

Использование одномерных паттернов для выделения сигнала на фоне помех

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрена проблема рационального конструирования многоэлементных датчиков для определения местоположения точки минимума скалярного поля в условиях помех измерения. Предложено обобщение метода центрального сглаживания с помощью одномерных сеточных паттернов. Исследован метод получения многоточечных формул одномерного сглаживания, основанный на локальной весовой аппроксимации. Проведена серия вычислительных экспериментов с использованием соответствующих алгоритмов. Предложена и обоснована конструкция измерительного устройства, совмещающая две линейки, для применения в случае двумерного пространства аргументов.

Ключевые слова: весовая аппроксимация, матричный измерительный электрод, многоэлементный датчик, коэффициенты регрессионной зависимости.

Введение

Задача аппроксимации и поиска экстремумов скалярных полей является актуальной ввиду необходимости поиска положения особых точек таких полей для осуществления специальных операций внешнего воздействия. Примерами могут служить задачи поиска расположения точки для инъекций в медицине, точек минимального (или максимального) механического напряжения в оболочечных конструкциях, места оптимального расположения устройств звуковоспроизведения и т. п.. Такой поиск обычно осложняется наличием помех различного происхождения [1, 2, 3]. Для повышения эффективности обработки измерений в процессе поиска координат точек экстремума значения измеряемой величины предлагается использовать многоэлементный датчик. В этом случае измерительная система использует усреднение данных не только по времени, но и в пространстве. Достаточно обоснованным при решении задач такого типа является метод локальной весовой аппроксимации [4], согласно которому функцию $f(\vec{r})$ находят путём минимизации суммы взвешенных квадратов отклонений:

$$Q(\vec{r}, \vec{a}) = \sum_{i=0}^n (z_i - \Phi(\vec{r}_i))^2 \rho(\|\vec{r}_i - \vec{r}\|) \rightarrow \min_{\vec{a}}. \text{ Аппроксимирующая функция } \Phi(\vec{r})$$

является линейной комбинацией функций из некоторого базисного набора:

$\Phi(\vec{r}) = \vec{a}^T \vec{\Phi}(\vec{r} - \vec{r}_0)$. В работах [1, 2] рассмотрен случай квадратичного базиса и «колоколообразных» весовых функций $\rho(t)$, причём наборы узлов составляли сеточные паттерны. Это позволило оценивать не только аппроксимируемую функцию, но и её производные в выделенной точке паттерна \vec{r}_0 . В многомерном случае увеличение диаметра паттерна связано с резким увеличением количества узловых точек, а значит, и с существенным увеличением количества арифметических операций.

Целью настоящей работы является обоснование метода поиска экстремума функции в условиях помех при комбинированном использовании двух одномерных многоэлементных датчиков при различных уровнях зашумленности с общей выделенной центральной точкой измерения.

1. Одномерные сеточные паттерны

Пусть в качестве паттерна рассматривается набор целочисленных узлов $x_i \equiv i = -n, -n+1, \dots, n-1, n$, а выделенной точкой является начало координат. Ограничимся базисом, который состоит только из чётных степеней скалярного аргумента. Аппроксимирующая функция в таком случае представлена полиномом степени $2m$:

$$f(x) \approx \Phi(x) = P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^{2k}. \quad (1)$$

Среди возможных видов весовых функций выберем следующий:

$$\rho_0 = \gamma, \rho_{\pm i} = 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Применим метод наименьших квадратов (МНК) к сумме квадратов отклонений: $Q(\vec{a}) = \sum_{i=-n}^n (P_m(i) - y_i)^2 \rho_i \Rightarrow \min_{\vec{a}}$. Нормальная система уравнений МНК имеет следующий вид:

$$K\vec{a} = \vec{b}, \quad (3)$$

$$\text{где } K_{kl} = K_{lk} = \sum_{i=-n}^n i^{2(l+k)} \rho_i;$$

$$b_k = \sum_{i=-n}^n y_i i^{2k} \rho_i;$$

$(\vec{y})_i = y_i, i = -n \dots n$ – узловые значения исходной функции;

$$\vec{a} = K^{-1} \vec{b}.$$

Решение можно представить с помощью матрицы-резольвенты R :

$$\vec{a} = R \vec{y}, \quad (4)$$

$$\text{где } R_{ki} = \rho_i \sum_{l=0}^m (K^{-1})_{kl} i^{2l}.$$

В частности, $a_0 = \sum_{i=-n}^n R_{0i} y_i$. Но тогда результат аппроксимации в выделенной центральной точке может быть получен в виде авторегрессионной формулы центрального сглаживания:

$$f(0) \approx \Phi(0) \equiv \tilde{y}_0 = a_0 = \sum_{i=-n}^n c_i y_i, \quad (5)$$

где $c_i = R_{0i} = \rho_i \sum_{l=0}^m (K^{-1})_{0l} i^{2l}$ – коэффициенты авторегрессионной формулы.

