

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НУЛЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СИГНАЛА**

В работе предлагается алгоритм восстановления двумерного сигнала (изображения), основанный на использовании нулевых многообразий, и исследуется качество восстановленного изображения, предлагается способ ослабить требования к точности задания корней

**передача видеоизображений, восстановление двумерного сигнала, нулевое многообразие, дискретизация, многоуровневый порог, кодирование изображений, дискрет**

### **1. Постановка проблемы**

Задача восстановления двумерных сигналов (изображений) по частичной информации при наложенных ограничениях в течение многих последних лет принадлежит к области активных исследований.

### **2. Анализ известных достижений**

Полученные в последнее время теоретические и практические результаты свидетельствуют о том, что характеристики восстановления двумерных сигналов по точкам (отсчетам) пересечения нескольких уровней (порогов) занимают промежуточное положение между характеристиками дискретизации по Котельникову и методом пересечения нулевого уровня [1], который можно отнести к стратегии неявной дискретизации. Под пересечением нулевого уровня сигнала в [1] подразумевается значение независимой переменной при которой сигнал обращается в вещественный нуль. Для изображений точки пересечения порога образуют некоторую траекторию на вещественной плоскости задания изображения. При использовании этих результатов отсчеты на пересечении линий дискретизации с контурами прохождения уровня распределены неравномерно. Главный недостаток этой стратегии заключается в том, что при небольшом числе порогов нет гарантии получения необходимого числа пересечений линий дискретизации с контуром прохождения уровня, а

положения точек пересечений должны быть известны практически с высокой точностью. С увеличением пороговых уровней точность задания точек пересечения уменьшается, а точность задания значений порогов возрастает. Предлагаем подходы к проблеме восстановления по многопороговым пересечениям. Проведены исследования требований к квантованию положения и амплитуды и восстановления функций числа порогов, что важно в вопросах кодирования и компрессии двумерных сигналов. Однако результаты работы в ряде случаев носят скорее предварительный характер, а большинство выводов являются в определенной степени ориентировочными и могут использоваться как отправной пункт для дальнейших исследований в области представления многомерных сигналов и кодирования изображений.

### **3. Цель работы**

Целью настоящей работы является дальнейшее исследование сформулированной задачи в случае, когда двумерные сигналы представляются нулевыми многообразиями, заданными на плоскости комплексной переменной [2,4].

### **4. Основной материал**

Двумерный дискретный пространственно-ограниченный сигнал (изображение) можно представить в виде:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} \delta(x - md, y - nd), \quad (1)$$

где  $d$  – шаг дискретизации в плоскости сигнала по координатам  $x, y$  (шаги дискретизации по  $x$  и  $y$  могут в общем случае не совпадать);

$m, n$  – номера дискретов по  $x$  и  $y$ ;

$\delta(x, y)$  – двумерная дельта-функция;

$a_{m,n}$  – вещественная величина сигнала для дискрета  $(m, n)$ ;

$M, N$  – правые границы области, где сигнал отличен от нуля.

Левые границы указанной области приняты равными нулю. Преобразование Фурье дискретного сигнала равно:

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} \exp[-i(umd + vnd)]. \quad (2)$$

Введем двумерное  $Z$ -преобразование, обозначив

$$z_1 = \exp(-iud); \quad (3)$$

$$z_2 = \exp(-ivd). \quad (4)$$

Тогда  $Z$ -преобразование имеет вид:

$$\begin{aligned} Z_{z_1}(z_2) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} z_1^m z_2^n = \sum_{m=0}^{M-1} a_m(z_1) z_2^m, \\ Z_{z_2}(z_1) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_{m,n} z_2^m z_1^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z_2) z_1^n, \end{aligned} \quad (5)$$

ГДЕ  $a_m(z_1) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} z_1^n$ ,  $a_n(z_2) = \sum_{m=0}^{M-1} a_{m,n} z_2^m$ .

Таким образом,  $Z$ -преобразование пространственно-ограниченного двумерного дискретного сиг-

$$H = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & x_1 & \dots & x_1^{M-1} & y_1 & x_1 y_1 & \dots & x_1^{M-1} y_1 & \dots & x_1^{M-1} y_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{M-1} & y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_2^{M-1} y_2 & \dots & x_2^{M-1} y_2^{N-1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_{MN-1} & \dots & x_{MN-1}^{M-1} & y_{MN-1} & x_{MN-1} y_{MN-1} & \dots & x_{MN-1}^{M-1} y_{MN-1} & \dots & x_{MN-1}^{M-1} y_{MN-1}^{N-1} \end{array} \right\| \quad (9)$$

Результатом решения системы линейных уравнений является вектор (8).

