКО АБГШ, равного $\sigma_n = 0,25$, и $M = 100$. График функции $\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q)$ (полный размер сетки отсчетов был выбран равным $I \times I = 64 \times 64$) построен только в пределах главной треугольной области симметрии, определенной условием (9).

Анализ распределения дисперсии $\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q)$ в частотном пространстве (p, q) позволяет отметить, что основной вклад в ее величину вносят сигнално зависимые пятый, шестой и седьмой члены суммы

(5). Также хорошо видно, что вклад отсчетов, принадлежащих диагоналям $(p = q)$ и отсчетов, лежащих на частотной оси $q = 0$, значительно меньше по сравнению с сигнално зависимыми членами. Поэтому основная доля дисперсии $\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q)$ сосредоточена вблизи нулевых и низких частот p и q , так как характер поведения дисперсии в данной частотной области соответствует поведению амплитудного Фурье спектра тестового сигнала $S(p) = Tsinc(2\pi pT/I)$.

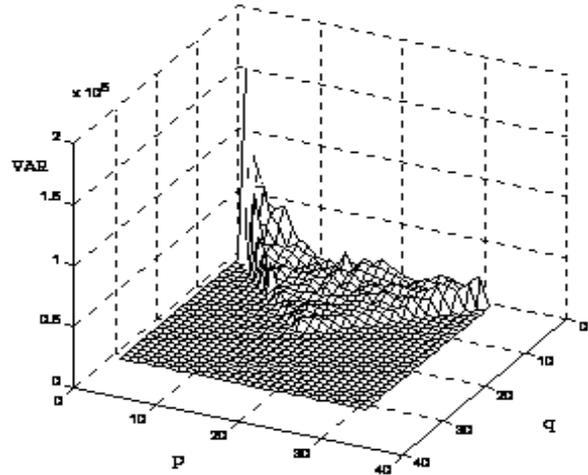


Рис. 1. Дисперсия оценки биспектра $\hat{\sigma}_{\Sigma}^2(p, q)$

Отметим также, что поскольку основная доля энергии сигналной спектральной функции $Tsinc(2\pi pT/I)$ сосредоточена в пределах интервала $[-1/T, 1/T]$, то отношение сигнал/шум в рассматриваемой области вблизи нулевых частот максимально, и поэтому вклад шума, соответствующий пятому, шестому и седьмому членам суммы (5), не приводит к заметной флюктуационной ошибке в восстанавливаемом сигнале при большом отношении сигнал/шум, что подтверждают результаты исследований, полученные в работе [9]. Были проведены также исследования точности оценки биспектра в зависимости от СКО АБГШ при вариациях длительности сигналов различной формы. Характерный пример зависимостей ПСД оценки биспектра одиночного импульса единичной амплитуды прямоугольной формы и его различной длительности T от СКО АБГШ, полученных на выборке из $M = 100$ реал-

лизаций, представлений на рис. 2, где отчетливо видно увеличение ПСД с ростом длительность импульса T .

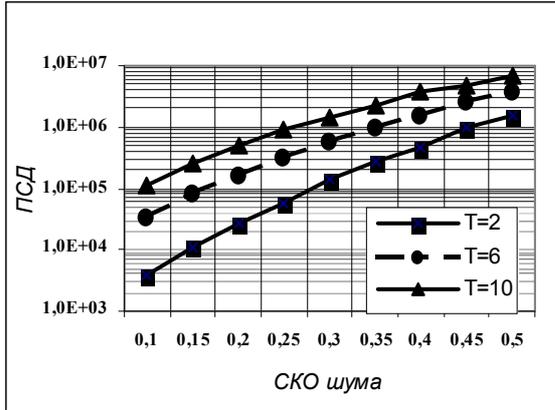
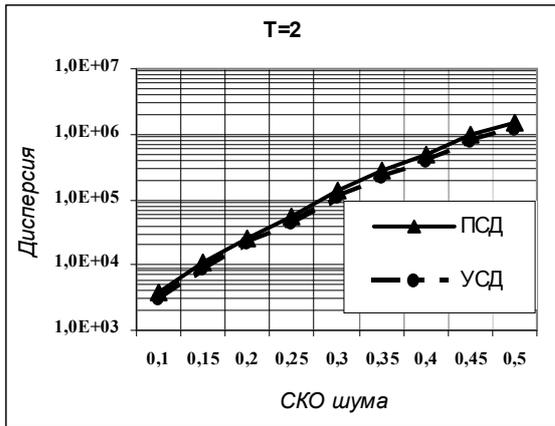
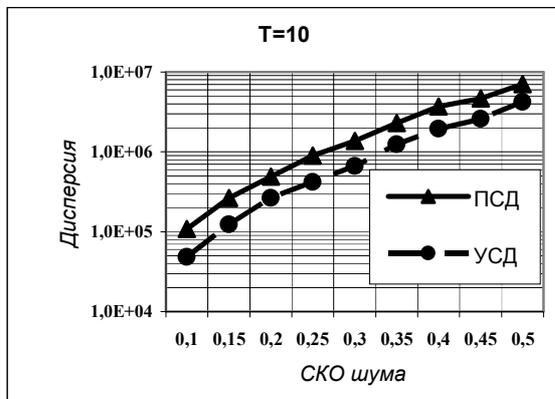


Рис. 2. Зависимости ПСД оценки биспектра от СКО АБГШ

На рис. 3, а, б приведены зависимости ПСД и УСД оценки биспектра от СКО АБГШ для импульса прямоугольной формы длительности $T = 2$ и $T = 10$ отсчетов соответственно.



а



б

Рис. 3. Зависимости ПСД и УСД оценки биспектра от СКО АБГШ: а – $T = 2$; б – $T = 10$

Видно, что для короткого импульса ($T = 2$, рис. 3, а) разница между величиной ПСД и УСД незначительна, однако с ростом длительности импульса разница между ПСД и УСД оценки биспектра заметно возрастает (рис. 3, б).

Величины нормированных ПСД и УСД, рассчитанные для последовательности из трех импульсов прямоугольной формы при максимальной девиации случайных сдвигов, равной $\tau_{max} = 10$ отсчетов, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Данные для последовательности трех импульсов прямоугольной формы ($\tau_m = 10$ отсчетов)

ПСД/ ПСД _м	Т	СКО АБГШ				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
4	4	0,007	0,034	0,126	0,357	1,0
	12	0,02	0,094	0,217	0,504	1,0
	20	0,025	0,11	0,25	0,502	1,0
УСД/ УСД _м	4	0,004	0,021	0,081	0,243	0,716
	12	0,004	0,02	0,049	0,136	0,312
	20	0,001	0,005	0,013	0,039	0,081

Отметим, что случайный сдвиг τ_m (члены со второго по шестой в формуле (5)) не влияет на величину ПСД и УСД.

Результаты расчетов нормированной ПСД оценки биспектра для одиночных импульсов различной формы, но одинаковой площади, а также для последовательности из трех импульсов сведены в табл. 2 и 3 соответственно.

Таблица 2

Нормированная ПСД оценки биспектра: одиночный импульс различной формы

СКО АБГШ	Прямоугольная	Треугольная	Гауссова
0,1	0,009	0,005	0,006
0,2	0,045	0,029	0,0307
0,3	0,154	0,112	0,118
0,4	0,419	0,279	0,297
0,5	1,0	0,743	0,764

Анализ данных таблиц показывает, что величина ПСД зависит от формы рассматриваемого импульса, причем величина ПСД оценки биспектра су-

ществено уступает величинам ПСД импульсов треугольной и гауссовой формы.

Таблица 3

Нормированная ПСД оценки биспектра:
последовательность импульсов различной формы

СКО АБГШ	Прямо- угольная	Тре- угольная	Гауссова
0,1	0,025	0,014	0,015
0,2	0,109	0,064	0,070
0,3	0,260	0,147	0,173
0,4	0,608	0,342	0,370
0,5	1,0	0,679	0,703

Заключение

В рамках используемой модели аддитивной смеси вещественного детерминированного дискретного сигнала со случайными сдвигами во временной области и АБГШ получено выражение для дисперсии оценки биспектральной плотности исследуемого процесса. Методом численного моделирования проведено исследование точности измерения оценки биспектра для сигналов различной формы, наблюдаемых на фоне АБГШ разного уровня при вариациях случайного сдвига исходного сигнала. Показано, что основной вклад в дисперсию оценки биспектральной плотности вносят те члены, которые связаны с наличием компонент Фурье спектра сигнала. Сравнительный анализ результатов расчетов ПСД и УСД показывает, что величины ПСД зависят в первую очередь от формы и длительности сигнала и в меньшей мере зависят от исключения из обработки тех отсчетов оценки биспектра, которым соответствует максимум автокорреляции шума. Результаты исследования могут быть использованы в системах цифровой обработки сигналов для восстановления сигналов неизвестной формы с использованием алгоритмов биспектрального анализа.

Литература

1. Nikias C.L., Raghuvеer M.R. Bispectral estimation: A digital signal processing framework // Proc. IEEE. – 1987. – Vol. 75, №. 7. – P. 869 – 891.

2. Важинский В.Н., Тетерин В.В. Корреляционная функция третьего порядка и биспектр в задачах обработки сигналов // ОМП. – 1991. – № 4. – С. 4 – 14.

3. Sundaramoorthy G., Raghuvеer M.R., Dianat S.A. Bispectral reconstruction of signals in noise: Amplitude reconstruction issues // IEEE Transactions Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1990. – Vol. 38, №. 7. – P. 1297 – 1306.

4. Bartelt H., Lohmann A.W., Wirtzner B. Phase and amplitude recovery from bispectra // Applied Optics. – 1984. – Vol. 23. – P. 3121 – 3129.

5. Totsky A.V., Gorbunenko B.F. Investigations of the synthetic aperture radar images formed by processing of bispectral data // International Journal of Electronics and Communications. – 1999. – Vol. 53. – №. 3. – P. 146 – 150.

6. Totsky A.V., Kurbatov I.V., Lukin V.V., Egiazarian K.O., Astola J.T. Combined bispectrum-filtering techniques for radar output signal reconstruction in ATR applications // Proceedings of International Conference "Automatic Target Recognition XIII"; Ed. Firooz A. Sadjadi; Orlando (USA). – April 2003. – SPIE Vol. 5094. – P. 301 – 312.

7. Nakamura M. Waveform estimation from noisy signals with variable signal delay using bispectrum averaging // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. – 1993. – Vol. 40, №. 2. – P. 118 – 127.

8. Swami A., Giannakis G.B., Zhou G. Bibliography on higher-order statistics // Signal Processing (Elsevier). – 1997. – Vol. 60, №. 1. – P. 65 – 126.

9. Тоцкий А.В., Астола Я., Егиазарян К.О., Зеленский А.А., Курбатов И.В., Лукин В.В. Восстановление сигналов по оценкам биспектров в присутствии гауссовых и негауссовых помех // Успехи современной радиоэлектроники. – 2002. – № 11. – С. 44 – 58.

Поступила в редакцию 11.05.05

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Э.Н. Хомяков, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.