

Сравнение надежности методов поиска экстремума в условиях помех при использовании многоэлементных датчиков

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Проанализирован подход получения и обработки данных, полученных при проведении измерений в условиях помех с использованием матричного измерительного устройства для проведения измерений. Для обработки полученных данных применен метод весовой аппроксимации. Рассмотрена связь с авторегрессией. Предложена программа для имитации работы измерительного устройства с целью оценки эффективности предложенного алгоритма обработки данных в условиях помех. Приведены и исследованы результаты измерений, полученные методом градиентного спуска с усреднением по девяти точкам и методом Ньютона.

Ключевые слова: весовая аппроксимация, матричный измерительный электрод, многоэлементный датчик, коэффициенты регрессионной зависимости, точка экстремума, метод градиентного спуска, метод Ньютона.

1. Введение и постановка задачи

Проблема поиска экстремумов скалярных полей постоянно стоит в повестке дня при решении различных задач техники, в частности при решении задачи диагностики состояния сложной структуры. Это сопряжено, как правило, с необходимостью учета наличия внешних помех, которые ставят под сомнение достоверность результатов, полученных с помощью измерительных приборов. В качестве метода повышения эффективности обработки измерений для поиска координат тех точек в пространстве измерений, которые характеризуются экстремальным значением измеряемой величины, предлагается применять многоэлементный датчик. Подобная измерительная система использует усреднение данных не только по времени, но и в пространстве. Это приводит к необходимости модификации стандартных методов оптимизации с целью минимизации влияния помех. Одним из направлений является применение метода весовой аппроксимации. В некоторых работах этого направления употребляется эквивалентный термин «локальная аппроксимация» [1, 2].

Пусть заданы значения функции $f(\vec{r})$ в узловых точках: (\vec{r}_i, z_i) , $i = 1..n$. Здесь \vec{r}_i - координаты узлов в N - мерном линейном пространстве, $z_i = f(\vec{r}_i)$. Вектору \vec{r}_0 соответствует фиксированная точка. Требуется определить аппроксимирующую функцию в классе линейных комбинаций некоторого базисного набора функций $\phi_k(\vec{r})$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$: $\Phi(\vec{r}) = \vec{a}^T \vec{\phi}(\vec{r} - \vec{r}_0)$, $\Phi(\vec{r}_i) \approx z_i$.

С помощью найденного приближения можно найти как приближение заданной функции в фиксированной точке, так и производные с целью нахождения экстремумов.

Целью настоящей работы является обоснование метода поиска экстремума функции в условиях помех при использовании многоэлементного датчика и сравнение эффективности поиска минимума разными методами при различных уровнях зашумленности.

2. Весовая аппроксимация

Введем в рассмотрение веса как скалярные функции нормы разности текущего вектора \vec{r} и фиксированного \vec{r}_0 : $\rho_i \Rightarrow \rho_i(\vec{r}) \equiv \rho(\|\vec{r} - \vec{r}_i\|)$. Узлам, находящимся недалеко от текущей точки в процессе аппроксимации придается большее значение, чем удаленным узлам. Стандартным видом весовых функций является следующий:

$$\rho(d) = 1 / \left(1 + (d / H)^2\right). \quad ((1))$$

Параметр H называется параметром, управляющим локальностью. Стандартный метод наименьших квадратов (МНК) отвечает предельному значению $H \rightarrow \infty$; в этом случае все веса можно принять равными единице.

Согласно МНК коэффициенты a_k находят из условия минимума функционала

$$Q(\vec{r}, \vec{a}) = \sum_{i=1}^n \left(z_i - \vec{a}^T \vec{\phi}(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \right)^2 \rho(\|\vec{r}_i - \vec{r}_0\|) \rightarrow \min_{\vec{a}}, \quad (2)$$

что приводит к нормальной системе уравнений $A\vec{a} = \vec{b}$, где A и \vec{b} – матрица и вектор со следующими компонентами:

$$A_{ks}(\vec{r}) = A_{sk}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \phi_k(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \phi_s(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \rho(\|\vec{r} - \vec{r}_i\|), \quad (3)$$

$$b_k(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n z_i \phi_k(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \rho(\|\vec{r} - \vec{r}_i\|).$$

После решения системы уравнений МНК аппроксимирующая функция приобретает следующий вид:

$$\Phi(\vec{r}) = D\vec{\phi}(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (4)$$

где $D = \vec{b}^T B$, $B = A^{-1}$.

Пусть исходная функция является линейной комбинацией базисных: $f(\vec{r}) = \vec{c}^T \vec{\phi}(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Тогда аппроксимирующая функция совпадает с заданной, т. е. найденная аппроксимация точна для заданного класса аппроксимируемых функций. Это вытекает из того, что минимум выпуклого функционала $Q(\vec{r}, \vec{a})$ (2) по величинам a_k равен нулю, если $f(\vec{r}_i) = z_i = \vec{c}^T \vec{\phi}(\vec{r}_i - \vec{r}_0)$, и достигается на векторе $\vec{a} = \vec{c}$.

В отличие от стандартного подхода искомым вектор a_k , вообще говоря, оказывается функцией текущей точки \vec{r} , т. е. использование весовой аппроксимации сопряжено с необходимостью решать заново систему уравнений (3) для каждого нового значения \vec{r} . Для упрощения вычисления аппроксимирующей функции и её производных в фиксированной точке \vec{r}_0 используется линейность по результатам измерений z_i , что связано с линейностью системы (3).

3. Связь с авторегрессией

Формулы авторегрессии определяются как тот или иной вид усреднения по узлам сетки, принадлежащим области усреднения Ω . Обычно авторегрессия как таковая используется в одномерном случае, когда область измерений Ω представлена подмножеством последовательно расположенных равноотстоящих узлов x_i , $x_{i+1} - x_i = const$, $i = 0..n$; фиксированной является точка x_{n+1} . В этой точке проводится оценка значения функции по следующей формуле:

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^n \omega_i(x_{n+1}) z_i.$$

В данной работе дополнительно потребуем соблюдение точности для класса функций, являющихся линейным разложением по некоторому базису:

$$f(\vec{r}) = \vec{c}^T \vec{\phi}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \sum_{z_i \in \Omega} \omega_i(\vec{r}) z_i. \quad (5)$$

Согласно формуле (4) весовая аппроксимация приводит к варианту авторегрессии, поскольку вектор \vec{b} линейно зависит от набора узловых значений аппроксимируемой функции z_i :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) = \vec{b}^T B \vec{\phi}(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^m B_{ks} \phi_s(\vec{r} - \vec{r}_0) \left(\sum_{i=1}^n z_i \phi_k(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \rho(\|\vec{r} - \vec{r}_i\|) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n z_i \left\{ \rho(\|\vec{r} - \vec{r}_i\|) \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^m B_{ks} \phi_s(\vec{r} - \vec{r}_0) \phi_k(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \right\}. \end{aligned}$$

Как результат коэффициенты $\omega_i(\vec{r})$ авторегрессионной формулы могут быть записаны так:

$$\omega_i(\vec{r}) = \rho(\|\vec{r} - \vec{r}_i\|) \left\{ \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^m B_{ks} \phi_k(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \phi_s(\vec{r} - \vec{r}_0) \right\}. \quad (6)$$

В работе [2] приведены результаты вычисления коэффициентов $\omega_i(\vec{r}_0)$ в двумерном пространстве для того случая, когда координаты узлов отличаются от соответствующих координат фиксированной точки \vec{r}_0 не более чем на единицу, а базисные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_{00}(\vec{r}) &= 1, \phi_{10}(\vec{r}) = x_1, \phi_{01}(\vec{r}) = x_2, \\ \phi_{20}(\vec{r}) &= x_1^2, \phi_{11}(\vec{r}) = x_1 x_2, \phi_{02}(\vec{r}) = x_2^2. \end{aligned}$$

На рис. 1 приведено расположение узлов с соответствующей нумерацией результатов измерения. Используем двойную нумерацию; формулы для коэффициентов авторегрессионной формулы принимают вид

$$\omega_{ij}(\vec{r}_0) = \rho(\|\vec{r}_{ij} - \vec{r}_0\|) \sum_{k=0}^5 B_{k0} \phi_k(\vec{r}_{ij} - \vec{r}_0), \quad i, j = -1, 0, 1.$$

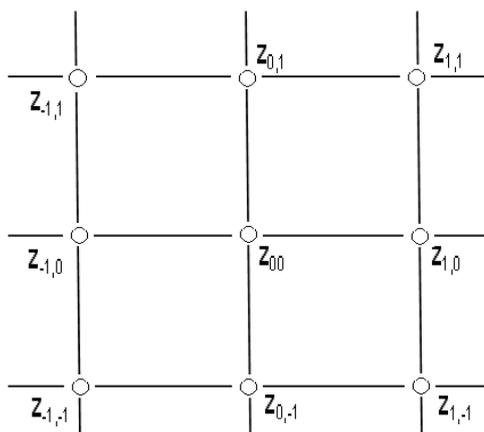


Рис. 1. Нумерация точек измерения

Таким образом, результат сглаживания в фиксированной точке такой:

$$\Phi(\vec{r}_0) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \omega_{ij}(\vec{r}_0) z_{ij}. \quad (7)$$

Пусть коэффициент локальности равен единице: $H = 1$.

Аппроксимирующая функция является квадратичной:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + \vec{b}^T (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^T G (\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (8)$$

где вектор \vec{b} градиента аппроксимирующей функции и матрица Гессе G линейно выражаются через веса в фиксированной точке:

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \Phi(\vec{r}_0) &= \frac{1}{15} \left\{ 11z_{0,0} + 2 \sum_{|i|+|j|=1} z_{ij} - \sum_{|i|+|j|=2} z_{ij} \right\}; \\ b_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} &= \frac{3}{7} \left\{ \frac{1}{2} (z_{1,0} - z_{-1,0}) + \frac{1}{3} (z_{1,-1} - z_{-1,-1} + z_{1,1} - z_{-1,1}) \right\}; \\ b_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} &= \frac{3}{7} \left\{ \frac{1}{2} (z_{0,1} - z_{0,-1}) + \frac{1}{3} (z_{1,1} - z_{1,-1} + z_{-1,1} - z_{-1,-1}) \right\}; \quad (9) \\ G_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} &= \frac{1}{15} \{ 4 \sum_{|i|+|j|=2} z_{i,j} + 7(z_{0,-1} + z_{0,1}) - 8(z_{-1,0} + z_{1,0}) - 14z_{0,0} \}; \\ G_{12} = G_{21} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} &= \frac{1}{2} \{ z_{-1,-1} + z_{1,1} - z_{-1,1} - z_{1,-1} \}; \\ G_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} &= \frac{1}{15} \{ 4 \sum_{|i|+|j|=2} z_{i,j} + 7(z_{-1,0} + z_{1,0}) - 8(z_{0,-1} + z_{0,1}) - 14z_{0,0} \}. \end{aligned}$$

Располагая найденными приближениями как заданной функции, так и её производных, можно использовать стандартные методы оптимизации.

4. Учет помех измерений

Предположим, что результаты измерений «зашумлены»:

$$z_i = f(\vec{r}_i) + \xi_i$$

где ξ_i - независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и заданной дисперсией σ^2 . В этом случае классические способы методов поиска экстремумов либо неработоспособны, либо с некоторой точностью применимы при очень малой дисперсии шума. Предлагается в качестве оценок измеряемой функции и её производных использовать результаты весовой аппроксимации. В качестве одной из практически важных задач в таком случае является следующая: определить интервал допустимых значений дисперсии шума, при которых поиск экстремума проводится достаточно эффективно. Преобразование к виду авторегрессии позволяет существенно уменьшить количество вычислений, поскольку не требуется решать систему линейных уравнений. Измерительный прибор в этом случае приобретает очень простую электрическую схему, поскольку реализация получения сигнала сводится к параллельным и последовательным соединениям, дополненным соответствующими коэффициентами усиления, роль которых играют весовые коэффициенты в формулах (8).

Существенно то, что матричные датчики позволяют извлечь дополнительную информацию из результатов измерений. Например, открывается возможность выбора направления перемещения устройства для нахождения точки экстремума.

5. Тестовый пример имитации работы оптимизирующего устройства

Предлагается программа для имитации работы измерительного устройства с целью оценки эффективности предложенного алгоритма обработки данных в условиях помех (рис. 2).

На левой панели инструментов присутствуют устанавливаемые вручную параметры, такие, как масштаб экрана (LX, NX, NY), вариант функции, моделирующей вид поверхности регрессии (Nomb F), координаты начального положения электрода и его размер (X0 instrum, Y0 instrum, Size instr). Можно выбрать вариант изображения инструмента (Var Gr Instrument), отображение сетки (Grid), видимость функции (Are Levels) и электрода (Instrum). Осуществляется также выбор шага электрода (Step). По нажатию кнопки One Step электрод перемещается на один шаг указанной величины.

На правой панели инструментов отображаются текущее значение функции в центральной точке электрода (F), значения производных (Px, Py) и текущие координаты электрода (x, y). Ниже можно выбрать количество шагов, через которое электрод будет отображать свое перемещение (k_step), и задать уровень шума (Noise). В F_middle отображается значение функции, вычисленное по предложенному алгоритму с учетом наличия заданного уровня шума. Выбрав функциональность Middle, значение функции будет усредняться по всем элементам электрода, будут также отображены значения координат электрода (x_middle, y_middle) и количество проделанных шагов (n_steps).

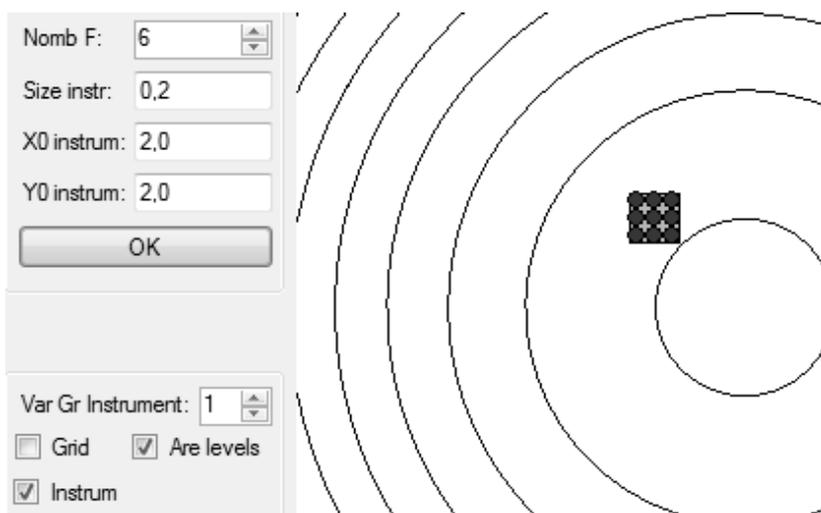


Рис. 2. Фрагмент формы для иллюстрации работы процесса оптимизации

Задана простая квадратичная функция.

Значение экстремума заданной функции равняется -0,01.

Координаты экстремума: $X=2,5$; $Y=2,5$;

Интервал 10% - го допуская: -0,0095...-0,0105;

Координаты начального положения электрода: $X=2,0$; $Y=2,0$;

Размер шага – 0,125.

В таблице 1 приведено сравнение двух методов оптимизации в обстановке помех. Показано, сколько шагов необходимо произвести при использовании шагового градиентного спуска и метода Ньютона для достижения значения экстремума функции с погрешностью 10 %.

Табл.1 Сравнение эффективности поиска минимума при различных уровнях зашумленности

σ шума	Количество шагов	
	Метод градиентного спуска с усреднением по девяти точкам	Метод Ньютона
0,0001	55	1
0,0016	60	-
0,0064	61	-
0,0128	246	-
0,0256	250	-

Как видно из табл. 1, метод Ньютона эффективен для нахождения экстремума функции при наличии очень малых помех. Однако когда дисперсия внешних помех растет, данный метод расходится и становится невозможным к применению. Метод градиентного спуска с усреднением по девяти точкам сходится медленнее, однако даже при наличии внешнего шума производит движение в сторону экстремума.

Ниже приведены графики, показывающие измеренное значение функции на каждом шаге метода градиентного спуска с усреднением по девяти точкам (рис.3) и метода Ньютона (рис. 4).

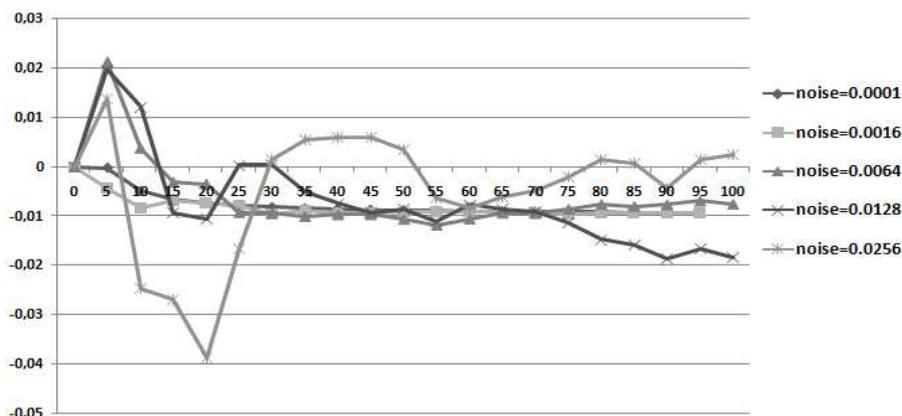


Рис. 3. Оценка текущего расстояния от точки минимума при использовании шагового градиентного спуска с адаптацией длины шага

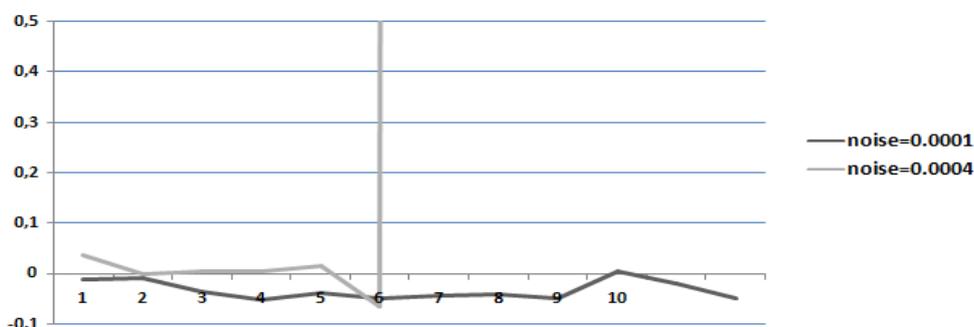


Рис. 4. Оценка текущего расстояния от точки минимума при использовании метода Ньютона

Анализируя график на рис. 1, можно отметить, что наличие шума со среднеквадратичным отклонением, не превышающим значения 0.0064 включительно, практически не влияет на точность измерений. Значение экстремума функции с погрешностью 10 % достигается в среднем за 60 шагов. Если $\sigma > 0.0128$, погрешность измерений увеличивается на 0.01, однако движение в направлении экстремума продолжается.

Согласно графику на рис. 2, при наличии малого шума $\sigma = 0.0001$ экстремум функции найден на первом шаге. При возрастании величины шума до 0.0004 и более процесс поиска минимума расходится

Выводы и заключение

Согласно формулам (9) в каждой текущей точке значения функции и её производных не выше второго порядка могут быть приближённо найдены без решения систем уравнений МНК. Управление локальностью осуществляется выбором параметра локальности H . Указанные формулы и метод их получения являются обобщением метода одномерной аппроксимации с помощью многоточечных формул, приведенных в работе [3]. Рассматриваемый в статье метод градиентного спуска с усреднением по девяти точкам показал хорошую надежность при наличии помех величиной 0.0256. В дальнейшем планируется с целью оптимизации метода рассмотреть другие конструкции пространственного расположения эле-

ментов датчика и провести сравнительную характеристику с другими методами оптимизации.

Список литературы

1. Катковник, В. Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. Метод локальной аппроксимации [Текст] / В. Я. Катковник - М.: Глав.ред. физ-мат лит., 1985.- 306 с.
2. Лоскутов, А. Ю. Применение метода локальной аппроксимации для прогноза экономических показателей [Текст] / А. Ю. Лоскутов, Д. И. Журавлев, О. Л. Котляров // Вопросы анализа и управления риском, 2003.Т. №1 - С. 21–31.
3. Кендалл, М. Многомерный статистический анализ и временные ряды [Текст] / М. Кендалл, А. Стьюарт. - М.: Наука, 1976. – 736 с.
4. Дуброва, Т. А. Статистические методы прогнозирования в экономике [Текст] / Т. А. Дуброва - М.: Моск. междунар. ин-т эконометрики, информатики, финансов и права, 2003. – 60 с.
5. Смирнов, Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики [Текст] / Н. В.Смирнов, И. В. Дунин-Барковский - М.: Наука, 1969. – 512 с.

Поступила в редакцию 20.05.2015

Порівняння надійності методів пошуку екстремуму в умовах перешкод при використанні багатоеlementних датчиків

Проаналізовано підхід отримання і оброблення даних, що одержуються при проведенні вимірювань в умовах шуму з використанням матричного вимірювального пристрою для проведення вимірювань. Для оброблення отриманих даних застосовується метод вагової апроксимації. Розглянуто зв'язок з авторегресією. Запропоновано програму для імітації роботи вимірювального пристрою з метою оцінювання ефективності запропонованого алгоритму оброблення даних в умовах шуму. Наведено і досліджено результати вимірювань, отримані методом градієнтного спуску з розподіленням по дев'яти точках і методом Ньютона.

Ключові слова: вагова апроксимація, матричний вимірювальний електрод, багатоеlementний датчик, коефіцієнти регресійної залежності, точка екстремуму, метод градієнтного спуску, метод Ньютона.

Comparison of methods for finding an extremum in noisy environments using multi-element sensors

An approach for obtaining and processing the data obtained during the measurement in noisy environments is analyzed. It is proposed to use a matrix measuring device to perform measurement. For data processing applied the method of weighted approximation. The connection with the auto-regressive is reviewed. The program to simulate the operation of a measuring device to measure the effectiveness of the proposed algorithm of data processing in noisy environments is proposed. Presented and analyzed the results of measurements obtained by gradient descent averaged over 9 points and Newton's method.

Keywords: weighted approximation, matrix measuring electrode, multi-element sensor, the regression coefficients, the point of extremum, the method of steepest descent, Newton method.