

Подходы к решению задач маршрутизации

*Харьковский национальный автомобильно – дорожный университет
Житомирский государственный технологический университет*

Показано, что задачи оптимизации замкнутых маршрутов (задачи маршрутизации), являясь важной частью транспортной логистики, занимают при поддержке современными информационными технологиями ключевые позиции в управлении процессами перемещения грузов и пассажиров. Основу задач эффективной организации транспортных работ составляет классическая задача маршрутизации – VRP, связанная с NP-трудной проблемой коммивояжера и дополненная реальными условиями перевозочного процесса.

Ключевые слова: транспортная логистика, задача маршрутизации, задача коммивояжера, алгоритм, стоимость маршрута.

Оптимизационные задачи транспортной логистики не поддаются эффективному решению. В ключевой задаче маршрутизации (VRP – Vehicle Routing Problem), сформулированной Данцигом и Рамсером [1], искомая система маршрутов является комбинацией допустимых решений задачи «об упаковке в контейнеры» и задачи коммивояжера (ЗК), принадлежащих классу NP-полных проблем. Чтобы найти оптимальное решение VRP, нужно для каждого распределения груза по K транспортных средств (ТС) решить ЗК. Вместе с тем при фиксированном K значения S , $d_i, i = \overline{1, n}$ могут быть такими, что заданного количества ТС окажется недостаточным для выполнения плана перевозок. Иначе говоря, VRP не всегда разрешима. Её точное решение достигается путем перебора, вызывающего с ростом размера входных данных экспоненциальный рост временных затрат.

Современный уровень развития компьютерной математики характеризуется разнообразием приближенных и эвристических методов комбинаторной оптимизации для приемлемого по времени решения логистических задач реальной размерности [2, 3, 4]. Алгоритмы, построенные на естественном представлении VRP в виде задачи упаковки и следующих за ней K ЗК, относятся к эвристическим. Они выполняются в два этапа.

В таких алгоритмах на первом этапе все пункты потребления разбиваются на k групп, не нарушающих ограничение по вместимости ТС, а на втором находится решение ЗК. Первый этап заключается в нахождении числа K ТС, для которого выполняется достаточное условие существования допустимого решения VRP. В задаче об упаковке величина K при заданных значениях $d_i, i = \overline{1, n}$, S является верхней оценкой минимального числа K^* ТС. В прилагаемой здесь схеме решения VRP эта оценка находится в результате выполнения одного из приближенных алгоритмов распределения грузов по контейнерам, рассмотренных в [5].

Можно считать, что $S=1, 0 < d_i \leq 1, L = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ – последовательность, в которой вес d_1 загружается первым, а вес d_k загружается раньше, чем d_{k+1} , для всех $k = \overline{2, n-1}$.

Пусть контейнеры загружаются одним из двух алгоритмов FF (first-fit) или BF

(best-fit).

Алгоритм FF (first-fit) определяет каждый вес d_k в контейнер с минимальным номером из числа тех, которые подходят для размещения d_k .

Алгоритм BF (best-fit) помещает каждый вес d_k в такой контейнер, который после размещения в нем d_k будет иметь наименьшую неиспользованную грузоподъемность.

Доказано [6], что для любой последовательности L и алгоритмов FF и BF справедлива оценка

$$K \leq (17/10)K^* + 2. \quad (1)$$

Величина K никогда не отличается от оптимума K^* более чем на 70%. Можно попытаться уменьшить K , применив алгоритм FF или BF к последовательности L , которая упорядочена по неубыванию весов d_k . В этом случае

$$K \leq (11/9)K^* + 4. \quad (2)$$

Такая же оценка справедлива для алгоритма FF или BF с входной последовательностью грузов, упорядоченной по невозрастанию весов. Нетрудно заметить, что с ростом n оценка (1) растет быстрее, чем оценка (2).

Очевидно, VRP эффективно разрешима, когда $d_k > 1/3$, $k = \overline{1, n}$. В этом случае она приобретает формулировку 2-VRP и, следовательно, сводится к задаче о взвешенном паросочетании (ЗВП) для произвольного графа с $n + 1$ вершинами.

Приближенные алгоритмы упаковки выделяют допустимые множества вершин $M \subset N$, т.е. такие, что $\sum_{j \in M} d_j \leq S$. Построение маршрута коммивояжера для каждого множества $M \cup \{0\}$ завершает поиск допустимого решения VRP. Чтобы найти точное решение VRP, недостаточно упаковать все грузы, используя минимальное число контейнеров, а затем найти столько же точных решений ЗК. На практике вполне удовлетворительными могут оказаться решения VRP, полученные в результате упаковки с оценкой (1) или (2) и K обращений к какому-либо приближенному алгоритму решения ЗК.

Широкое признание получили конструктивные методы решения VRP, разработанные на идее итерационного построения и объединения замкнутых маршрутов, не нарушая ограничений по вместимости ТС. К ним относится самый известный сегодня алгоритм Кларка – Райта, применяемый в большинстве коммерческих пакетов. Он состоит из следующих трёх шагов [6].

Шаг 1. Для каждого потребителя i , $i = \overline{1, n}$, формируется маятниковый маршрут $(0, i, 0)$.

Шаг 2. Для всех пар i и j вычисляются экономии $S_{ij} = d_{0i} + d_{j0} - d_{ij}$, которые упорядочиваются по невозрастанию в список S .

Шаг 3. Пары $(0, N_i, i, 0)$ и $(0, j, N_j, 0)$ из списка S объединяются в маршрут $(0, N_i, i, j, N_j, 0)$, если не нарушается условие загрузки ТС, $N_i \cap N_j = \emptyset$, $N_i, N_j \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}$, иначе выбирается следующая пара списка.

Одним из способов сокращения суммарной стоимости маршрута, построенного алгоритмом Кларка-Райта, является вычисление экономии по формуле $S_{ij} = d_{oi} + d_{jo} - \gamma d_{ij}$, $\gamma > 1$. Варьирование параметром γ позволяет найти несколько достаточно хороших решений VRP и выбрать из них наилучшее. Идеи алгоритма Кларка – Райта привели к появлению его модификаций, ориентированных как на сокращение неиспользованной грузоподъемности каждого ТС так и на минимизацию суммарного пробега. К таким модификациям относится широко известный «выметающий алгоритм», работающий на плоскости с заданной полярной системой координат и центром в базовом пункте. Пункты потребителей i , $i = \overline{1, n}$ включаются в маршрут одного ТС по мере увеличения угла в полярных координатах при выполнении ограничений на грузоподъемность. Далее определяется маршрут коммивояжера для каждого полученного подмножества пунктов [6].

Недавние результаты исследования VRP включают в себя разнообразные механизмы поиска и улучшения её допустимого решения. Для такого решения неизвестны аналитически выраженные оценки погрешности. Более того, далеко не просто оценить его точность на основе экспериментально полученных данных. Возможность применения алгоритмов решения VRP в приложениях обычно устанавливается следующим образом. Формируется серия задач с реальными на практике значениями параметров. После программной реализации каждого алгоритма для сформированной серии задач и анализа полученных решений выбирается алгоритм, определяющий наименьшие транспортные затраты в пределах заданного промежутка времени.

Важное значение в развитии методов управления логистическими системами имеет опыт решения задач маршрутизации путём погружения их в область целочисленного линейного программирования [1] или в область метаэвристик [2, 3]. Однако точное решение VRP и её обобщений достигается за ограниченное время только для небольших размерностей при использовании метода ветвей и границ в комбинации с алгоритмами отсечений, метода динамического программирования и метода Лагранжа [1, 6, 8]. Поэтому на практике широкое распространение получили эвристические алгоритмы, не гарантирующие нахождение оптимальных маршрутов задач класса VRP, но использующие разумные соображения для построения допустимых решений и дальнейшего их улучшения. Примером такого алгоритма является двухэтапный алгоритм, который находит вначале приближенное решение задачи упаковки, а затем обращается к точной или приближенной процедуре решения ЗК. Все известные эвристики VRP сложны для формального изучения, аналитически устанавливающего, насколько в худшем случае отличается от оптимального решения эвристическое решение. К полиномиальным алгоритмам классической VRP не удастся применить подход, который бы за счет отказа от поиска оптимального решения определял допустимое с гарантированной оценкой точности.

Более весомы результаты, посвященные анализу поведения полиномиальных алгоритмов NP-полной задачи k -VRP [9]. Для 3-VRP известен приближенный эффективный алгоритм, который находит решение с суммой длин маршрутов, ограниченной четырьмя минимальными суммами. Построен полиномиальный $(5/2 - 1/k)$ – приближенный алгоритм задачи Metric k -VRP, когда расстояния между базой и потребителями удовлетворяют евклидовой метрике.

Однако до сих пор нет публикаций, включающих описание полиномиального алгоритма с оценкой поведения в худшем случае для 4-VRP [9].

За последнее десятилетие получил развитие подход к решению задач класса VRP на случайных входных данных. Он допускает определенную долю числовых примеров задачи, которые либо нарушают ожидаемую оценку точности алгоритма, либо требуют на его выполнение экспоненциальных временных затрат.

Вероятностному анализу быстрых алгоритмов решения k -VRP посвящена работа [9].

Маршрут в k -VRP – это простой цикл, содержащий не более чем $k + 1$ вершин, включая базу 0, например $(0, i_1, i_2, \dots, i_k, 0)$, где $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \overline{1, k}$, или $(0, i, 0)$, $i \in V \setminus \{0\}$, V – множество вершин полного графа $|V| = n + 1$.

В матрице стоимостей этой задачи элементы главной диагонали равны ∞ , а остальные элементы являются независимыми случайными величинами с одинаковой плотностью распределения.

Алгоритмы задач на случайных входных данных характеризуются относительной погрешностью и вероятностью несрабатывания.

Для задачи на минимум $F_A(I)$, $F^*(I)$ обозначают значения целевого функционала на решении, полученном алгоритмом A для входа I , и на оптимальном решении для этого же входа соответственно.

В классе K_n задач размерности n на минимум алгоритм A имеет оценки $(\varepsilon_n, \sigma_n)$, если для каждого n выполнено неравенство

$$P_r\{F_A(I) > (1 + \varepsilon_n)F^*\} \leq \sigma_n,$$

где $P_r(\omega)$ – вероятность события ω , I – индивидуальная задача из K_n , ε_n – относительная погрешность, σ_n – вероятность несрабатывания алгоритма A .

Алгоритм A называется асимптотически точным в классе $K = \bigcup (K_n | n = 1, 2, \dots)$, если для него существуют такие оценки $(\varepsilon_n, \sigma_n)$, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $\sigma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для решения k -VRP в [9] предложен следующий алгоритм с временем работы $O(n^2)$.

Этап 1. Выбрать случайным образом $2m$ вершин из $\{1, 2, \dots, n\}$, $m = \lceil n / k \rceil$. Пусть выбранные вершины образуют множество $V' = \{1, 2, \dots, 2m\}$. Обозначим

$$V'' = \{1, 2, \dots, n\} \setminus V'.$$

Этап 2. Покрыть вершины графа m простыми циклами, пересекающимися только в базе.

2.1. Общий шаг $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Последовательно для каждого ТС i построить маршрут $(0, i_1, \dots, i_k)$.

2.1.1. В качестве i_1 берется произвольная вершина из V' (например, с наименьшим номером).

2.1.2. Вершины $i_2, \dots, i_{k-1}$, берутся из V'' и находятся по правилу

«ближайшего непройденного города», начиная с вершины $i_1 \in V'$.

2.1.3. Вершина $i_k \in V'$, отличная от i_1 , выбирается как ближайшая к вершине i_{k-1} .

2.1.4. Из V' удаляются вершины i_1 и i_k , а из V'' – вершины $i_2, \dots, i_{k-1}$.

2.1.5. Последний шаг $i = m$. Строится маршрут $(0, m_1, m_2, \dots, m_l, 0)$, $l = n - (m-1)k \leq k$, при этом вершины $m_1, m_l \in V'$ замыкают оставшиеся вершины из V'' в результате выполнения уже примененной эвристики.