Если использовать все целые степени аргумента в качестве базиса, а не только чётные, то результат был бы тот же, что и в формуле (5). Это связано с выбором конструкции паттерна в виде конфигурации узлов, симметричной относительно выделенного центрального узла, в результате чего для нечётных степеней формула аппроксимации оказывается автоматически точной.

2. Начальные степени аппроксимирующего многочлена

Для практического использования метода локальной аппроксимации обычно применяются сглаживающие формулы, точные для многочленов начальных степеней, т. е. для $m = 0, 2, 4$. Введём в рассмотрение величины $T_n^k = \sum_{i=-n}^n i^k \rho_i$, связанные с конструкцией паттерна и возникающие при построении матрицы нормальной системы K . При заданных изначально весовых функциях (2) для $k = 0, 2, 4$ эти величины таковы:

$$T_n^0 = 2n + \gamma, \quad T_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}, \quad T_n^4 = \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{15}. \quad (5)$$

Пусть максимальная степень равна нулю: $P_0(x) \equiv a_0$. Это соответствует простому весовому сглаживанию: $K_{00} = \sum_{i=-n}^n i^{0+0} \rho_i = T_n^0$, $c_i = R_{0i} = \rho_i / T_n^0$, т. е.

$$\tilde{y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{-i} + y_i) + \gamma y_0}{2n + \gamma}. \quad (6)$$

Формула (6) точна также для линейных функций.

Для квадратичного сглаживающего полинома авторегрессионная формула имеет такой вид:

$$\tilde{y}_0 = \sum_{i=-n}^n c_i y_i, \quad (7)$$

где $c_i = d_i / \sum_{j=-n}^n d_j$;

$$d_i = \rho_i (T_n^4 - i^2 T_n^2).$$

Например, при $n = 2$ $\tilde{y}_0 = (17\gamma y_0 + 12(y_{-1} + y_1) - 3(y_{-2} + y_2)) / (18 + 17\gamma)$.

Класс семиточечных формул, также точных для полиномов второй степени, описывается в следующем виде:

$$\tilde{y}_0 = (7\gamma y_0 + 6(y_{-1} + y_1) + 3(y_{-2} + y_2) - 2(y_{-3} + y_3)) / (14 + 7\gamma).$$

Полученные классы формул автоматически точны для нечётных степеней аргумента. Это означает, что они точны и для кубических многочленов.

Вычисление коэффициентов авторегрессионной сглаживающей формулы

$\tilde{y}_0 = \sum_{i=-n}^n c_i y_i$, точной для $P_4(x)$, осуществляется по аналогии:

$$c_i = d_i / \sum_{j=-n}^n d_j, \quad i = -n, \dots, n, \quad (8)$$

где $d_i = \rho_i (s_0 + s_1 i^2 + s_2 i^4)$;

$$s_0 = T_n^4 T_n^8 - (T_n^6)^2;$$

$$s_1 = T_n^4 T_n^6 - T_n^2 T_n^8;$$

$$s_2 = T_n^2 T_n^6 - (T_n^4)^2.$$

Явные формулы для величин T_n^6, T_n^8 достаточно громоздки, и поэтому их удобнее вычислять предварительно с помощью программы.

Отметим, что в действительности по указанным выше причинам в данном случае достигается точность аппроксимации для многочленов также и пятой степени.

3. Учёт наличия шума для некоторых частных случаев

Результаты замеров в узлах сопровождаются, как правило, погрешностями, или «шумом». Пусть эти погрешности являются независимыми случайными величинами с одинаковой дисперсией σ^2 . Тогда дисперсия авторегрессионной формулы может быть вычислена так: $D\tilde{y}_0 = \sigma^2 \sum_{i=-n}^n c_i^2$. Поставим задачу минимизации

дисперсии путём выбора веса γ центрального узла. Рассмотрим формулу (6) простого центрального усреднения. Вычислив производную дисперсии, определяемой видом $D\tilde{y}_0 = \sigma^2 \frac{2n + \gamma^2}{(2n + \gamma)^2}$, по параметру γ и приравняв эту производную ну-

лю, приходим к выводу, что наименьшее значение дисперсии, равное $D_{min} = \frac{\sigma^2}{2n + \gamma}$, достигается при $\gamma = 1$, т. е. при равенстве всех весов.

В случаях формул сглаживания, точных для многочленов степеней, больших первой, вычисление оптимального значения параметра γ осложняется тем, что некоторые коэффициенты c_i отрицательны. Например, для класса пятиточечных

формул сглаживания $D\tilde{y}_0 = \sigma^2 \frac{2(12^2 + 3^2) + 17^2 \gamma^2}{(18 + 17\gamma)^2} = \sigma^2 \frac{306 + 289\gamma^2}{(18 + 17\gamma)^2}$.

Наименьшее значение $D_{min} = \frac{17}{35} \sigma^2 \approx 0.5\sigma^2$ также достигается при $\gamma = 1$. Соответствующая пятиточечная формула является стандартной, приведенной в работе [5]:

$$\tilde{y}_0 = \sum_{i=-2}^2 c_i y_i = (-3y_{-2} + 12y_{-1} + 17y_0 + 12y_1 - 3y_2) / 35. \quad (9)$$

Аналогично в классе семиточечных сглаживающих функций, точных для квадратичных полиномов, наименьшая дисперсия результата измерений, равная

$D_{min} = \frac{1}{3} \sigma^2$, оказывается, также достигается для случая равных весов:

$$\tilde{y}_0 = \sum_{i=-3}^3 c_i y_i = (-2y_{-3} + 3y_{-2} + 6y_{-1} + 7y_0 + 6y_1 + 3y_2 - 2y_3) / 21. \quad (10)$$

Для проверки и иллюстрации представленных результатов был создан соответствующий пакет программ. Количество равноотстоящих узлов измерения выбрано равным 100. К исследованию предъявлялись модельные функции различного вида. Шум моделировался приближённо нормально распределённой случайной величиной. Управляющими параметрами являлись размах n паттерна, степень аппроксимирующего полинома m , а также количество этапов повторения процесса сглаживания N_{rep} . Выход каждого этапа рассматривается как входной сигнал для следующего этапа, что дополнительно повышает степень сглаживания. Во всех такого рода задачах одной из трудностей является восполнение данных измерений на концах всего интервала. В данном случае использовано нечётное продолжение сетки узлов на каждом из концов.

На рис. 1 представлено выделение синусоидального сигнала. Параметры выбраны следующими: $\sigma = 0.5$, $n = 10$, $m = 4$, $N_{rep} = 10$. Для столь высокого уровня помех можно считать удовлетворительным оценивание положения точек экстремума и точек изменения знака сигнала, Эти величины существенны для решения практических задач поиска экстремума и установления периодичности.

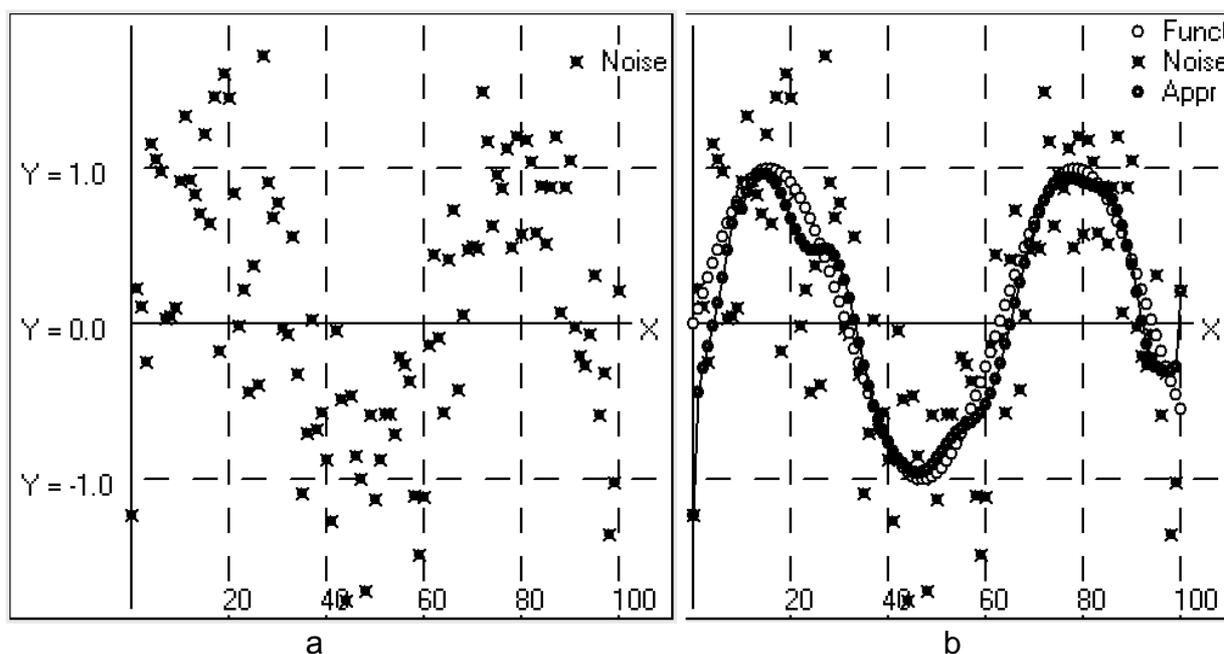


Рис. 1. Выделение синусоидального сигнала на фоне помех:
а – входной сигнал; б – результат аппроксимации

Более сложной задачей является выделение сигнала с крутопадающими участками. Такими свойствами обладают кусочно-постоянные сигналы. Путём применения паттернов с теми же параметрами удаётся приближённо решить задачу оценивания моментов переключения (рис. 2).

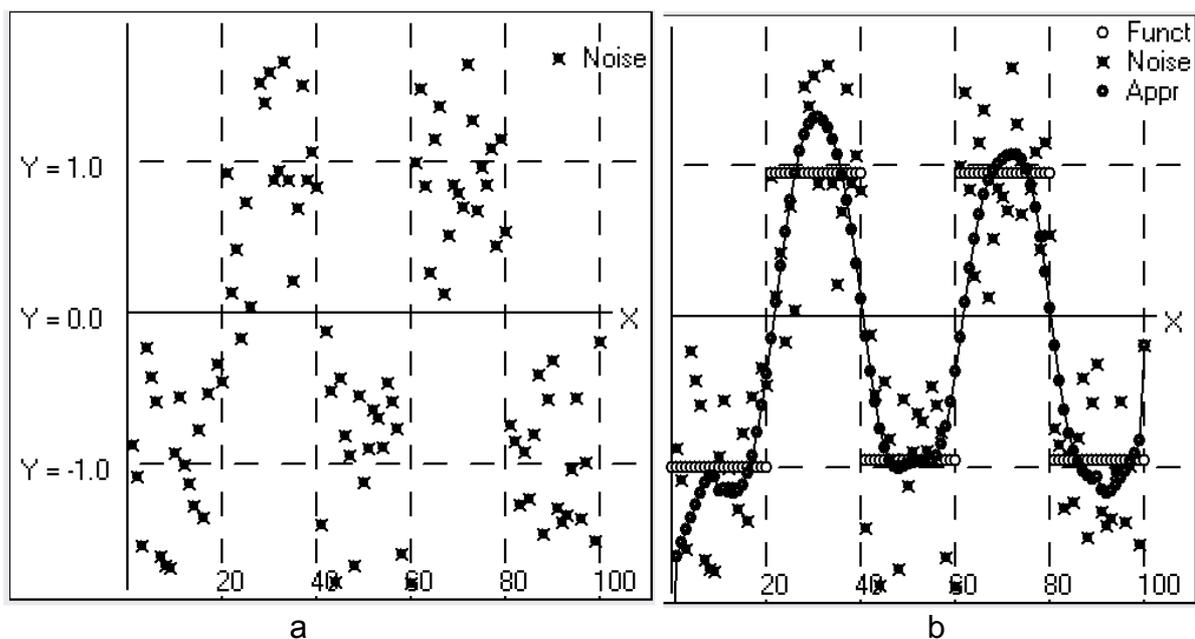


Рис. 2. Выделение кусочно-постоянного сигнала на фоне помех:
а – входной сигнал; б – результат аппроксимации

При высоком уровне помех добиться совпадения исходной функции и результата сглаживания теоретически невозможно. Но и при отсутствии помех наличие изломов измеряемой функции приводит к «явлению Гиббса» [6]. Это характерно для любых методов аппроксимации с использованием функций высокой степени гладкости без обеспечения дополнительного требования сохранения знака второй производной на интервале сглаживания. В частности, в этом заключается одна из трудностей сплайн-интерполирования [7].

В результате вычислительных экспериментов показано, что для сглаживания в случае достаточно мелкой сетки узлов, отсутствия помех и крутопадающих участков рациональным является использование формул, точных для первой – третьей степеней с небольшим количеством этапов повторений.

4. Переход к двумерному пространству

Предлагается вариант конструкции матричного измерительного устройства, представленного двумя перпендикулярно расположенными линейками измерительных электродов с совмещённым центральным узлом. Результатом измерения в этом узле выбирается среднее из результатов сглаживания для каждой линейки. В качестве компонент вектора \vec{g} , коллинеарного градиенту, вычисляют разности результатов измерений в двух узлах, ближайших к центральному. Предположим, используется устройство из семи электродов. Тогда без дополнительных реальных измерений в целях оценивания компонент градиента можно применить пятиточечное сглаживание в узлах, соседних к центральному. Используя формулу (9), получаем явное выражение для, например, компоненты g_x :

$$g_x = 20(y_1 - y_{-1}) + 12(y_2 - y_{-2}) - 3(y_3 - y_{-3}). \quad (11)$$

Данная схема предусматривает использование 13 точек измерения, что значительно меньше, чем в предложенном в работе [2] 29-точечном паттерне при том же размахе.

Выводы и заключение

Получены явные выражения для тех классов формул центрального сглаживания при специальном выборе весов, которые точны для многочленов вплоть до пятой степени при произвольном размахе узлов правильной сетки. Путём выбора количества узлов паттерна достигается возможность согласования точности аппроксимации и уровня помех, сопровождающих измерения. Для пятиточечных и семиточечных формул доказано, что наименьшая дисперсия результата измерений достигается при равных весах в узловых точках. Тестовые вычисления показывают эффективность применения разработанного метода в случае наличия шумов высокого уровня.

Для повышения степени гладкости результатов аппроксимации рассмотрена возможность поэтапного применения формул сглаживания без дополнительных реальных измерений.

Разработаны предложения для создания конструкции, содержащей две линейки электродов, соединённых под прямым углом в центральном узле, позволяющей производить оценивание как аппроксимируемой функции, так и векторов, сонаправленных с градиентом. Это дает возможность упрощённую конструкцию двумерных измерителей в целях определения точек минимума скалярного поля при наличии помех, причём для поиска вектора градиента не требуется проведения дополнительных реальных измерений.

Список литературы

1. Олейник, В. П. О повышении эффективности применения аппаратных средств электропунктурной диагностики [Текст] / В. П. Олейник, А. Ю. Чернышева // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2013. – № 4/(63). – С. 61 – 64.
2. Карташов, А. В. Использование сеточных паттернов при минимизации функций [Текст] / А. В. Карташов, А. Ю. Чернышева // Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях // Тр. междунар. науч.-техн. конф. – Харьков, 26 – 31 мая 2016. – С. 159 – 162.
3. Новожилова, М. В. Имитационная модель производственной системы с потенциально опасными объектами [Текст] / М. В. Новожилова, В. М. Попов // Радиоэлектроника и информатика. – 2014. – Вып. №4(67). – С. 24 – 29.
4. Катковник, В. Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. Метод локальной аппроксимации [Текст] / В. Я. Катковник – М.: Гл. ред. физ-мат. лит., 1985. – 306 с.
5. Кендалл, М. Многомерный статистический анализ и временные ряды [Текст] / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
6. Макс, Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях [Текст] / Ж. Макс. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
7. Квасов, В. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами [Текст] / В. И. Квасов. – М.: Физматлит, 2006. – 360 с.

Поступила в редакцию 19.09.2016

Використання одновимірних патернів для виділення сигналу на тлі перешкод

Розглянуто проблему раціонального конструювання багатоеlementних датчиків для визначення розташування точки мінімуму скалярного поля в умовах завад виміру. Запропоновано узагальнення методу центрального згладжування за допомогою одновимірних сіткових патернів. Досліджено метод отримання багатоточкових формул одновимірного згладжування, оснований на локальній ваговій апроксимації. Проведено серію обчислювальних експериментів з використанням відповідних алгоритмів. Запропоновано і обґрунтовано конструкцію вимірювального пристрою, що суміщає дві лінійки, для застосування у випадку двовимірного простору аргументів.

Ключові слова: вагова апроксимація, матричний вимірювальний електрод, багатоеlementний датчик, коефіцієнти регресійної залежності.

The Use of One-Dimensional Patterns for the Signal Isolation on the Background Noise

The problem of rational design of multi-sensors to determine the location of the scalar field in a low point of measurement noise is considered. A generalization of the method of the central anti-aliasing using the one-dimensional grid pattern is proposed. A method of obtaining multi-point one-dimensional anti-aliasing formula, based on the weight local approximation was investigated. A series of numerical experiments using appropriate algorithms are described. Proposed and substantiated measuring device design that combines two lines for use in the case of two-dimensional space of arguments.

Keywords: weighted approximation, matrix measuring electrode, a multi-element sensor, the coefficients of the regression dependence.

Сведения об авторах:

Чернышёва Анна Юрьевна – аспирант каф. 304, «Информатики», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина.

Назаренко Ольга Анатольевна – магистр каф. 304, «Информатики», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина.