

## Оптимизация распределения ограниченных ресурсов проекта

*Национальный университет гражданской защиты Украины*

Осуществлена алгоритмическая и программная реализация оптимизационного метода решения задачи распределения ограниченных ресурсов проекта на примере проекта установки автоматической системы пожарной сигнализации.

**Ключевые слова:** ресурс проекта, теория оптимизационного геометрического проектирования, метрические характеристики объекта, область допустимых решений.

### Введение

Задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов различной физической природы возникают во многих областях практической деятельности человека. Несмотря на значительный интерес к данной проблематике со стороны как отечественных, так и зарубежных исследователей [1-6], сложность данной задачи, которая в общем случае формулируется как многомерная многокритериальная задача теории исследования операций, а также значительная практическая ее ценность диктуют необходимость построения новых эффективных в вычислительном плане методик ее решения.

В данной работе развивается подход, предложенный в [7,8] и основанный на использовании результатов такого раздела теории оптимизационного геометрического проектирования, как размещение в ограниченной области геометрических объектов с переменными метрическими характеристиками [9].

Целями статьи являются: разработка приближенного оптимизационного метода решения задачи планирования ограниченных ресурсов проекта, алгоритмическая и программная реализация предложенного подхода.

### 1. Формулирование проблемы

Пусть имеется проект  $R$ , состоящий из  $N$  работ (операций)  $R = \{R_i\}, i = \overline{1, N}$ . На множестве работ  $R$  задано условие частичной упорядоченности вида  $R_i \prec R_j, (i, j) = \overline{1, N}, i \neq j$  (работа  $R_j$  непосредственно следует за работой  $R_i$ ), определенное конкретной последовательностью выполнения работ. Для каждой работы  $R_i$  известен ее объем  $V_i$ , выраженный в чел/ч,  $V_i = \text{const}$ . На проект в целом в каждый момент времени может быть выделено не более  $L_i$ , чел, непосредственных исполнителей работ.

Необходимо составить план выполнения работ проекта, оптимальный по требуемым ресурсам.

Рассмотрим данную задачу как задачу теории оптимизационного геометрического проектирования, в рамках которой свойства изучаемых объектов интерпретируются как геометрические характеристики. Тогда ресурсы проекта в целом можно представить как область  $R_0$  двумерного пространства  $OTW$ , где  $T$  – время проекта,  $W$  – характеристика необходимого объема трудовых ресурсов, согласованная с единицами измерения  $T$ .

Каждая работа  $R_i$  есть прямоугольник  $R_i = R_i(a_i, b_i)$ , причем  $a_i \times b_i = V_i$ ,  $a_i, b_i$  –

var. Характеристика  $a_i$  означает длительность, а характеристика  $b_i$  – число исполнителей работы  $R_i$  в каждый момент времени. Момент начала выполнения работы  $R_i$  и ее привязка к необходимому количеству трудовых ресурсов определяются параметрами  $v_i=(t_i, w_i)$  размещения работы в пространстве ресурсов ОТW.

Очевидно, множество работ  $R_j$ , непосредственно следующих за  $R_i$ , может состоять более чем из одного элемента:  $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ ,  $1 \leq j \leq N$ ,  $i \neq j$ . Обозначим множество индексов таких работ через  $I_i^j$ .

Следовательно, задача оптимального распределения ресурсов в представленной постановке есть задача размещения  $N$  прямоугольников без наложений друг на друга в прямоугольнике  $R_0$  так, чтобы

$$W_R \times T_R \rightarrow \min_{\mu \in D \subset E^{3N}}, \quad (1)$$

где  $W_R$ ,  $T_R$  – ширина и длина прямоугольной области размещения  $R_0$  соответственно,  $\mu=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ ,  $D \subset E^{3N}$  – область допустимых решений, выделяемая системой ограничений на размещение работ следующего вида:

$$R_i \subset R_0, \quad (2)$$

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset, \quad (3)$$

$$R_j \succ R_i, \quad j \in I_i^j, \quad (4)$$

$$b_i = V_i / a_i, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j. \quad (5)$$

Задача может быть представлена в виде последовательности двух однокритериальных задач

$$T_R \rightarrow \min_{\mu \in D_1 \subset E^{2N+1}}, \quad (6)$$

$$W_R \rightarrow \min_{\mu \in D_2 \subset E^{2K+1}}, \quad (7)$$

где подобласть  $D_1$  области допустимых решений  $D$  в задаче (6) задается без ограничения на величину  $W_R$  (либо  $W_R$  считается достаточно большой), подобласть  $D_2$  выделяется ограничениями вида (2) – (5) с фиксированными значениями величины  $T_R$  и параметров размещения множества объектов размещения, моделирующих критические операции, которые получены в результате решения задачи (9),  $K$  – количество некритических операций.

Критерий (7) может быть представлен как

$$\Delta W \rightarrow \min_{\mu \in D_2 \subset E^{2K+1}}, \quad (8)$$

где 
$$\Delta W = \max_{t \in \{1, 2, \dots, T_R\}} W_t - W_{t-1}, \quad (9)$$

что в терминах основной задачи исследования является эквивалентным.

Итак, необходимо построить оптимальный календарный график  $G(T_R, \Delta W)$  проекта  $R$ , где  $T_R$  – общее время выполнения проекта,  $\Delta W = \max_{t \in \{1, 2, \dots, T_R\}} W_t - W_{t-1}$ .

## 2. Решение проблемы

### Аналитическое описание основных ограничений задачи (3) – (7).

Условие размещения (2) набора объектов  $R_i$  в области  $R_0$  с учетом (5) задается системой нелинейных неравенств

$$\begin{cases} z - x_i - a_i \geq 0 \\ W - y_i - \frac{S_i}{a_i} \geq 0 \\ -a_i + a_{i \max} \geq 0 \\ a_i - a_{i \min} \geq 0 \end{cases}, i = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Условие взаимного непересечения (3) задается набором нелинейных неравенств

$$\begin{cases} x_j - x_i - a_i \geq 0 \\ y_j - y_i - S_i / a_i \geq 0 \\ x_i - x_j - a_j \geq 0 \\ y_i - y_j - S_j / a_j \geq 0 \end{cases}, i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (11)$$

Условие частичного упорядочения (4) представляется в виде системы линейных неравенств

$$x_j - x_i - a_i \geq 0, j \in I_i^j, i, j = \overline{1, N}, i \neq j. \quad (12)$$

При этом функции  $f(y_i, y_j, a_j) = y_i - y_j - \frac{S_j}{a_j}$  и  $f(y_i, y_j, a_i) = y_j - y_i - \frac{S_i}{a_i}$

являются выпуклыми и принадлежат к классу сепарабельных.

Функции цели рассматриваемых частных задач (6), (7) линейны. Следовательно, оптимальное решение  $\mu^*$  этих задач достигается на границе соответствующих множеств  $D_1, D_2$ .

В общем случае решение  $\mu^*$  определяется системой  $F^*(\mu) = 0$  линейных (и нелинейных) уравнений из набора  $F(\mu) \geq 0$  вида (10) – (12). Ранг I системы  $F^*(\mu) = 0$  равен размерности пространства, в котором рассматривается задача. Ограничения системы  $F^*(\mu) = 0$  называют рабочим списком [10].

Те ограничения задачи, которые обращаются в текущей точке  $\mu$  в равенства, называют активным набором. Для рассматриваемых задач размерность J активного набора больше величины I.

**Приближенный метод решения задачи (3) – (8)** основан на оптимизации по группам переменных и включает в себя два этапа:

**Этап 1.** Определение локально-оптимального решения задачи на базе модифицированного метода оптимизации по группам переменных.

**Этап 2.** Перебор локальных экстремумов, основанный на переопределении последовательности размещения объектов.

В данной работе способ задания порядка размещения объектов считается известным.

Общая схема этапа 1 рассматриваемого метода такова [15]:

1.1. Объекты размещаются по одному согласно заданной

последовательности номеров. Ранее размещенные объекты считаются неподвижными, объекты, подлежащие размещению на более поздних итерациях метода, не принимаются во внимание.

1.2. Размещение текущего объекта  $R_i$  с учетом требования минимизации текущей функции цели, обозначим ее через  $\Xi$ .

Таким образом, в общем случае для набора рассматриваемых задач на каждой  $i$ -й итерации метода оптимизации по группам переменных решается задача вида

$$\Xi \rightarrow \min_{(t_i, w_i, a_i) \in \Theta_i}, \quad (13)$$

где область  $\Theta_i$  – трехмерное сечение подобласти  $\hat{\Theta} \subset E^{3i}$  допустимых решений  $D$  основной задачи, причем  $t_1, w_1, a_1 = \text{const}$ ,  $l = \overline{1, i-1}$ ;  $t_l, w_l, a_l = \text{var}$ , область  $\hat{\Theta}$  сформирована ограничениями (2), (3) для набора объектов  $\{R_l\}_{l=\overline{1, i}}$ .

### Априорная линеаризация ограничений задачи

В работе [9] предложена методика глобальной линеаризации нелинейных ограничений задачи, позволяющая провести ее линейную аппроксимацию с любой заранее заданной точностью без увеличения размерности пространства параметров, которому принадлежит область допустимых решений задачи в предположении, что переменные метрические характеристики работ являются непрерывными. Рассматриваемое преобразование  $D \xrightarrow{\mathfrak{Z}} D^L$  состоит в замене нелинейных функций ограничений из (10) и (11) соответствующими линейными функциями (одной или несколькими).

Количество звеньев аппроксимации зависит от точности аппроксимации  $\varepsilon = \max(d^n - d_k^n)$ , где  $n$  – количество узлов аппроксимации,  $d^n$ ,  $d_k^n$  – коэффициенты уравнений секущей, соединяющей смежные узлы аппроксимации, и касательной к текущему сегменту нелинейной функции.

Таким образом, отображение  $\mathfrak{Z}$  при  $n=1$  имеет вид:

$$\mathfrak{Z}(a_i(y_i - y_j) + S_i) = \alpha \times a_i + \beta \times (y_j - y_i) - d_{ij}^n, \quad (14)$$

где  $\alpha = A / \delta$ ,  $\beta = B / \delta$ ,  $d^n = d / \delta$ ,  $\delta = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $d_{ij}^n$  – константы.

Аппроксимация  $\mathfrak{Z}(W - w_i + S_i / a_i)$  нелинейной функции ограничений из (14) проводится аналогично.

### Модификация метода локальной оптимизации линеаризованной задачи

Линеаризованная задача имеет вид

$$\Xi \rightarrow \min_{D_g^L \subset E^U}, \quad (15)$$

где область  $D_g^L$  задается системой  $F_g^L(u) \geq \delta^n$  линейных ограничений, компонентами вектора  $\delta^n$  являются нули и величины  $d_{ij}^n$ ,  $d_{ji}^n$ .

Решение задачи (15) проводится на основе метода активного набора [10].

Программная реализация осуществлена в среде визуального проектирования Borland Delphi 7.0, язык программирования – Object Pascal 6.0. Программный продукт включает в себя блок ввода данных с возможностью

задания и корректировки характеристик и порядка выполнения работ, аналитический блок, включающий в себя процедуры построения аппроксимационных функций с заданной точностью и реализацию точных и приближенных методов решения, а также блок визуализации и сохранения полученных результатов.

Предложенный инструментарий решения задачи распределения ограниченных ресурсов был применен к решению следующей практической задачи. Рассматриваемый объект – пристроенные складские помещения с автоматической системой сбора и паллетизации коробов готовой продукции ЧАО "Филипп Моррис Украина", г. Харьков. Осуществляемый проект – установка автоматической системы пожарной сигнализации.

Укрупненно монтаж и наладка системы проводят в такой последовательности:

- подготовительные работы: возведение лесов, подготовка кабелей и оборудования, подготовка рабочих мест;
- прокладка винипластовых труб и кабелей;
- проверка на герметичность соединений; надежность крепления труб на опорных конструкциях;
- установка оборудования и приборов.

Сдача системы пожарной сигнализации в эксплуатацию оформляется в соответствии с действующими нормативными документами.

Общая стоимость работ согласно смете – 584,925 грн. Сметная трудоемкость – 9,036 тыс. чел.-ч. Сметная заработная плата – 147,613 тыс. грн.

В результате решения задачи (9) была получена оценка необходимого числа технических специалистов, одновременно работающих на проекте, – 18 человек. Критический путь проекта составил 145 дней. Благодаря интенсификации выполнения критических работ без изменения характеристик некритических операций без увеличения количества работников общее время выполнения проекта сократилось и составило 81 день – решение задачи (13).

На рис. 6 показано решение задачи (9) (критические операции выделены более темным цветом), на рис. 7 – решение задачи (13).

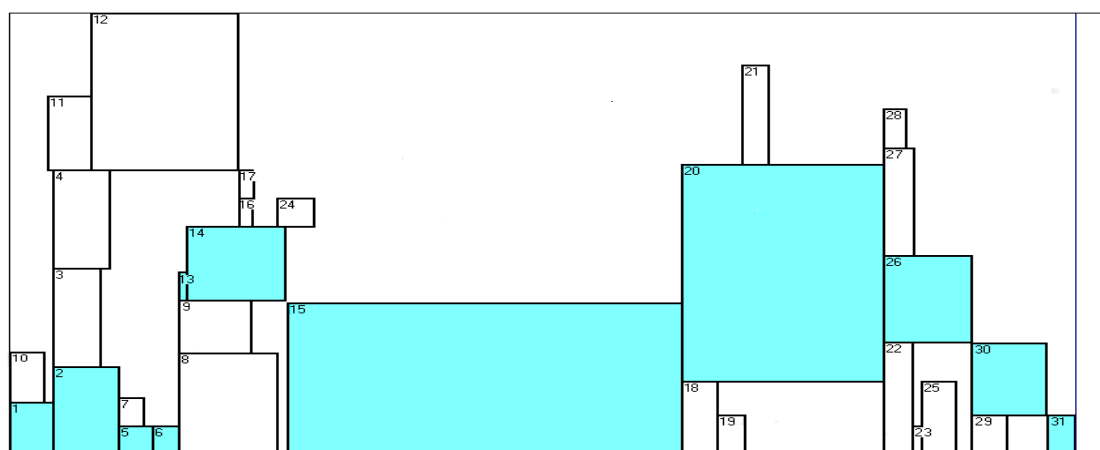


Рис. 1. Определение критического пути проекта работ по монтажу и наладке системы

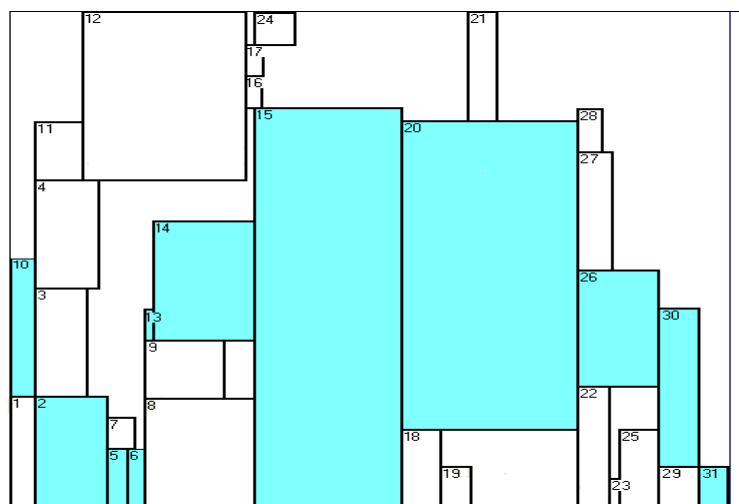


Рис. 2. Задача оптимизации характеристик критических операций проекта

### Выводы

В статье рассмотрен приближенный метод распределения ограниченных ресурсов проекта, проведена алгоритмическая и программная реализация предложенного подхода для практической задачи определения параметров проекта установки автоматической системы пожарной сигнализации.

### Список литературы

1. Михалевич, В.С. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ [Текст] / В.С. Михалевич, В.В. Шкурба // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 34-40.
2. Управление проектами: Справочное руководство [Текст] / под ред. И.И. Мазура и В.Д. Шапиро. – М.: Выс. шк., 2000. – 875 с.
3. He, Zh. Metaheuristics for multi-mode capital-constrained project payment scheduling // Zh. He, R. Liu, T. Jia [Текст] // European Journal of Operational Research. – 2012. – № 223. – P. 605–613.
4. Waligya, G. Discrete-continuous project scheduling with discounted cash flows—a tabu search approach [Текст] / G. Waligya // Computers and Operations Research. – 2008. – № 35 (7). – С. 2141–2153.
5. Эвристические методы календарного планирования [Текст] / Т.П. Подчасова, В.М. Португал, В.А. Татаров, В.В. Шкурба. – К.: Техніка, 1980. – 140 с.
6. Новожилова, М.В. Фактор неопределенности временного параметра при управлении проектами / М.В. Новожилова, Т.Е. Романова // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4. – № 1-2. – С. 79-84.
7. Чуб, И.А. Аналитическое описание условия принадлежности объекта с изменяемыми метрическими характеристиками области размещения [Текст] / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Системи обробки інформації. – 2002. – Вып. 6(22). – с.248-252.
8. Новожилова, М.В. Розв'язання задачі оптимізації ресурсів проекту при точних вихідних даних [Текст] / М.В. Новожилова, Н.О. Попельнюх // Вісник ЖДТУ/

Технічні науки. – 2006. – № 4 (39). – С. 225-230.

9. Чуб, И.А., Метод решения задачи размещения прямоугольников с переменными метрическими характеристиками [Текст] / И.А. Чуб, М.Н. Мурин, М.В.Новожилова // АСУ и приборы автоматики. – 2009. – Радиоэлектроника и информатика – № 4. – С. 134-141.
10. Гилл, Ф. Практическая оптимизация [Текст] / Ф. Гилл, У.Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., А.В. Бетин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 02.10.12

### **Оптимізація розподілу обмежених ресурсів проекту**

Здійснено алгоритмічну та програмну реалізацію оптимізаційного методу рішення завдання розподілу обмежених ресурсів проекту на прикладі проекту установлення автоматичної системи пожежної сигналізації.

**Ключові слова:** ресурс проекту, теорія оптимізаційного геометричного проектування, метричні характеристики об'єкта, область припустимих рішень.

### **Optimization of allocation of the limited project resources**

Is carried out algorithmic and programmatic realization of optimization method of decision of task of allocation of the limited project resources on the example of project of setting of the fire warning automatic system.

**Keywords:** project resource, theory of the optimization geometrical planning, metrical descriptions of object, area of feasible solutions.