

## Упругое равновесие ортотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*

Предложен аналитический метод исследования краевых задач теории упругости для ортотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. Он основан на применении соотношений между базисными гармоническими функциями в декартовых и эллиптических координатах и приводит к квазирегулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений с быстро убывающими матричными коэффициентами. В предельном случае, когда полуплоскость ослаблена продольным разрезом, удается получить простую асимптотическую формулу для коэффициента интенсивности нормальных напряжений.

**Ключевые слова:** ортотропная полуплоскость, разрез, гармоническая функция.

### Введение

В вопросах прочности материалов и элементов конструкций используют в основном информацию о напряженно-деформированном состоянии вблизи отверстий, трещин (разрезов), включений и т. д. Получение достоверной и полной информации такого рода непосредственно связано с использованием точных решений соответствующих краевых задач.

Имеется лишь небольшое число работ, ориентированных на построение новых и развитие имеющихся аналитических методов исследования задач теории упругости для многосвязных ортотропных тел. Это обстоятельство обусловлено существенными математическими трудностями построения эффективных методов точной реализации граничных условий исходных краевых задач.

Начала реализуемого здесь подхода заложены в работах [1, 2], где получены специальные представления общих решений уравнений равновесия двумерных (плоских) задач теории упругости для ортотропных тел, ограниченных координатными линиями декартовой, параболической и эллиптической систем координат.

### 1. Общие положения

Пусть  $\delta_1, \delta_2$  ( $\delta_j > 0, j = 1, 2$ ) – безразмерные величины, определяемые формулами

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = \omega = \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}, \quad \delta_1^2 \delta_2^2 = \gamma = \frac{E_1}{E_2} \quad (\omega > 0, \omega^2 - 4\gamma \geq 0),$$

где  $E_1 = E_x$ ;  $E_2 = E_y$  – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G_{12} = G_{xy}$  – модуль сдвига в плоскости  $Oxy$ ;  $\nu_{12} = \nu_{xy}$  – коэффициент Пуассона.

Частные решения двумерных уравнений равновесия ортотропных в осях  $x$  и  $y$  пластин представим в виде [1, 2]

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial y} = -a \frac{\partial I_j}{\partial y_j}, \quad \sigma_x^{(j)} = -a \delta_j \frac{\partial I_j}{\partial x}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial x} = -\delta_j^{-2} \sigma_x^{(j)}; \quad (1)$$

$$u_x^{(j)} = -\frac{a(\delta_j^2 + \nu_{12})}{\delta_j E_1} I_j, \quad u_y^{(j)} = \frac{a(\delta_{3-j}^2 + \nu_{12})}{E_1} \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_j \quad (j=1,2), \quad (2)$$

где  $I_j = I_j(x, y_j)$  – гармонические функции переменных  $x, y_j = \delta_j y$ ;  $a$  – параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат.

При этом в формулах (2)  $I_j$  и  $\int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_j$  – сопряженные гармонические функции переменных  $x, y_j$ .

Положим

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}, & \sigma_x &= \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, & \sigma_y &= \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}; \\ u_x &= u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, & u_y &= u_y^{(1)} + u_y^{(2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

При  $\delta_1 \neq \delta_2$  ( $\omega^2 \neq 4\gamma$ ) представления (1) – (3) являются общими (функции  $I_j$  линейно независимы). В случае  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  ( $\omega^2 = 4\gamma$ ) функции  $I_1, I_2$  образуют линейно зависимую систему, и тогда надо либо построить решение уравнений равновесия, не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью гармонической функции  $I_1$ ), либо в решении исходной краевой задачи ( $\delta_1 \neq \delta_2$ ) осуществить предельный переход  $\delta_2 \rightarrow \delta_1 = \delta$ .

## 2. Совместное применение декартовых и эллиптических координат

Пусть  $\langle x, y \rangle$ ,  $\langle \xi, \theta \rangle$  – исходные декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями

$$x = ach\xi \cos \theta, \quad y = ash\xi \sin \theta \quad (a > 0; 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (4)$$

Уравнение  $\xi = \xi_0 = const$  задает вытянутый вдоль оси  $Ox$  эллипс (рисунок)

$$\frac{x^2}{(ach\xi_0)^2} + \frac{y^2}{(ash\xi_0)^2} = 1. \quad (5)$$

При  $\delta_1 \neq \delta_2$  каждую из гармонических функций  $I_j$  ( $j=1,2$ ) будем рассматривать как функцию эллиптических координат  $\xi_j, \theta_j$ , определяемых формулами

$$x_j = x = a_j ch \xi_j \cos \theta_j, y_j = \delta_j y = a_j sh \xi_j \sin \theta_j \quad (a_j > 0, 0 \leq \xi_j < \infty, 0 \leq \theta_j \leq 2\pi). \quad (6)$$

Уравнение  $\xi_j = \xi_{j0} = const$  задает эллипс

$$\frac{x_j^2}{(a_j ch \xi_{j0})^2} + \frac{y_j^2}{(a_j sh \xi_{j0})^2} = \frac{x^2}{(a_j ch \xi_{j0})^2} + \frac{(\delta_j y)^2}{(a_j sh \xi_{j0})^2} = 1 \quad (j=1,2),$$

совпадающий с исходным эллипсом (5) при условии, что

$$a_j ch \xi_{j0} = ach \xi_0, \quad a_j sh \xi_{j0} = \delta_j ash \theta_0 \quad (j=1,2). \quad (7)$$

Тогда из соотношений (4), (6), (7) следует, что на границах  $\xi_j = \xi_{j0}, \xi = \xi_0$  эллиптических областей  $0 \leq \xi_j < \xi_{j0}, 0 \leq \xi < \xi_0; \xi_{j0} < \xi_j < \infty, \xi_0 < \xi < \infty$  выполняются равенства  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ .

Проекции  $F_x^{(j)}, F_y^{(j)}$ ;  $F_x, F_y$  векторов сил  $\vec{F}_j = F_x^{(j)} \vec{e}_x + F_y^{(j)} \vec{e}_y$ ,  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$  на границах  $\xi_j = \xi_{j0}, \xi = \xi_0$  областей  $\xi_{j0} < \xi_j < \infty, \xi_0 < \xi < \infty$ , соответствующие частным решениям (1) и общему решению (3) уравнений равновесия, имеют вид [3]

$$F_{x/\xi_j=\xi_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j / \xi_j = \xi_{j0}}, \quad F_{y/\xi_j=\xi_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{\delta_j h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j / \xi_j = \xi_{j0}};$$

$$F_{x/\xi=\xi_0} = F_{x/\xi_1=\xi_{10}}^{(1)} + F_{x/\xi_2=\xi_{20}}^{(2)}, \quad F_{y/\xi=\xi_0} = F_{y/\xi_1=\xi_{10}}^{(1)} + F_{y/\xi_2=\xi_{20}}^{(2)}; \quad (8)$$

$$h_0 = \sqrt{ch^2 \xi_0 - \cos^2 \theta}, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \quad (\xi_j = \xi_{j0}, \xi = \xi_0).$$

В предельном случае, когда  $\xi_0 = 0 (\xi_{j0} = 0)$ , эллипсы  $\xi = \xi_0, \xi_j = \xi_{j0}$  вырождаются в один и тот же разрез  $x \leq a, y = \pm 0$ , причем  $a_j = a, h_0 = |\sin \theta| (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ .

Базисные гармонические функции в координатных системах  $\langle x_j, y_j \rangle$ ,  $\langle \xi_j, \theta_j \rangle$  связаны между собой соотношениями

$$\left. \begin{aligned}
 e^{\lambda y_j} \sin \lambda x_j &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a_j \lambda) \operatorname{ch}(2n+1)\xi_j \cos(2n+1)\theta_j + \\
 &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} J_{2n}(a_j \lambda) \operatorname{sh} 2n\xi_j \sin 2n\theta_j; \\
 e^{-(2k+1)\xi_j} \cos(2k+1)\theta_j &= (2k+1)(-1)^k \int_0^{\infty} \lambda^{-1} J_{2k+1}(a_j \lambda) e^{-\lambda y_j} \sin \lambda x_j d\lambda, \\
 e^{-2k\xi_j} \sin 2k\theta_j &= 2k(-1)^{k-1} \int_0^{\infty} \lambda^{-1} J_{2k}(a_j \lambda) e^{-\lambda y_j} \sin \lambda x_j d\lambda;
 \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned}
 e^{\lambda y_j} \cos \lambda x_j &= J_0(a_j \lambda) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a_j \lambda) \operatorname{sh}(2n+1)\xi_j \sin(2n+1)\theta_j + \\
 &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(a_j \lambda) \operatorname{ch} 2n\xi_j \cos 2n\theta_j; \\
 e^{-(2k+1)\xi_j} \sin(2k+1)\theta_j &= (2k+1)(-1)^k \int_0^{\infty} \lambda^{-1} J_{2k+1}(a_j \lambda) e^{-\lambda y_j} \cos \lambda x_j d\lambda, \\
 e^{-2k\xi_j} \cos 2k\theta_j &= 2k(-1)^k \int_0^{\infty} \lambda^{-1} J_{2k}(a_j \lambda) e^{-\lambda y_j} \cos \lambda x_j d\lambda,
 \end{aligned} \right\} (10)$$

в которых  $x_j = x, y_j = \delta_j y, J_l(z)$  – функция Бесселя первого рода.

Метод получения такого рода соотношений между базисными гармоническими функциями, рассматриваемыми в разных координатных системах, изложен в работе [4].

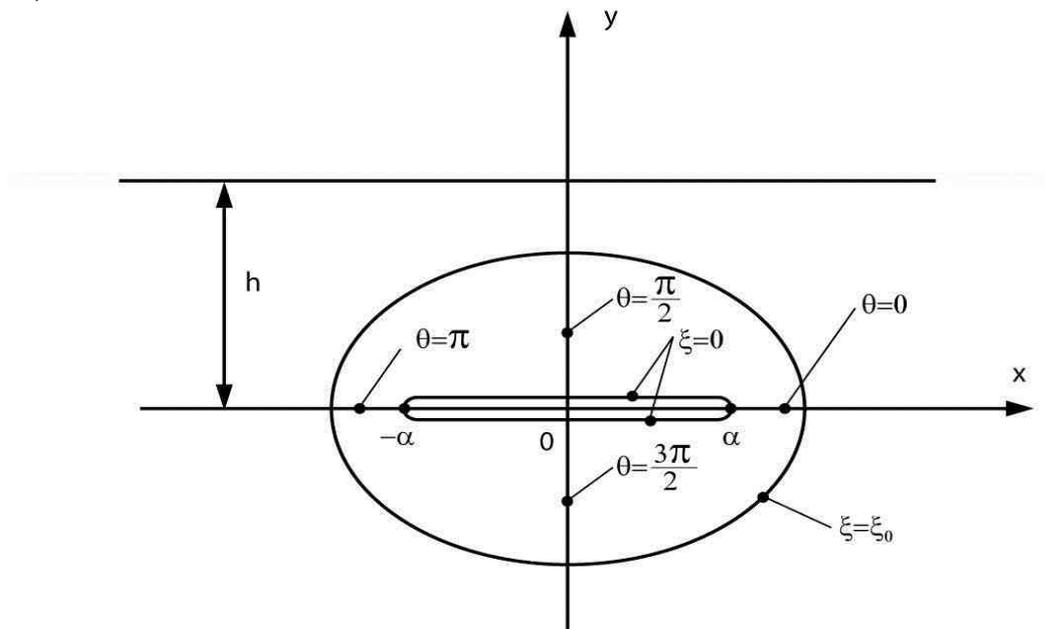
Разложения (9), (10) в сочетании с методом Фурье и представлениями (1) – (3), (8) позволяют точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач для ортотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием  $0 \leq \xi < \xi_0$ , в частности продольным разрезом  $\xi = 0 (y = \pm 0, |x| < a)$  (рисунок).

### 3. Равновесие полуплоскости с продольным разрезом

В качестве приложения приведенных общих результатов рассмотрим первую основную краевую задачу для ортотропной полуплоскости  $-\infty < x < \infty, -\infty < y \leq h (h > 0)$ , ослабленной конечным разрезом  $|x| < a, y = \pm 0$ .

Пусть берега разреза растягиваются равномерно распределенными и противоположно направленными нормальными усилиями интенсивности

$\sigma_0 = const (\sigma_0 > 0)$ , а граница  $y = h$  полуплоскости свободна от внешних усилий (рисунок).



Геометрия задачи

В силу симметрии задачи относительно оси  $Oy$  достаточно ограничиться краевыми условиями

$$F_{x/y=\pm 0} = 0, F_{y/y=\pm 0} = \pm \sigma_0 (0 \leq x < a); \tau_{xy/y=h} = 0, \sigma_{y/y=h} = 0 (0 \leq x < \infty), \quad (11)$$

а гармонические функции  $I_j (j = 1, 2)$  выбрать в виде

$$I_j = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(j)} e^{-(2n+1)\xi_j} \cos(2n+1)\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(j)} e^{-2n\xi_j} \sin 2n\theta_j + \int_0^{\infty} C_j(\lambda) e^{\lambda y_j} \sin \lambda x d\lambda. \quad (12)$$

Используя теперь равенства (1), (3), (8), разложения (9), (12) и учитывая, что  $\xi_0 = 0, \xi_{j0} = 0, a_j = a, h_0 = |\sin \theta|$ , в результате удовлетворения краевым условиям (11) получаем следующие связи между искомыми величинами  $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}, C_j(\lambda)$ :

$$A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = 0 (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \frac{1}{\delta_1} B_n^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} B_n^{(2)} = 0 (n = 1, 2, \dots),$$

$$A_n^{(1)} = \frac{2(-1)^n}{\delta_1 - \delta_2} \int_0^{\infty} [\delta_2 C_1(\lambda) + \delta_1 C_2(\lambda)] J_{2n+1}(a\lambda) d\lambda + \bar{f}_n,$$

$$\bar{f}_0 = \frac{\delta_1 \delta_2 \sigma_0}{\delta_1 - \delta_2}, \quad \bar{f}_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$B_n^{(1)} = \frac{2\delta_1 (-1)^{n-1}}{\delta_1 - \delta_2} \int_0^\infty [C_1(\lambda) + C_2(\lambda)] J_{2n}(a\lambda) d\lambda \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$C_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\delta_1 - \delta_2)} \left\{ \sum_{k=0}^\infty (2k+1)(-1)^k A_k^{(1)} \left[ (\delta_1 + \delta_2) e^{-2\delta_1 h \lambda} - 2\delta_1 e^{-(\delta_1 + \delta_2) h \lambda} \right] \times \right. \\ \left. \times J_{2k+1}(a\lambda) + 2 \sum_{k=1}^\infty k(-1)^{k-1} B_k^{(1)} \left[ (\delta_1 + \delta_2) e^{-2\delta_1 h \lambda} - 2\delta_2 e^{-(\delta_1 + \delta_2) h \lambda} \right] J_{2k}(a\lambda) \right\},$$

$$C_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\delta_1 - \delta_2)} \left\{ \sum_{k=0}^\infty (2k+1)(-1)^k A_k^{(1)} \left[ (\delta_1 + \delta_2) e^{-2\delta_2 h \lambda} - 2\delta_2 e^{-(\delta_1 + \delta_2) h \lambda} \right] \times \right. \\ \left. \times J_{2k+1}(a\lambda) + 2 \frac{\delta_1}{\delta_2} \sum_{k=1}^\infty k(-1)^{k-1} B_k^{(1)} \left[ (\delta_1 + \delta_2) e^{-2\delta_2 h \lambda} - 2\delta_1 e^{-(\delta_1 + \delta_2) h \lambda} \right] J_{2k}(a\lambda) \right\}.$$

Полагая  $A_n^{(1)} = \frac{\sigma_0 \delta_1 \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} x_n$ ,  $B_n^{(1)} = \frac{\sigma_0 \delta_1}{\delta_1 - \delta_2} y_n$ , для нахождения  $x_n, y_n$  получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$x_n = \sum_{k=0}^\infty d_{nk}^{(11)} x_k + \sum_{k=1}^\infty d_{nk}^{(12)} y_k + f_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ y_n = \sum_{k=0}^\infty d_{nk}^{(21)} x_k + \sum_{k=1}^\infty d_{nk}^{(22)} y_k \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

в которой

$$f_0 = 1, f_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ d_{nk}^{(11)} = \frac{4k+2}{(\delta_1 - \delta_2)^2} (-1)^{n+k} \left[ \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) S_{2n+1, 2k+1}^{(11)} + \right. \\ \left. + \delta_1 (\delta_1 + \delta_2) S_{2n+1, 2k+1}^{(22)} - 4\delta_1 \delta_2 S_{2n+1, 2k+1}^{(12)} \right], \\ d_{nk}^{(12)} = \frac{4k}{(\delta_1 - \delta_2)^2} (-1)^{n+k-1} (\delta_1 + \delta_2) \left[ S_{2n+1, 2k}^{(11)} + S_{2n+1, 2k}^{(22)} - 2S_{2n+1, 2k}^{(12)} \right], \\ d_{nk}^{(21)} = \frac{4k+2}{(\delta_1 - \delta_2)^2} (-1)^{n+k-1} \delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) \left[ S_{2n, 2k+1}^{(11)} + S_{2n, 2k+1}^{(22)} - 2S_{2n, 2k+1}^{(12)} \right],$$

$$d_{nk}^{(22)} = \frac{4k}{(\delta_1 - \delta_2)^2} (-1)^{n+k} \left[ \delta_1 (\delta_1 + \delta_2) S_{2n,2k}^{(11)} + \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) S_{2n,2k}^{(22)} - 4\delta_1 \delta_2 S_{2n,2k}^{(12)} \right];$$

$$s_{m,l}^{(ij)} = \int_0^\infty \lambda^{-1} e^{-(\delta_i + \delta_j)h\lambda} J_m(a\lambda) J_l(a\lambda) d\lambda.$$

Значения интегралов [5]

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\varphi(x)]^{-m-l} e^{i(m-l)x} J_{m+l}[c\varphi(x)] \cos^{m+l} x dx = \frac{\pi J_m(ac) J_l(bc)}{(2a)^m (2b)^l},$$

$$\varphi(x) = \sqrt{2(a^2 e^{ix} + b^2 e^{-ix})} \cos x, \quad \int_0^\infty x^{-1} e^{-px} J_\nu(qx) dx = \frac{q^\nu}{\nu} \left( p + \sqrt{p^2 + q^2} \right)^{-\nu}$$

позволяют величины  $s_{m,l}^{(ij)}$  представить в форме, более удобной для исследования свойств бесконечной системы (13). Полагая  $b = a$ ,  $c = \lambda$ ,  $\nu = m + l$ ,  $p = (\delta_i + \delta_j)h$ ,  $q = \varphi(x)$ , имеем последовательно

$$\varphi(x) = 2a \cos x, \quad J_m(a\lambda) J_l(a\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{m+l}(2a\lambda \cos x) \cos(m-l)x dx,$$

$$\int_0^\infty \lambda^{-1} e^{-(\delta_i + \delta_j)h\lambda} J_{m+l}(2a\lambda \cos x) d\lambda = \frac{1}{m+l} f_{m+l}(x),$$

$$s_{m,l}^{(ij)} = \frac{2}{\pi(m+l)} \int_0^{\pi/2} f_{m+l}^{(ij)}(x) \cos(m-l)x dx,$$

$$f_{m+l}^{(ij)}(x) = \left[ \frac{2a \cos x}{(\delta_i + \delta_j)h + \sqrt{(\delta_i + \delta_j)^2 h^2 + 4a^2 \cos^2 x}} \right]^{m+l},$$

$$f_{m+l}^{(ij)}(x) \geq 0, \quad \frac{d}{dx} f_{m+l}^{(ij)}(x) \leq 0 \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad f_{m+l}^{(ij)}(x) \leq f_{m+l}^{(ij)}(0),$$

$$\left| s_{m,l}^{(ij)} \right| \leq \frac{2}{\pi(m+l)} \int_0^{\pi/2} f_{m+l}^{(ij)}(x) dx \leq \frac{1}{m+l} f_{m+l}^{(ij)}(0), \quad \text{т. е.}$$

$$\left| s_{m,l}^{(ij)}(\varepsilon_{ij}) \right| \leq \frac{\varepsilon_{ij}^{m+l}}{m+l}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{2a}{(\delta_i + \delta_j)h + \sqrt{(\delta_i + \delta_j)^2 h^2 + 4a^2}} \quad (0 < \varepsilon_{ij} < 1). \quad (14)$$

Тогда

$$\sigma_n^{r1}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| d_{nk}^{r1}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}) \right| \rightarrow 0 \quad (r=1,2),$$

$$\sigma_n^{r2}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| d_{nk}^{r2}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}) \right| \rightarrow 0 \quad (r=1,2)$$

при  $n \rightarrow \infty, 0 < \varepsilon_{ij} < 1$ , т. е. бесконечная система (13) квазирегулярна при любых допустимых значениях исходных параметров  $a, h, \delta_j$ . Поскольку  $\sigma_n^{r1}(0,0,0) = 0$ ,  $\sigma_n^{r2}(0,0,0) = 0$  ( $n = 0,1,2,\dots; r = 1,2$ ), то существуют значения  $\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{12}^*, \varepsilon_{22}^*$  такие, что при  $0 < \varepsilon_{11} < \varepsilon_{11}^*, 0 < \varepsilon_{12} < \varepsilon_{12}^*, 0 < \varepsilon_{22} < \varepsilon_{22}^*$  ( $\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{12}^*, \varepsilon_{22}^* < 1$ ) бесконечная система (13) вполне регулярна.

На основании представлений (1), (3), (12) и равенств  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$  (при  $\theta = 0, \theta = \pi$ ) для нормальных напряжений  $\sigma_x|_{\theta=0}, \sigma_x|_{\theta=\pi}, \sigma_y|_{\theta=0}, \sigma_y|_{\theta=\pi}$  получаем асимптотические формулы

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \sim \frac{\sigma_0}{sh\xi} \begin{Bmatrix} \delta_1 \delta_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x_n e^{-(2n+1)\xi} \quad (\xi \rightarrow 0 (x \rightarrow \pm a)).$$

В силу симметрии задачи по координате  $x$  коэффициент интенсивности нормальных напряжений один и тот же для обеих вершин разреза:

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \sigma_y \sqrt{2(x-a)} \right]_{|\theta=0} = \sigma_0 \sqrt{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x_n. \quad (15)$$

Оценки (14) обеспечивают сходимость ряда в формуле (15).

Разлагая величины  $s_{m,l}^{(ij)}$  по степеням параметра  $\varepsilon_{ij}$ , имеем:

$$s_{1,1}^{(ij)} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ij}^2 + \frac{1}{8} \varepsilon_{ij}^4 + \frac{1}{32} \varepsilon_{ij}^6 + O(\varepsilon_{ij}^8), \quad s_{1,2}^{(ij)} = s_{2,1}^{(ij)} = \frac{1}{8} \varepsilon_{ij}^3 + \frac{1}{16} \varepsilon_{ij}^5 + O(\varepsilon_{ij}^7),$$

$$s_{2,2}^{(ij)} = \frac{3}{32} \varepsilon_{ij}^4 + \frac{1}{16} \varepsilon_{ij}^6 + O(\varepsilon_{ij}^8), \quad s_{1,3}^{(ij)} = s_{3,1}^{(ij)} = \frac{1}{16} \varepsilon_{ij}^4 + \frac{1}{64} \varepsilon_{ij}^6 + O(\varepsilon_{ij}^8),$$

$$s_{1,4}^{(ij)} = s_{4,1}^{(ij)} = \frac{1}{32} \varepsilon_{ij}^5 + O(\varepsilon_{ij}^7), \quad s_{1,5}^{(ij)} = s_{5,1}^{(ij)} = \frac{1}{64} \varepsilon_{ij}^6 + O(\varepsilon_{ij}^8).$$

Решая систему уравнений (13) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами порядка до  $\varepsilon_{ij}^4$ , получаем

$$x_0 = 1 + d_{00}^{(11)} + \frac{1}{4(\delta_1 - \delta_2)^4} \left[ \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) \varepsilon_{11}^2 + \delta_1 (\delta_1 + \delta_2) \varepsilon_{22}^2 - 4\delta_1 \delta_2 \varepsilon_{12}^2 \right]^2;$$

$$d_{00}^{(11)} = \frac{1}{2(\delta_1 - \delta_2)^2} \left[ \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) \left( \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^4 \right) + \delta_1 (\delta_1 + \delta_2) \left( \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{22}^4 \right) - 4\delta_1 \delta_2 \left( \varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^4 \right) \right];$$

$$x_1 = -\frac{1}{8(\delta_1 - \delta_2)^2} \left[ \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) \varepsilon_{11}^4 + \delta_1 (\delta_1 + \delta_2) \varepsilon_{22}^4 - 4\delta_1 \delta_2 \varepsilon_{12}^4 \right];$$

$$y_1 = \frac{\delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2)}{4(\delta_1 - \delta_2)^2} \left( \varepsilon_{11}^3 + \varepsilon_{22}^3 - 2\varepsilon_{12}^3 \right); d_{00}^{(11)} > 0, x_0 > 1, x_1 < 0, y_1 > 0;$$

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a} [x_0 + 3x_1].$$

В заключение отметим, что разложения (10) позволяют реализовать антисимметричный по координате  $x$  вариант задачи, а в общем случае разбиение краевой задачи на симметричную и антисимметричную дает возможность исследовать ее с помощью разложений (9), (10) при произвольных граничных условиях на берегах разреза.

### Список литературы

1. Соловьев, А. И. Краевые задачи теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и параболической систем координат [Текст] / А. И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 2(70). – Х., 2012. – С. 117–127.
2. Соловьев, А. И. О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин [Текст] / А. И. Соловьев, А. В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 101–110.
3. Соловьев, А. И. Равновесие ортотропной пластины, ослабленной двумя параллельными разрезами [Текст] / А. И. Соловьев, А. В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 63. – Х., 2014. – С. 115–126.
4. Проценко, В. С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В. С. Проценко, А. И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 973–982.
5. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

Поступила в редакцию 18.03.2016

## **Пружня рівновага ортотропної півплощини, ослабленої еліптичним отвором**

Запропоновано аналітичний метод дослідження крайових задач теорії пружності для ортотропної півплощини з еліптичним отвором. За допомогою співвідношень між базисними гармонічними функціями у декартових і еліптичних системах координат отримано квазірегулярну нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь з матричними коефіцієнтами, які швидко зменшуються. Для граничного випадку, коли півплощина ослаблена подовжнім розрізом, отримано просту асимптотичну формулу для коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень.

**Ключові слова:** ортотропна півплощина, розріз, гармонічна функція.

## **Equilibrium of the Orthotropic Half-Plane Weakened by an Alliptical Hole**

Analytical method of solving the boundary-value problems of theory of elasticity for orthotropic half-plane weakened by an alliptical hole is suggested. It is based on applying the ratio between basis harmonic functions in Cartesian and elliptic coordinate systems and leads to quasi-regular infinite systems of linear algebraic equations with quickly decreasing matrix coefficients. In the limiting case, when the half-plane weakened by a longitudinal section, derive a simple asymptotic formula for the coefficient of the intensity of normal stresses.

**Key words:** orthotropic half-plane, section, harmonic function.