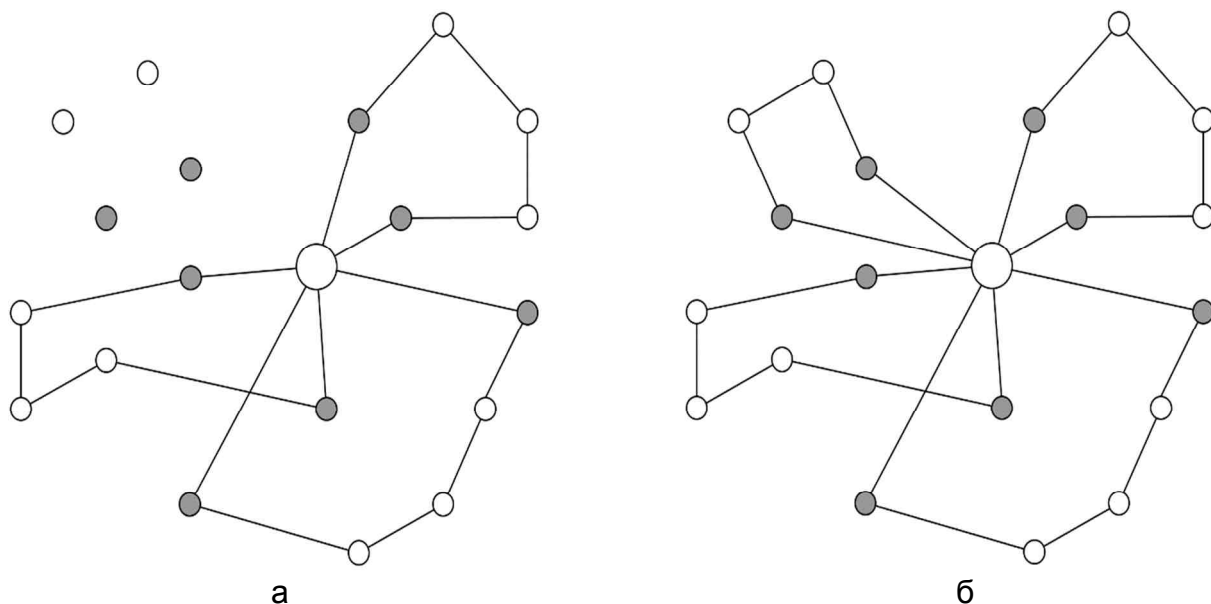


Рис 1. Маршруты, перед выполнением последнего шага и результат решения задачи

На рис. 1, а изображены маршруты, построенные алгоритмом перед выполнением последнего шага для 5-VRP с 19 потребителями, а на рис. 1, б представлен результат решения этой задачи.

Пусть входные данные алгоритма являются независимыми случайными величинами с усеченно-нормальной функцией плотности распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right), & \text{если } a_n \leq x < \infty; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и β_n – параметр распределения, равный σ_n .

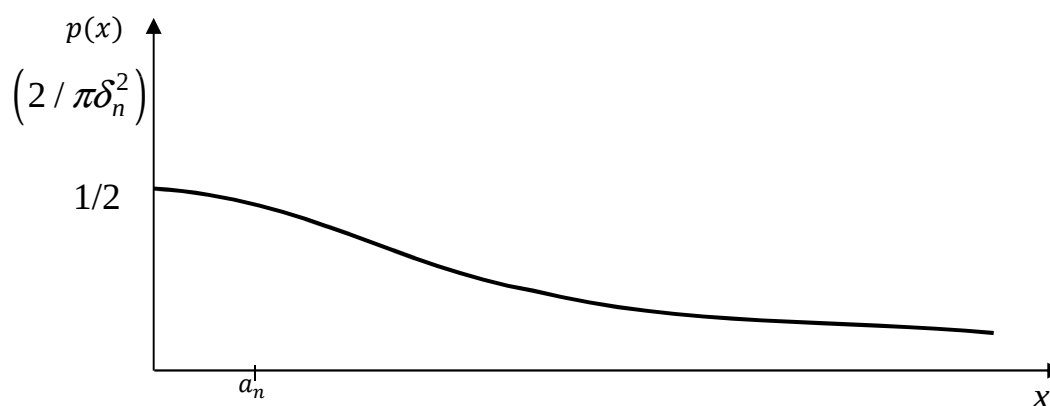


Рис. 2. Плотность усечено-нормального распределения

Анализ алгоритма в [9] устанавливает следующий результат. Решение k -VRP может быть получено с оценкой относительной погрешности $\varepsilon_n = O((b_n / a_n) / (n / \ln n))$ и вероятностью несрабатывания $\sigma_n = O(\exp(n / k) / n^2)$. Это решение является асимптотически точным, когда $\beta_n / a_n = O(n / \ln n)$, $k \geq 3n / (4 \ln n)$.

Список литературы

1. Бронштейн, Е.М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е. М. Бронштейн, Т. А. Зайко // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №10. – С. 133–147.
2. Гуляницкий, Л.Ф. Решение Н-методом задачи оптимизации маршрутов транспортных средств с временными окнами / Л.Ф. Гуляницкий, А.В. Самусь // Компьютерная математика. – 2012. – №2. – С. 147–155.
3. Гуляницкий, Л. Ф. Застосування Н-методу для розв'язання задач комбінаторної оптимізації на перестановках / Л. Ф. Гуляницкий, Д. А. Гобов // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 2. – С. 74–86.
4. Шаріфов, Ф.А. Оптимізація маршрутів повітряних суден, що виконують агроавіаційні роботи / Ф.А. Шаріфов, Г.М. Юн, Г.Ю. Кандиба // Наукові технології. – 2014. – №3 (23). – С.319–326.
5. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
6. Резер, С. М. Математические методы оптимального планирования в транспортных системах / С. М. Резер, С. Е. Ловецкий, И. И. Меламед. – М.: Итоги науки и техники, Серия Организация управления транспортом. – 1990. – 171 с.
7. Бронштейн Е.М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е. М. Бронштейн, Т. А. Зайко // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №10. – С. 133–147.
8. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
9. Гимади, Э. Х. Приближенные алгоритмы с оценками для задач маршрутизации на случайных входах с ограниченным числом клиентов в каждом

маршруте / Э. Х. Гимади, А. В. Шахшнейдер // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 126–139.

Підходи до вирішення задач маршрутизації

Показано, що задачі оптимізації замкнутих маршрутів (задачі маршрутизації), будучи важливою частиною транспортної логістики, займають за підтримки сучасними інформаційними технологіями ключові позиції в управлінні процесами переміщення вантажів і пасажирів. Основу задач ефективної організації транспортних робіт утворює класична задача маршрутизації - VRP, пов'язана з NP-важкою проблемою комівояжера і доповнена реальними умовами перевізного процесу.

Ключові слова: транспортна логістика, задача маршрутизації, задача комівояжера, алгоритм, вартість маршруту.

Approaches to Solving Routing Tasks

The report shows that closed routes optimization tasks (routing tasks) are an important part of transport logistics, with the support of modern information technologies, they occupy main positions in the management of the movement of goods and passengers. The classical routing task forms the basis of the tasks of efficient organization of transport operations (VRP), it related to the NP-difficult traveling salesman problem and supplemented by the actual conditions of the transportation process.

Key words: transport logistics, routing task, traveling salesman problem, algorithm, route cost.

Сведения об авторах:

Панишев Анатолий Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Программного обеспечения систем Житомирского государственного технологического университета.

Украина, 10005, г. Житомир, ул. Черняховского, 103

Морозов Андрей Васильевич – кандидат технических наук, доцент, председатель научно-методического совета факультета информационно – компьютерных технологий, член научно-методического совета и Ученого совета Житомирского государственного технологического университета.

Украина, 10005, г. Житомир, ул. Черняховского, 103

Маций Ольга Борисовна – ассистент кафедры Компьютерных технологий и мехатроники Харьковского национального автомобильно-дорожного университета.

Украина, 61002, г. Харьков, ул. Петровского, 25

olga.matsiy@gmail.com

0671039312