

Исследование вероятностных характеристик конструкции с использованием квадратичной модели критериальной функции

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрена проблема определения вероятности разрушения композитной конструкции с использованием квадратичной модели критериальной функции. Проведено исследование по определению зависимости между значением приложенной сосредоточенной нагрузки и вероятностью работоспособности исследуемого объекта с помощью специально разработанного программного обеспечения; полученная зависимость отображена графически.

Ключевые слова: надежность, вероятность работоспособности, вероятность разрушения, квадратичная модель критериальной функции, композитная конструкция.

1. Введение

Надежность как качественная характеристика всегда принималась во внимание при решении различных вопросов эксплуатации и технического обслуживания авиационных конструкций. Количественное определение надежности появилось с возникновением теории надежности. Математической платформой теории надежности являются теория вероятностей и математическая статистика. Действительно, отказы в конструкциях происходят случайным образом в неожиданные моменты времени. Это характерно даже для множества однотипных конструкций, изготовленных на одном предприятии и поставленных на эксплуатацию в одно и то же время. Первоначально кажется, что никакой закономерности в появлении отказов нет. Тем не менее такая закономерность существует. Проявляется она тогда, когда ведется наблюдение не за одной, а за многими конструкциями, находящимися в эксплуатации.

Одно из основных требований теории надежности - это необходимость установить принадлежность всех возможных состояний объекта к одному из двух противоположных классов: работоспособные и неработоспособные. Работоспособным называют такое состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической и/или конструкторской (проектной) документации. Неработоспособным будет такое состояние, при котором значение хотя бы одного из параметров не соответствует требованиям документации.

На этапе проектирования расчёт надёжности проводят с целью прогнозирования надёжности работы проектируемой системы. На этапе испытаний и эксплуатации расчёт надёжности выполняют для оценки количественных показателей надёжности спроектированной системы.

В качестве основной количественной меры надежности, характеризующей закономерность появления отказов во времени, принята вероятность безотказной работы (вероятность работоспособности). Это вероятность того, что за определенное время и в заданных условиях отказа не происходит [1].

С помощью вероятностного подхода при проектировании объектов авиационных конструкций становится возможным определить вероятность безотказной работы (работоспособности) объекта, основываясь на его известных

случайных характеристиках. Такой подход учитывает влияние, которое случайные факторы оказывают на объект при его проектировании, изготовлении и эксплуатации. С целью максимального повышения точности в оценке вероятности работоспособности таких конструкций разрабатываются специальные методы [2].

2. Математическая постановка задачи

В основе данной статьи лежит использование квадратичной модели критериальной функции для определения вероятности работоспособности/разрушения композитного стержня. Построение квадратичной модели основано на методах, применяемых при построении аппроксимирующей линейной модели, но с добавлением квадратичной составляющей, что потенциально увеличивает точность аппроксимации [3].

В качестве объекта исследования был принят каркас раскоса шасси самолета Ан-140 (рис. 1). Исследуемый объект представляет собой полый стержень, созданный посредством намотки композиционной ленты.

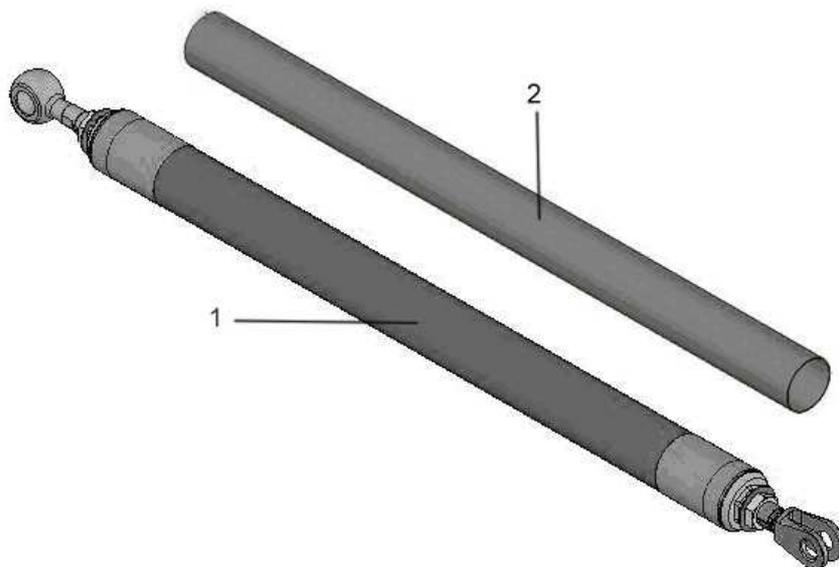


Рис. 1. Раскос шасси самолета Ан-140 (1) и каркас этого раскоса (2)

Критериальная функция представляет собой напряжение, которое возникает в жестко закрепленном с одной стороны композитном стержне при действии на него сосредоточенной сжимающей нагрузки. Эта функция представлена в виде левой части условия работоспособности

$$\frac{N}{F} + \eta_{\sigma} < A, \quad (1)$$

где F - площадь поперечного сечения каркаса;

N - сила, приложенная к нему;

η_{σ} - случайная добавка предела прочности материала;

A - граница работоспособности, задаваемая как математическое ожидание предела прочности для материала изделия (см. формулу (3)).

Условие работоспособности исследуемого объекта можно записать в виде

$$\lambda(p, \eta) < \Lambda, \quad (2)$$

где левая часть условия $\lambda(p, \eta)$ названа критериальной функцией;

p – вектор номинальных параметров объекта;

η – вектор случайных разбросов параметров объекта (размерность векторов $1..n$, где n – число случайных параметров исследуемого объекта);

Λ - ограничение.

Ограничение Λ представляет собой предел прочности для заданного материала – σ_ϵ . Но предел прочности σ_ϵ также является случайной величиной, которую можно представить в виде

$$\sigma_\epsilon = \bar{m}_{\sigma_\epsilon} + \eta_{\sigma_\epsilon}, \quad (3)$$

где $\bar{m}_{\sigma_\epsilon}$ - математическое ожидание предела прочности;

η_{σ_ϵ} - случайная добавка предела прочности материала.

Следовательно, условие работоспособности можно переписать в виде

$$\lambda(p, \eta) - \eta_{\sigma_\epsilon} < \bar{m}_{\sigma_\epsilon}. \quad (4)$$

Вероятность работоспособности объекта P_p можно определить как вероятность выполнения условия (2):

$$P_p = P[\lambda(p, \eta) - \eta_{\sigma_\epsilon} < \bar{m}_{\sigma_\epsilon}]. \quad (5)$$

Квадратичную модель строят для определения закона распределения КФ и его параметров. При этом критериальную функцию аппроксимируют другой функцией, для которой известен закон распределения.

Квадратичную модель (КМ) используют для аппроксимации критериальной функции квадратичной функцией и строят в виде

$$\lambda_{KM}(\eta) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n b_i \eta_i + \sum_{i=1}^n c_i \eta_i^2 - \eta_{\sigma_{\epsilon p}}, \quad (6)$$

где $\lambda_{KM}(\eta)$ – КФ, аппроксимированная квадратичной функцией;

λ_0 – свободный член квадратичной модели;

b_i, c_i – коэффициенты квадратичной модели;

η_i – вектор случайных возмущений;

$\eta_{\sigma_{\epsilon p}}$ – случайный разброс;

n – количество случайных параметров исследуемого объекта.

На основании центральной предельной теоремы можно утверждать, что модель имеет нормальный закон распределения. Параметры нормального закона определяют по следующим зависимостям:

- математическое ожидание

$$M[\lambda_{KM}] = \lambda_0; \quad (7)$$

- дисперсия

$$D[\lambda_{KM}] = \sum_{i=1}^n (b_i \sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^n (c_i \sigma_i^2)^2 + (\sigma_{\sigma_{\epsilon p}})^2; \quad (8)$$

- среднеквадратичное отклонение (с.к.о.)

$$\sigma[\lambda_{KM}] = \sqrt{D[\lambda_{KM}]} . \quad (9)$$

Используя параметры нормального закона распределения, можно вычислить соответствующее значение безразмерного аргумента функции Гаусса:

$$U[\lambda_{KM}] = \frac{\bar{m}_{\sigma_{\text{ср}}} - M[\lambda_{KM}]}{\sigma[\lambda_{KM}]} . \quad (10)$$

Вероятность работоспособности по модели может быть определена как

$$P_p = P[\lambda < \Lambda] = F(\Lambda) = \Phi(U[\lambda_{KM}]) , \quad (11)$$

где $F(\Lambda)$ - значение функции распределения случайной величины λ в точке $\lambda = \Lambda$;

$\Phi(U[\lambda_{KM}])$ - значение функции Гаусса при безразмерном аргументе функции Гаусса u , равном $U[\lambda_{KM}]$.

Чтобы определить вероятность работоспособности объекта P_p по полученному значению безразмерного аргумента $U[\lambda_{KM}]$, нужно воспользоваться таблицей функции Гаусса (табулированной функции распределения нормальных случайных величин) и по значению безразмерного аргумента $U[\lambda_{KM}]$ получить значение функции $\Phi(U[\lambda_{KM}])$, которое равняется вероятности работоспособности.

Задачу определения вероятности работоспособности решают в несколько этапов.

Этап 1. Построение граничной линейной модели КФ – секущей или касательной.

Этап 2. Проведение ускоренного статистического моделирования (УСМ) по построенной на первом этапе граничной линейной модели КФ. При проведении УСМ сохраняются наборы максимальных хвостовых реализаций КФ и соответствующих им случайных возмущений η в заданном объеме.

Этап 3. Составление системы уравнений на основе формулы (6) и решение её относительно неизвестных коэффициентов b_i и c_i .

Этап 4. Определение параметров нормального закона по формулам (7) - (10).

Этап 5. Вычисление безразмерного аргумента функции Гаусса по формуле (12) и на её основе определение вероятности работоспособности.

3. Исследование по определению зависимости вероятности работоспособности от приложенной нагрузки

Исходные параметры исследуемого объекта (каркаса раскоса шасси):

- длина = 69,5 см;
- площадь поперечного сечения = 4 см²;
- материал модели - углеродистая ЭЛПР - 3.08ПА.

Случайными параметрами исследуемого объекта будем считать:

- площадь поперечного сечения каркаса (F);
- силу, приложенную к нему (N);

– СКО σ_ϵ - границы работоспособности модели (Sigma).

Перечень случайных параметров объекта вместе с номинальными значениями параметров и разбросами приведен в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Номинальное значение	Разброс, %
Площадь поперечного сечения каркаса F (см ²)	4	20
Нагрузка N (кгс)	12000 - 21000	20
СКО σ_ϵ - границы работоспособности модели Sigma	0	30 (от Λ)

Разбросы взяты из работы [4].

Для определения вероятности работоспособности объекта исследованы несколько случаев нагружения - от 12000 до 21000 кгс.

Для каждого случая получено соответствующее значение безразмерного аргумента функции Гаусса, позволяющее оценить вероятность работоспособности/ разрушения. Эти данные приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты оценки вероятности работоспособности

Величина нагрузки (кгс)	Безразмерный аргумент функции Гаусса	Вероятность работоспособности по модели
12000	4,53689	0,999997
13000	4,45982	0,999995
14000	4,42602	0,99998
15000	4,05011	0,99997
16000	3,32518	0,99954
17000	3,31415	0,99953
18000	2,98270	0,99855
19000	2,64614	0,99585
20000	2,31866	0,98956
21000	1,99963	0,97670

Используя полученные данные, построен график зависимости вероятности работоспособности исследуемого объекта (каркаса раскоса самолета Ан-140) от приложенной нагрузки, изображенный на рис. 2.

Как показано на рис. 2, в точке, соответствующей нагрузке 18000 кгс, начинается резкое снижение вероятности работоспособности объекта. Полученные результаты совпадают с результатами испытаний раскоса самолета Ан-140 на АНТК «Антонов», где разрушение раскоса произошло при увеличении сжимающей нагрузки до 18000 кгс.

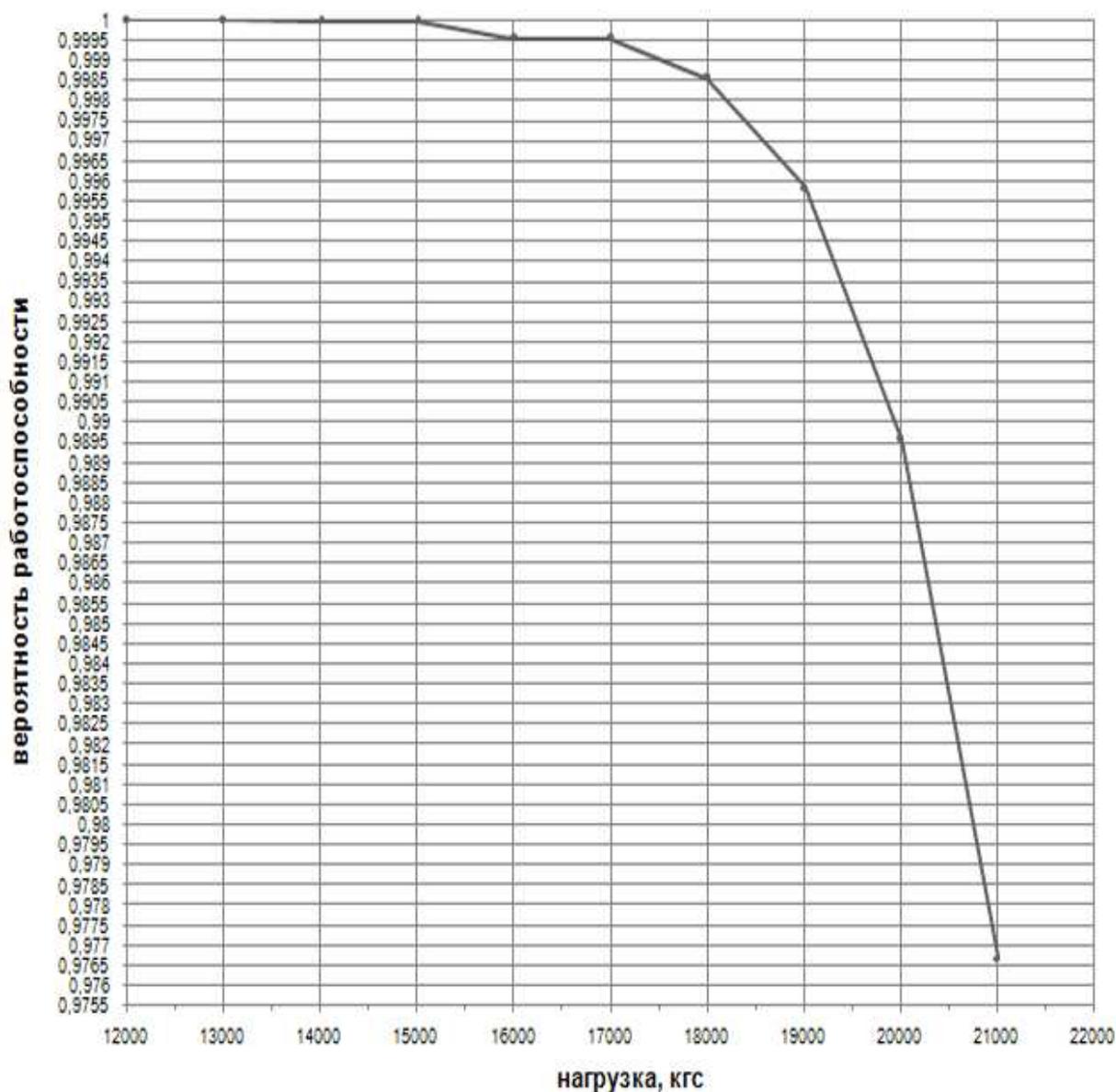


Рис. 2. График зависимости вероятности работоспособности от приложенной нагрузки

4. Выводы

В результате проведенных исследований, результаты которых совпадают с результатами реальных испытаний рассматриваемой конструкции, доказана эффективность применения квадратичной модели критериальной функции для определения вероятности работоспособности объекта.

В дальнейшем эта модель будет использована для определения вероятности работоспособности/разрушения конструкции при различных эксплуатационных режимах.

Список литературы

1. Голинкевич, Т. А. Прикладная теория надежности [Текст]: учебник для вузов. / Т.А. Голинкевич. – М.: Высш.шк., 1985.- 168 с.
2. Лежнина, М.В. Алгоритмы построения граничных линейных моделей критериальных функций для оценки вероятности работоспособности объектов аэрокосмической техники [Текст] / М.В. Лежнина, В.Г. Сухоребрий // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 12. – Х., 2002. – С. 63 - 74.
3. Сухоребрий, В.Г. Оценка качества граничных моделей для определения вероятности разрушения конструкции [Текст] / В.Г. Сухоребрий, А.С. Стерлева // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 24. – Х., 2004. – С. 242 - 249.
4. Оценка допускаемых напряжений для расчета устойчивости панели из композиционного материала при различных уровнях надежности [Текст] / А.С. Стерлева, Е.Т. Василевский, П.И. Горобец, Ю.В. Голочев // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 39. – Х., 2008. – С. 52 - 64.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Г. Сухоребрий, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 08.02.2013

Дослідження ймовірнісних характеристик конструкції з використанням квадратичної моделі критеріальної функції

Розглянуто проблему визначення ймовірності руйнування композитної конструкції з використанням квадратичної моделі критеріальної функції. Проведено дослідження з визначення залежності між значенням прикладеного зосередженого навантаження і ймовірністю працездатності досліджуваного об'єкта за допомогою спеціально розробленого програмного забезпечення; отримана залежність відображена графічно

Ключові слова: надійність, ймовірність працездатності, ймовірність руйнування, квадратична модель критеріальної функції, композитна конструкція.

The research of probability characteristics of the structure using the quadratic model of criterion function

The problem of determination probability of composite structure failure using the quadratic model of criterion function is considered. The research for determination the dependence between the value of the applied concentrated load and the probability of the test object operability was carried out with the help of specially developed software, the resulting dependence is displayed graphically.

Keywords: reliability, the probability of operability, the probability of failure, the quadratic model of the criterion function, composite structure.