нала является многочленом двух переменных  $z_1$  и  $z_2$  над полем комплексных переменных. Учтем, что каждому из выражений (5) соответствуют алгебраические кривые  $\{x_{k1}(z_1)\}_{k=1}^M, \{x_{k2}(z_2)\}_{k=1}^N$  (нулевые траектории на плоскости комплексного переменного) с уравнениями

$$\begin{aligned} Z_{z_1}(z_2) = Z(z_1, x_{k1}(z_2)) &= 0, \\ Z_{z_2}(z_1) = Z(z_2, x_{k2}(z_1)) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где каждая конкретная точка  $(z_1, z_2)$  может быть определена при задании фиксированного значения  $z_1$ .

Можно показать, что знание нулей позволяет найти величину сигнала для дискрета (пиксела) из уравнения. Для восстановления сигнала достаточно знать  $(MN-1)$  любых точек одной из нулевых траекторий. В этом случае многочлену (5) соответствует система однородных линейных уравнений относительно коэффициентов  $a_{m,n}$ :

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} z_1^m z_2^n = 0; \quad i=1, 2, \dots, M, N-1 \quad (7)$$

Примем для наглядности, что  $x_k = z_1, y_k = z_2$ , где  $k=1..MN-1$ . Если вектор неизвестных равен

$$\left| a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0(M-1)}, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1(M-1)}, \dots, a_{(N-1)(M-1)} \right|, \quad (8)$$

то матрица системы составляется следующим образом:

Восстановление изображения, основанное на решении уравнения (8), проявляет высокую чувст-



дискретов изображения в  $m$ -й строке или  $n$ -м столбце.

При практической реализации этого подхода можно ожидать высокую чувствительность вычисления коэффициентов  $a_{m(n)}(i)$  к точности задания элементов нулевых траекторий при больших значениях индексов  $m(n)$ .

Поэтому была рассмотрена процедура построчного восстановления изображения по набору значений коэффициента полинома  $a_{1(1)}(i)$ , рассчитанного согласно выражению (12) для  $i \geq 0, 1, \dots, M$ . В этом случае ошибки задания значений корней линейно связаны с ошибками в определении коэффициентов  $a_{1(1)}(i)$ , а следовательно, и с восстановленными дискретами в соответствующей строке (столбце) изображения. Малые ошибки в этом случае приводят к малым ошибкам при восстановлении изображения. Циклической перестановкой строк (столбцов) изображения и повторным применением выше описанной процедуры восстанавливается исходное изображение

Для совместного восстановления первой и второй строки (столбца) изображения наряду с определением коэффициентов  $a_{1(1)}(i)$  необходимо определить коэффициенты  $a_{2(2)}(i)$ . Однако ошибки их определения будут накапливаться не линейно. В результате по мере включения в обработку новых строк (столбцов) и наращивания их длин качество совместного восстановления может стать неприемлемым.

Анализ показывает, что не все корни информационно эквивалентны. Следует ожидать, что корни (нулевые траектории) с большими модулями будут вносить определяющий вклад в качество восстановления изображения. Это обстоятельство делает возможным для определения коэффициентов  $a_{2(2)}(i)$  в выражении (12) ограничиваться меньшим числом

корней (нулевых траекторий) чем это требуется согласно теоремы Виета.

С целью проверки этой гипотезы было проведено математическое моделирование предложенного алгоритма восстановления изображения и исследовано качество восстановления (среднеквадратическая ошибка (СКО)) от числа используемых нулевых траекторий, включаемых в алгоритм, точности задания элементов нулевых траекторий и числа точек на каждой из них.

При моделировании рассматривался фрагмент изображения в градациях серого размером  $30 \times 30$  пикселей (рис.1). Качество восстановленного изображения определялось величиной СКО:

$$СКО = \frac{1}{N^2} \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (a_{i,j} - \hat{a}_{i,j})^2}, \quad (13)$$

где  $a_{i,j}$  и  $\hat{a}_{i,j}$  относятся к значениям дискрета изображения исходного и восстановленного соответственно.

Анализ зависимостей СКО от параметров восстановления, представленных в табл. 1, показывает, что точность задания корней, образующих нулевые траектории, определяемая учетом необходимого числа значащих цифр после запятой, практически не влияет на качество восстанавливаемого изображения (рис. 1а).

Таким образом, подтвердилось предположение о том, что значение СКО проявляет большую чувствительность к числу используемых корней, чем к числу значащих цифр (ошибок округления) их определяющих (рис. 2). Как видно из графика, представленного на этом рисунке, основное влияние на СКО оказывают две траектории корней, обладающие наибольшими значениями модулей. Остальные траектории вносят несущественный вклад в суммарный результат. Рис. 1б демонстрирует результат восстановления по одной траектории корней с максимальными модулем и точностью задания её элементов (табл. 1).

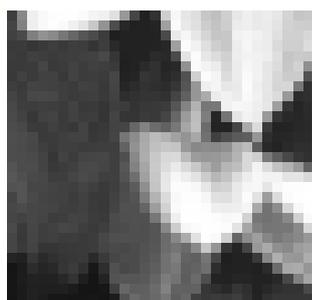


рис. 1

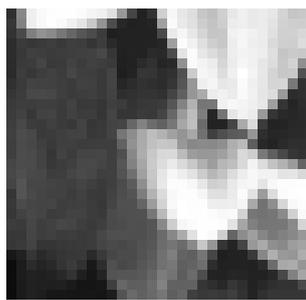


рис. 1а

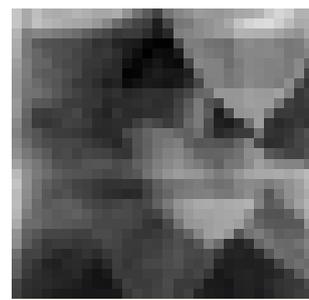


рис. 1б

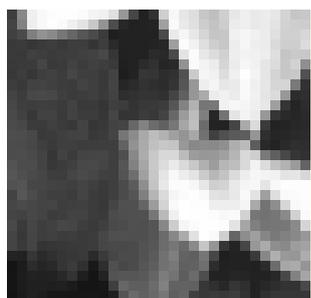


рис. 1г

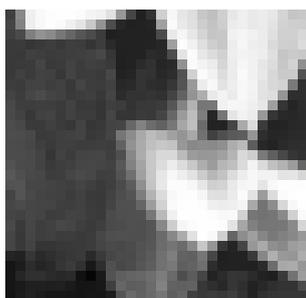


рис. 1д

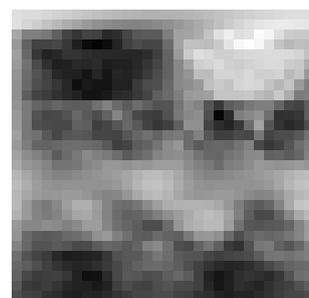


рис. 1в

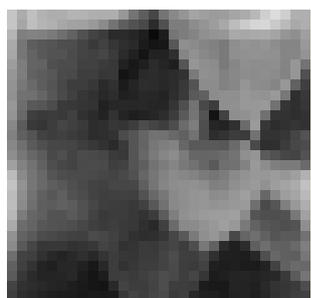


рис. 1ж

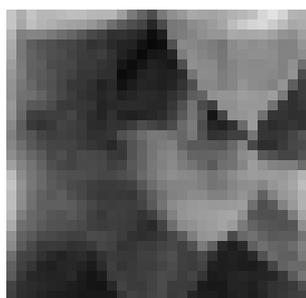


рис. 1з

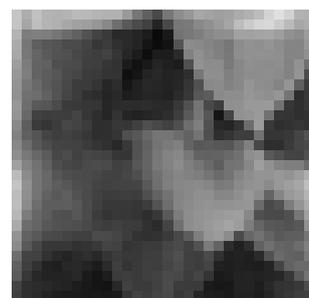


рис. 1е

Рис. 1. Результаты восстановления изображений

Таблица 1

Зависимость СКО от параметров восстановления

Параметры восстановления	Номер рисунка							
	1а	1б	1в	1г	1д	1е	1ж	1з
Число используемых нулевых траекторий, включаемых в обработку	20	1	2	2	1	1	1	1
Точность задания элементов нулевых траекторий (число учитываемых знаков после запятой)	0	30	0	0	30	30	30	30
Число точек на нулевой траектории	225	225	225	30	30	400	600	800
СКО	0.085	1.843	0.03	0.072	1.765	1.815	1.825	1.834

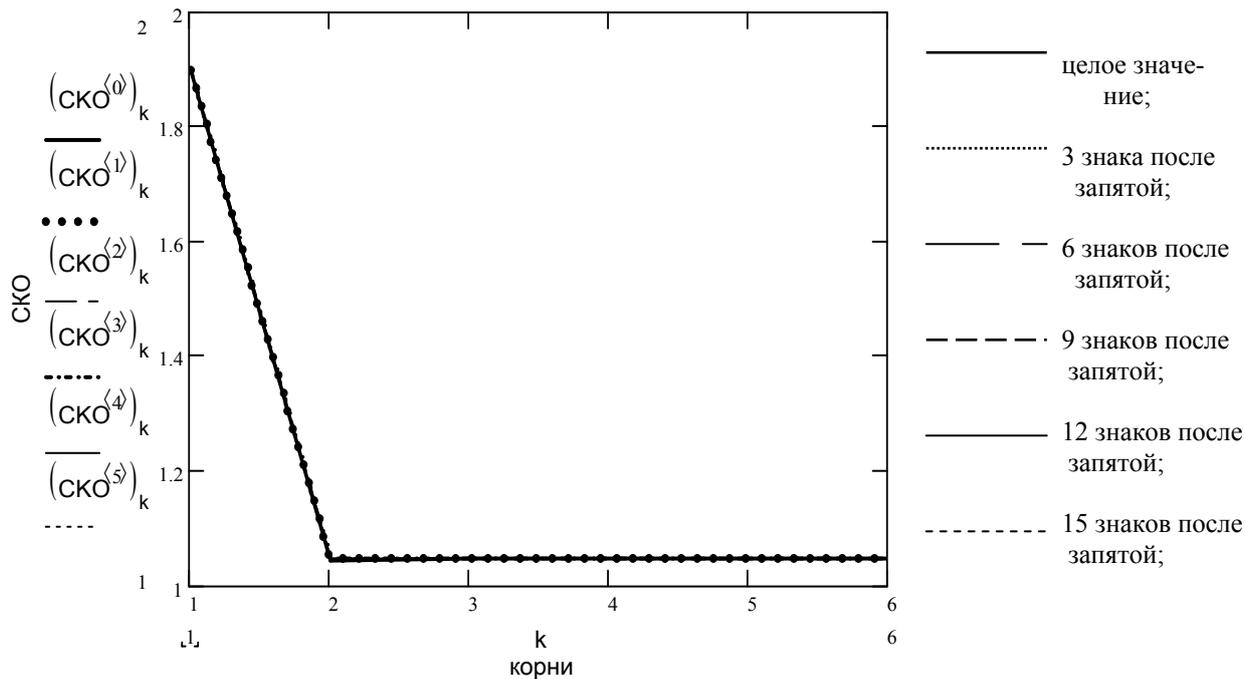


Рис. 2: Зависимость значения SKO от количества используемых корней  $k$  при различных значениях точности задания элементов нулевых траекторий

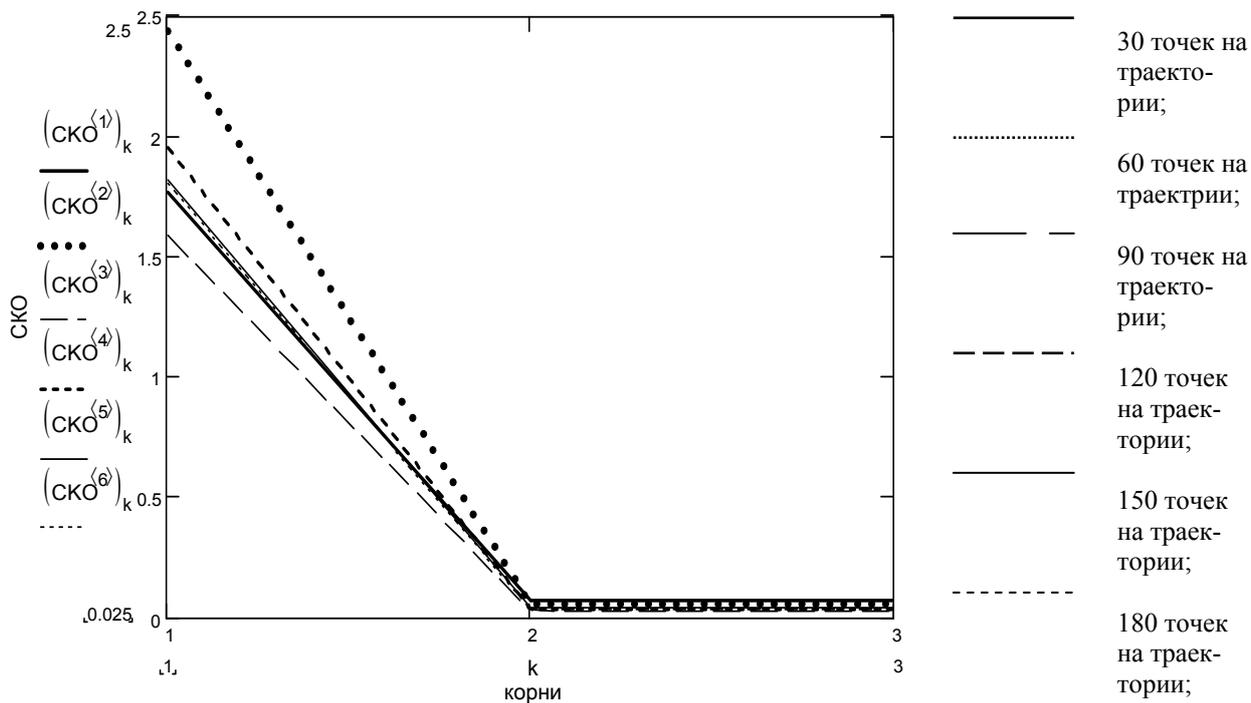


Рис. 3. Зависимость значения SKO от количества используемых корней  $k$  при изменении числа используемых точек на нулевых траекториях

Однако качество восстановленного изображения оказывается неудовлетворительным. В то же время использование двух траекторий корней, обладающих наибольшими значениями модулей, приводит к хорошему качеству восстановления (рис. 1в, табл. 1) уже при использовании 30 точек на нулевой траектории (рис. 1г, табл. 1). Зависимость СКО от числа используемых точек на траектории представлена на рис. 3. Видно, что и в этом случае наибольший вклад в точность восстановления вносят две траектории с максимальными модулями.

Увеличение числа точек на траектории заметно улучшает качество восстанавливаемого изображения (рис. 1д-з, табл. 1). Причем использование только одной нулевой траектории с максимальным модулем, делает изображение хорошо узнаваемым. При этом значение СКО продолжает оставаться довольно высоким (табл. 1). Это обстоятельство свидетельствует о недостаточной эффективности использования критерия СКО при визуальной оценке качества восстанавливаемого изображения.

### Выводы

Полученные в работе результаты развивают подход к восстановлению многомерных сигналов по пересечениям многоуровневых порогов. Рассматривается задача восстановления в которой исходными данными для её решения является набор нулевых многообразий определенных на плоскости комплексной переменной. Установлено, что при фиксированном числе точек на нулевых траекториях и точности их задания приемлемое качество восстановления изображения дости-

гается уже при двух нулевых траекториях имеющих наибольшие модули.

Дальнейшее увеличение числа траекторий даже при наименьшей точности задания положения точек на траектории практически на качество восстанавливаемого изображения не влияет. Следует ожидать, что существует такое минимальное число, определенное в битах, зависящее от соотношения числа траекторий и их элементов, а также точности их задания, которое обеспечивает восстановление изображения с заданным качеством.

### Литература

1. А. Захор, А.В. Оппенхайм. Восстановление двумерных сигналов по пересечениям уровней. // ТИИЭР, т. 78, № 1, С.35-62.
2. В.П. Бакалов. Неитерационный алгоритм восстановления двумерных дискретных сигналов по автокорреляционной функции. // Радиотехника и электроника. 1985 г., вып.8.
3. В.П. Бакалов, Ю.Ю. Мартюшев. Регуляризация алгоритма восстановления двумерных сигналов по автокорреляционной функции. // Радиотехника и электроника. 1987 г., вып.6.
4. Richard G. Lane, W. Richard Fright and Richard H.T. Bates. Direct phase retrieval // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP- 35, no. 4, April 1987.

*Поступила в редакцию 06.10.03*

**Рецензент:** д-р техн. наук, профессор Варгания В.М., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков