

## О гибридных интегральных преобразованиях Фурье и Фурье – Бесселя на полупрямой с петлями

Харьковский национальный экономический университет им. Семена Кузнеця  
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный университет»

Введены два новых гибридных интегральных преобразования на полупрямой с петлями и формулы обращения для них. Эти преобразования расширяют возможности классического метода Фурье и применены к решению двух новых задач теплопроводности, а также получены их точные решения.

**Ключевые слова:** интегральные преобразования, полупрямая с петлями, задачи теплопроводности, точные решения.

### 1. Введение

Новые интегральные преобразования (ИП) открывают путь к решению новых задач математической физики. Классические интегральные преобразования (Фурье, Ханкеля, Мелера – Фока и др.) значительно расширили класс задач, разрешимых методом разделения переменных. Эти достижения достаточно полно представлены в книгах [1 – 4]. В последние десятилетия появились неклассические ИП, построенные на собственных функциях спектральных задач с разрывными коэффициентами [5 – 7]. Они приспособлены к решению задач математической физики для неоднородных тел. В настоящей статье представлены новые гибридные ИП Фурье и Фурье – Бесселя на полубесконечной прямой с петлями и дано их приложение к решению некоторых новых задач теплопроводности. Спектр этих новых ИП – смешанный, поэтому разложение произвольной функции содержит ряд и интеграл.

### 2. Постановка задачи, новые преобразования Фурье на смешанном спектре

1. Надо найти собственные значения и собственные функции задачи:

$$y_k'' + (\lambda^2/a_1^2)y_k = 0, \quad x \in I_k = (0, l), \quad k = 1, 2; \quad (1.1)$$

$$y_3'' + (\lambda^2/a_2^2)y_3 = 0, \quad x \in I_3 = (l, \infty); \quad (1.2)$$

$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) = 0, \quad y_3(\infty) < \infty,$$

$$y_1(l) = y_2(l) = y_3(l), \quad \mu_1[y_1'(l) + y_2'(l)] - \mu_2 y_3'(l) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\mu_k > 0$ ,  $a_k > 0$ ,  $x$  – дуговая координата, направление отсчета которой указано на рис. 1,  $2l$  – длина дуги петли. Начало отсчета  $x=0$  выбрано в средней точке петли – узле графа  $x=l$  (см. рис. 1).

Необходимо произвольную функцию представить в виде разложения по найденным собственным функциям.

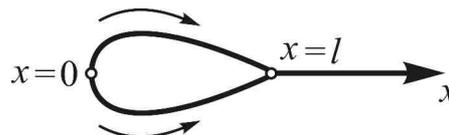


Рис. 1. Граф спектральной задачи

Нетрудно проверить, что спектр такой задачи – неотрицательный, поэтому спектральный параметр взят в виде  $\lambda^2$ . Спектр задачи является смешанным. Дискретная его часть определяется уравнением  $\sin \frac{\lambda}{a_1} l = 0$ , т. е.  $\lambda_n = \frac{n\pi}{l} a_1$ .

Собственные функции для этих собственных значений имеют вид

$$\bar{y}(x, \lambda_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \frac{n\pi}{l} x, & x \in (0, l), \\ 0, & x > l. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для непрерывной части спектра имеем собственную функцию:

$$\bar{z}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \frac{\lambda}{a_1} x, & x \in (0, l), \\ \cos \frac{\lambda}{a_1} l \cdot \cos \frac{\lambda}{a_2} (x-l) - \delta \sin \frac{\lambda}{a_1} l \cdot \sin \frac{\lambda}{a_2} (x-l), & x > l, \end{cases} \quad (1.5)$$

где обозначено  $\delta = 2\mu_{12} \cdot a_{21}$ ,  $\mu_{12} = \mu_1/\mu_2$ ,  $a_{21} = a_2/a_1$ .

На графе (см. рис. 1) задана функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, и  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ ,  $x \in I_k$  в  $f_k(x)$ ,  $f_3(x) \in L(l, \infty)$ .

Эту функцию надо разложить по функциям  $\bar{y}(x, \lambda_n)$ ,  $\bar{z}(x, \lambda)$  т. е. представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{y}(x, \lambda_n) + \int_0^{\infty} g(\lambda) \bar{z}(x, \lambda) d\lambda, \quad x \in (I_1 \cup I_2 \cup I_3). \quad (1.6)$$

Для этого сложим первые две строки последнего равенства. В итоге найдем:

$$F(x) = \left( \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x)), f_3(x) \right)^T = \int_0^{\infty} g(\lambda) \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ z_3(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda. \quad (1.7)$$

Функция  $\bar{z}_1(x, \lambda) = (z_1, z_3)^T$  удовлетворяет условиям

$$z_1'(0) = 0, \quad z_1(l) = z_3(l), \quad z_1'(l) = \nu \cdot z_3'(l), \quad z_3(\infty) < \infty, \quad \nu = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

и уравнениям (1.1), (1.2). Такая задача о разложении решена в работе [6]. Воспользуемся результатами этой работы и запишем окончательную формулу обращения для равенства (1.7):

$$g(\lambda) = \frac{2}{\pi} \omega^{-1}(\lambda) \int_0^{\infty} F(\xi) \cdot r(\xi) \cdot \bar{z}_1(\xi, \lambda) d\xi, \quad r(x) = \begin{cases} \delta \cdot a_1^{-1}, & x \in (0, l), \\ a_2^{-1}, & x > l, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\omega(\lambda) = \cos^2(\lambda/a_1) + \delta^2 \sin^2(\lambda/a_1).$$

После этого можно определить коэффициенты  $a_n$  в (1.6). Действительно, первую строку (1.6) с учетом (1.7), (1.8) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(f_1(x) - f_2(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in (0, l).$$

Из нее находим

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^l [f_1(x) - f_2(x)] \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (1.9)$$

Задача о разложении произвольной функции, заданной на графе, по системе собственных функций спектральной задачи (1.1) – (1.3) формально решена. Если обозначить правую часть равенства (1.6) через  $i(x)$ , то можно показать, что  $i(x) = \frac{f_k(x+0) + f_k(x-0)}{2}$  при  $k = 1, 2, 3$  и  $x \neq l$ ;  $i(l) = \frac{\mu_1(f_1(l) + f_2(l)) + \mu_2 f_3(l)}{2\mu_1 + \mu_2}$ .

2. Обобщение на  $N$  одинаковых петель (рис. 2).

Все петли имеют длину  $2l$  и параметр  $a_1$ , прямолинейный участок – параметр  $a_2$ . Как и в п. 1, начало отсчета в каждой локальной системе координат поместим в серединную точку дуги петли. Решения спектральной задачи для петли с номером  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) будем обозначать  $y_{kj}$ ,  $j = 1, 2$ .

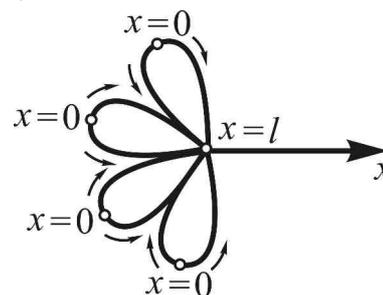


Рис. 2.  $N$  петель

Условия сопряжения в точке  $x = 0$  и в узле графа будут такими:

$$y_{k1}(0) = y_{k2}(0), \quad y'_{k1}(0) + y'_{k2}(0) = 0, \quad y_{k1}(l) = y_{k2}(l) = y_{N+1}(l), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.10)$$

$$\sum_{k=1}^N \mu_k [y'_{k1}(l) + y'_{k2}(l)] - \mu_{N+1} \cdot y'_{N+1}(l) = 0.$$

Решения уравнений (1.1) ищем в виде

$$y_{kj} = A_{kj} \sin \frac{\lambda}{a_1} x + B_k \cos \frac{\lambda}{a_1} x, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in (0, l),$$

$$y_{N+1} = A_{N+1} \cdot \sin \frac{\lambda}{a_2} (x - l) + B \cos \frac{\lambda}{a_2} (x - l), \quad x > l.$$

При этом часть условий сопряжений учтены, оставшиеся условия (1.10) приводят к системе равенств

$$B = A_{kj} \sin \frac{\lambda}{a_1} l + B_k \cos \frac{\lambda}{a_1} l, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2,$$

$$\sum_{k=1}^N \mu_k \left[ (A_{k1} + A_{k2}) \cos \frac{\lambda}{a_1} l - 2B_k \sin \frac{\lambda}{a_1} l \right] = A_{N+1} \cdot a_{12} \mu_{N+1}, \quad a_{12} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (1.11)$$

Из этой системы следует:

$$1) \sin \frac{\lambda}{a_1} l = 0, \quad \lambda_n = r_n \cdot a_1, \quad r_n = \frac{n\pi}{l}, \quad A_{N+1} = B_k = 0, \quad (1.12)$$

$$\bar{y}_1(x, r_n) = (\pm a_{1n}, \dots, \pm a_{Nn}, 0)^T \cdot \sin r_n x,$$

где верхний знак относится к одной, вполне определенной, половине петли, нижний знак – к другой;

$$\begin{aligned}
 & 2) \cos \frac{\lambda}{a_1} l = 0, \quad \lambda_n = s_n a_1, \quad s_n = \frac{\pi}{2l} (2n + 1), \quad A_{N+1} = B = A_{kj} = 0, \\
 & \sum_{k=1}^N \mu_k B_k(n) = 0, \quad \bar{y}_2(x, s_n) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_1(n), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_2(n), \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_N(n), 0 \right)^T \cdot \cos s_n x; \\
 & 3) A_{kj} = 0, \quad B_k \cos \frac{\lambda}{a_1} l = B, \quad B_1 = B_2 = \dots = B_N, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\
 & A_{N+1} = -B \cdot \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda}{a_1} l, \quad \delta_1 = \frac{2m}{\mu_{N+1}} a_{21}, \quad m = \sum_{k=1}^N \mu_k.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Собственная функция в этом случае имеет вид

$$\bar{y}_3(x, \lambda) = \begin{cases} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T \cos \frac{\lambda}{a_1} x, & x \in (0, l), \\ z(x, \lambda) \equiv \cos \frac{\lambda}{a_1} l \cdot \cos \frac{\lambda}{a_2} (x - l) - \delta_1 \sin \frac{\lambda}{a_1} l \cdot \sin \frac{\lambda}{a_2} x, & x > l. \end{cases} \tag{1.14}$$

Для установления разложения произвольной функции

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{N+1}(x))^T$ ,  $f_k(x) = (f_{k1}(x), f_{k2}(x))^T$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , заданной на графе (см. рис. 2), составим равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{y}_1(x, r_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{y}_2(x, s_n) + \int_0^{\infty} g(\lambda) \bar{y}_3(x, \lambda) d\lambda, \quad x > 0, \tag{1.15}$$

в котором величины  $a_{kn}$ ,  $B_{kn}$  и  $g(\lambda)$  подлежат определению.

Сложим в (1.15) попарно первые  $2N$  строк, в результате получим

$$[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, f_{N+1}]^T = \sum_{n=1}^{\infty} [B_1(n), \dots, B_N(n), 0]^T \cos s_n x + \int_0^{\infty} g(x) \bar{z}_1(x, \lambda) d\lambda. \tag{1.16}$$

В последней формуле:

$$\varphi_k(x) = 1/2 (f_{k1} + f_{k2}), \quad \bar{z}_1(x, \lambda) = \left[ (1, 1, \dots, 1)^T \cos(\lambda x / a_1), z(x, \lambda) \right]^T.$$

Просуммируем в ней первые  $N$  строк с весами  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$  соответственно. С учетом того, что величины  $B_k(n)$  связаны соотношением

$$\sum_{k=1}^N \mu_k B_k = 0, \quad \text{найдем}$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} g(\lambda) [\cos(\lambda x / a_1), z(x, \lambda)]^T d\lambda, \quad x \in (0, l) \cup (l, \infty), \tag{1.17}$$

где  $F(x) = [\phi(x), f_{N+1}(x)]^T$ ;  $\phi(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N \mu_k \phi_k(x)$ . Из этого равенства определяем функцию  $g(\lambda)$  по формуле (1.8), в которой следует параметр  $\delta$  заменить на  $\delta_1$ , а параметр  $\nu$  – на  $\nu_1 = \mu_{N+1}/2m$ .

Из (1.16) с учетом (1.17) найдем равенство

$$(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x))^T = \sum_{n=1}^{\infty} [B_1(n), B_2(n), \dots, B_N(n)]^T \cos s_n x, \quad (1.18)$$

где  $\phi_k(x) = \varphi_k(x) - \phi(x)$ , которое дает возможность определить неизвестные  $B_k(n)$  как коэффициенты рядов Фурье по системе функций  $\cos s_n x$ :

$$B_k(n) = \frac{2}{l} \int_0^l \phi_k(t) \cos s_n t dt. \quad (1.19)$$

После этого из равенства (1.15) следует равенство

$$\frac{1}{2}(f_{k1}(x) - f_{k2}(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sin r_n x, \quad x \in (0, l). \quad (1.20)$$

Из него найдем коэффициенты  $a_{kn}$ :

$$a_{kn} = \frac{1}{l} \int_0^l [f_{k1}(t) - f_{k2}(t)] \sin r_n t dt. \quad (1.21)$$

Следует отметить, что формулы (1.16), (1.19) и формула обращения (1.8) дают прямое и обратное преобразование Фурье на  $(N+1)$ -звенном графе (рис. 3) с условием второго рода на краях коротких звеньев. Этот промежуточный результат сам по себе является новым, так как ранее в научной литературе такие (или подобные им) преобразования авторам не встречались.

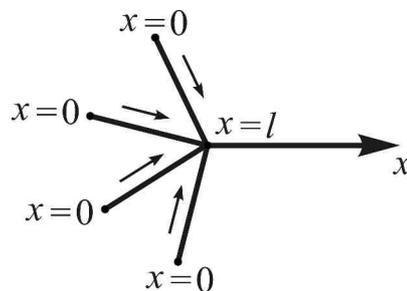


Рис. 3.  $(N+1)$ -звенный граф

### 3. Гибридное интегральное преобразование Фурье – Бесселя

Для простоты изложения берем две петли с параметром  $a_1 = 1$ . На интервале  $(l, \infty)$  имеем уравнение Бесселя  $y_2'' + y_2'/x + \lambda^2 y_2 = 0$ . Условия сопряжения и краевые условия – прежние. Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля (Ш-Л) будут такими:

$$\bar{y}_1(x, r_n) = [\pm a_{1n}, \pm a_{2n}, 0]^T \sin r_n x, \quad r_n = n\pi/l;$$

$$\bar{y}_2(x, s_n) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1(n), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_2(n), 0 \right]^T \cos s_n x, \quad s_n = \pi(2n+1)/2l, \quad \sum_{k=1}^2 \mu_k A_k = 0;$$

$$\bar{y}_3(x, \lambda) = \begin{cases} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T \cos \lambda x, & x \in (0, l), \\ m(\lambda)J_0(\lambda x) + n(\lambda)Y_0(\lambda x), & x > l. \end{cases}$$

В последней формуле  $J_0(x)$ ,  $Y_0(x)$  – функции Бесселя [4],

$$m(\lambda) = \frac{\pi \lambda l}{2} [k_1 Y_0(l\lambda) \sin \lambda l - Y_1(l\lambda) \cos \lambda l],$$

$$n(\lambda) = \frac{\pi \lambda l}{2} [-k_1 J_0(l\lambda) \sin \lambda l + J_1(l\lambda) \cos \lambda l], \quad k_1 = 2(\mu_1 + \mu_2)\mu_3^{-1}.$$

Функцию  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ ,  $f_k = (f_{k1}, f_{k2})^T$ ,  $k = 1, 2$ , заданную на графе (см. рис. 2), но с двумя петлями, представим в виде разложения по собственным функциям:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{y}_1(x, r_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{y}_2(x, s_n) + \int_0^{\infty} b(\lambda) \cdot \bar{y}_3(x, \lambda) d\lambda, \quad x \in (0, l) \cup (l, \infty). \quad (1.22)$$

Как и раньше, коэффициенты  $a_{kn}$  и  $A_k(n)$  ( $k = 1, 2$ ) определим по формулам (1.19), (1.21). Затем из (1.22) с учетом найденных  $a_{kn}$ ,  $A_k(n)$  придем к формуле

$$\left[ \begin{matrix} (\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2)(\mu_1 + \mu_2)^{-1} \\ f_3(x) \end{matrix} \right] = \int_0^{\infty} b(\lambda) \begin{pmatrix} \cos \lambda x \\ m(\lambda)J_0(\lambda x) + n(\lambda)Y_0(\lambda x) \end{pmatrix} d\lambda. \quad (1.23)$$

Разложение (1.23) является гибридным ИГ Фурье – Бесселя [5] с ядром  $w(x, \lambda) = \cos \lambda x$ , когда  $x \in (0, l)$  и  $w(x, \lambda) = m(\lambda)J_0(\lambda x) + n(\lambda)Y_0(\lambda x)$ , когда  $x > l$ . В точке сопряжения функция  $w = (x, \lambda)$  удовлетворяет условиям

$$w(l-0) = w(l+0), \quad w'(l-0) = k_1^{-1} w'(l+0).$$

Воспользуемся результатом из работы [5] и запишем формулу для  $b(\lambda)$ :

$$b(\lambda) = k_1 [m^2(\lambda) + n^2(\lambda)]^{-1} \lambda \int_0^{\infty} F(t) \rho(t) w(t, \lambda) dt, \quad (1.24)$$

где

$$\rho(x) = \begin{cases} l, & x \in (0, l), \\ xk_1^{-1}, & x > l, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} (\mu_1 \varphi_1(x) + \mu_2 \varphi(x))(\mu_1 + \mu_2)^{-1}, & x \in (0, l), \\ f_3(x), & x > l. \end{cases}$$

Отметим, что равенства (1.22), (1.19) и (1.24) дают прямое и обратное гибридное ИГ Фурье – Бесселя на четырехзубой «вилке» с условиями второго рода на краях коротких звеньев.

### 3. Приложение к задачам математической физики

1. Распространение тепла в бесконечном стержне с петлей (см. рис. 1).

В узле стержня расположен источник тепла, мощность которого изменяется во времени по закону  $\varphi(t)$ . Уравнения, условия сопряжения и краевое условие этой задачи будут такими:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = a_k^{-2} \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad u_1'(0,t) + u_2'(0,t) = 0, \quad u_3(\infty,t) < \infty, \quad (2.1)$$

$$u_1(l,t) = u_2(l,t) = u_3(l,t), \quad \mu_1[u_1'(l,t) + u_2'(l,t)] - \mu_2 u_3'(l,t) = \varphi(t), \quad t > 0.$$

Здесь  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты теплопроводности частей стержня (петли и полупрямой). Начальные условия задачи примем нулевыми.

Приведем условия (2.1) для неизвестных  $w_k(x,t)$  к однородным с помощью замены:

$$u_k(x,t) = w_k(x,t) \quad (k=1,2), \quad u_3(x,t) = w_3(x,t) + \mu_2^{-1}(l-x)e^{-(x-l)} \cdot \varphi(t).$$

Для новых неизвестных функций  $w_k(x,t)$  будем иметь однородные условия сопряжения, ограниченность на бесконечности, начальные условия

$$w_k(x,0) = 0 \quad (k=1,2), \quad w_3(x,0) = \mu_2^{-1}(x-l)e^{-(x-l)}\varphi(0) \quad (2.2)$$

и уравнения

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = a_k^{-2} \left[ \frac{\partial w_k}{\partial t} + \phi_k(x,t) \right], \quad \phi_k(x,t) \equiv 0 \quad (k=1,2), \quad (2.3)$$

$$\phi_3(x,t) = \mu_2^{-1} e^{-(x-l)} \left[ a_2^{-2}(x-l-2)\varphi(t) + (l-x)\varphi'(t) \right].$$

Для решения этой новой задачи функцию  $\phi(x,t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  представим в виде разложения по собственным функциям однородной задачи (1.5) (формулы (1.6), (1.8) при  $a_n = 0$ ):

$$\phi(x,t) = \int_0^\infty \bar{z}(x,\lambda) g(\lambda,t) d\lambda, \quad g(\lambda,t) = \frac{2}{\pi} \omega^{-1}(\lambda) \int_l^\infty \phi_3(\xi,t) r(\xi) z_3(\xi,\lambda) d\xi.$$

Здесь отсутствует ряд, так как на петле  $\phi(x,t) \equiv 0$ .

Функцию  $w(x,t) = (w_1, w_2, w_3)^T$  также представим в аналогичном виде:

$$w(x,t) = \int_0^\infty T(t,\lambda) \bar{z}(x,\lambda) d\lambda,$$

где для неизвестной функции  $T(t,\lambda)$  имеем уравнение

$$T' + \lambda^2 T = \frac{2}{\omega(\lambda)\pi} g(\lambda,t). \quad (2.4)$$

Начальное условие для  $T(t,\lambda)$  получим из разложения начальной функции (2.2) по функциям  $\bar{z}(x,\lambda)$ :

$$T(0,\lambda) = \alpha(\lambda) = \frac{2}{\omega(\lambda)\pi} \int_{2l}^\infty w(x,0) r(x) \bar{z}(x,\lambda) dx.$$

Функция  $T(t,\lambda)$  определяется. Этим заканчивается решение поставленной задачи.

2. Распределение теплового потенциала в тонкой оболочке [8].

Оболочка представляет собой прямой тонкий цилиндр с присоединенной к нему по образующей полуполосой. Цилиндр и полуполоса имеют совершенный тепловой контакт, одинаковую высоту  $h$  и изготовлены из одного материала. Расположим систему координат так, чтобы ось  $Oy$  совпадала с линией соединения цилиндра и полуполосы, при этом  $h \geq y \geq 0$ . В поперечном сечении такой конструкции будем иметь граф, изображенный на рис. 1, переменная  $x$  имеет тот же смысл, что и на этом рисунке.

Необходимо найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = \frac{\partial u_k}{\partial t} \quad (k = 1, 2)$$

при нулевых условиях на границе оболочки и начальных условиях:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = [f_1, f_2, f_3]^T.$$

Решение этого уравнения с учетом граничных условий выберем в виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) e^{-\gamma_{nm}^2 t} \bar{y}(x, \lambda_n) + \int_0^{\infty} d\lambda A_m(\lambda) e^{-\gamma_m^2 t} \bar{z}(x, \lambda) \right\} \sin \alpha_m y,$$

где  $A_m(\lambda)$ ,  $a_n(m)$  – неизвестные,  $\alpha_m = \frac{m\pi}{h}$ ,  $\gamma_m^2 = \alpha_m^2 + \lambda^2$ ,  $\gamma_{nm}^2 = \alpha_m^2 + \lambda_n^2$ ;  $\bar{y}(x, \lambda_n)$ ,  $\bar{z}(x, \lambda)$  – собственные функции (1.4), (1.5), в последней из которых следует положить  $a_1 = a_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ .

Начальные условия приводят к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n(m) \sin \alpha_m y \cdot \bar{y}(x, \lambda_n) + \int_0^{\infty} d\lambda \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\lambda) \bar{z}(x, \lambda) \sin \alpha_m y = f(x, y),$$

$$x \in (0, l) \cup (l, \infty), \quad y \in (0, h).$$

Обращая этот ряд Фурье, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) \bar{y}(x, \lambda_n) + \int_0^{\infty} A_m(\lambda) \bar{z}(x, \lambda) d\lambda = f(x, m), \quad x \in (0, l) \cup (l, \infty),$$
(2.5)

$$f(x, m) = \frac{2}{h} \int_0^h f(x, y) \sin(m\pi/h)y dy.$$

Остается к (2.5) применить формулы обращения (1.8), (1.9) и определить неизвестные  $a_n(m)$  и  $A_m(\lambda)$ . В итоге все неизвестные определены.

### Выводы

Получены новые гибридные интегральные преобразования Фурье и Фурье – Бесселя, с помощью которых классическим методом разделения переменных получены точные решения двух новых задач нестационарной теории теплопроводности.

### Список литературы

1. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости [Текст] / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
2. Улитко, А. Ф. Метод векторных собственных функций [Текст] / А. Ф. Улитко. – К.: Наук. Думка, 1979. – 220 с.
3. Трантер, К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике [Текст] / К. Дж. Трантер. – М.: ГТТИ, 1956. – 204 с.
4. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения [Текст] / Н. Н. Лебедев. – М.: Физматгиз, 1963. – 320 с.
5. Уфлянд, Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л.: Наука, 1976. – С. 93 – 106.
6. Ефимова, И. Т. Некоторые задачи теории теплопроводности для двухслойной среды [Текст] / И. Т. Ефимова // Инженерно-физический журнал. – 1968. Т. 15, №1. – С. 129 – 133.
7. Проценко, В. С. О гибридных интегральных преобразованиях [Текст] / В. С. Проценко // Математические методы анализа динамических систем: Темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 3. – Х., 1979. – С. 3 – 6.
8. Иоссель, Ю. Я. Расчет потенциальных полей в энергетике [Текст] / Ю. Я. Иоссель. – Л.: Энергия, 1978. – 351 с.

Поступила в редакцию 05.09. 2016

### Про гібридні інтегральні перетворення Фур'є і Фур'є – Бесселя на напівпрямій з петлями

Запроваджено два нових гібридних інтегральних перетворення на напівпрямій з петлями і формули обертання для них. Ці перетворення розширюють можливості класичного методу Фур'є і застосовані до розв'язання двох нових задач теплопровідності, а також отримані їхні точні розв'язки.

**Ключові слова:** інтегральні перетворення, напівпряма з петлями, задачі теплопровідності, точні розв'язки.

### About Hybrid Fourier and Fourier – Bessel Transforms on the Half-Straight with a Hinges

Two new hybrid integral transforms on the half-straight with a hinges and inversion formulas for them are introduced. These transforms the capabilities of the classic Fourier method are extend and to solution of new thermal conductivity problems are applied, their exact solutions are obtained.

**Key words:** integral transforms, half-straight with a hinges, thermal conductivity problems, exact solutions.