

Потенциальное обтекание вращающегося проницаемого цилиндра

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрено потенциальное обтекание проницаемого цилиндра потоком невязкой жидкости. Сформулированы краевые задачи для определения потенциала скорости и функции тока во всей области течения для случая бесциркуляционного обтекания проницаемого цилиндра. Получены выражения для определения потенциала скорости и функции тока, нормальной и касательной компонент скорости во всей области течения при циркуляционном обтекании.

Полученные результаты предназначены для разработки метода расчета характеристик ротора с вертикальной осью вращения и оптимизации его параметров.

Ключевые слова: проницаемый цилиндр, краевая задача, коэффициент проницаемости, нормальная и касательная компоненты скорости, коэффициент заполнения, коэффициент быстроходности, ротор вертикально-осевой схемы.

Рассмотрим бесциркуляционное обтекание проницаемого цилиндра.

Потенциал скорости внешнего течения $\varphi_1(r, \vartheta)$ представим в виде суммы невозмущенного потока со скоростью V_∞ вдоль оси Ox , диполя с моментом $M = 2\pi V_\infty R^2$, помещенного в начало координат (рис. 1) и функции $\varphi'(r, \vartheta)$, учитывающей влияние проницаемой поверхности [1]

$$\varphi_1(r, \vartheta) = \varphi_0(r, \vartheta) + \varphi'(r, \vartheta), \quad (1)$$

где $\varphi_0(r, \vartheta) = V_\infty r \cos \vartheta + \frac{M \cos \vartheta}{2\pi r}$ – потенциал скорости невозмущенного потока и диполя.

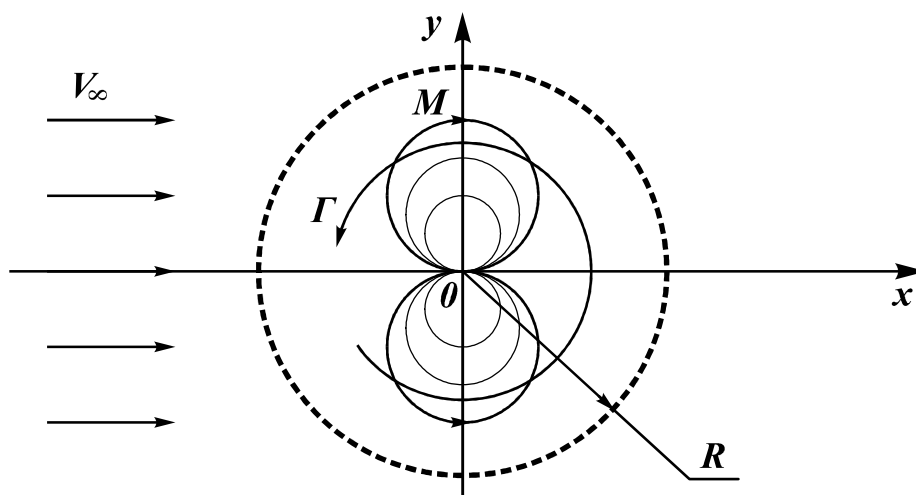


Рис. 1. Расчетная схема обтекания проницаемого цилиндра

Краевая задача для определения потенциала скорости внешнего течения $\varphi_1(r, \vartheta)$ в полярных координатах r и ϑ сформулирована следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \vartheta^2} &= 0, \quad r \geq R \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - k \phi_1 &= 0, \quad r = R \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Запишем краевую задачу для определения $\phi'(r, \vartheta)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \vartheta^2} &= 0, \quad r \geq R \\ \frac{\partial \phi'}{\partial r} - k \phi' &= - \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r} - k \phi_0 \right), \quad r = R \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Решение краевой задачи (3) может быть получено методом разделения переменных [2]. Дополнительное течение от влияния границы потока определяется выражением

$$\phi'(r, \vartheta) = -2V_\infty \frac{kR}{1+kR} \frac{R}{r} \cos \vartheta, \quad (4)$$

где $K = kR$ безразмерный коэффициент проницаемости, имеющий пределы изменения $0 \leq K \leq 1$ [1].

С учетом выражения (1) потенциал скоростей суммарного внешнего течения принимает вид

$$\phi_1(r, \vartheta) = V_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) r \cos \vartheta. \quad (5)$$

Запишем выражение для функции тока внешнего течения

$$\psi_1(r, \vartheta) = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) r \sin \vartheta. \quad (6)$$

Составляющие скорости в произвольной точке области внешнего течения

$$V_{r1} = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) \cos \vartheta, \quad V_{\vartheta 1} = -V_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) \sin \vartheta. \quad (7)$$

Решение для внутреннего течения было получено из условия, что в каждой точке контура нормальная составляющая скорости потока не терпит разрыв. Такое решение может быть получено, если функция тока внутреннего течения $\psi_2(R, \vartheta)$ на границе проницаемого цилиндра принимает значение $\psi_1(R, \vartheta)$.

Краевая задача для определения $\psi_2(r, \vartheta)$ в полярных координатах r и ϑ сформулирована следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \vartheta^2} &= 0, \quad r \leq R \\ \psi_2 &= \psi_1, \quad r = R \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Аналогично решению краевой задачи (3) решение краевой задачи (8) может быть получено методом разделения переменных

$$\psi_2(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta). \quad (9)$$

Выполнив граничное условие на поверхности проницаемого цилиндра и сравнив выражения (9) и (6), получим

$$\psi_2(r, \vartheta) = V_{\infty} \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) r \sin \vartheta. \quad (10)$$

Запишем потенциал скорости и составляющие скорости внутреннего течения

$$\phi_2(r, \vartheta) = V_{\infty} \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) r \cos \vartheta, \quad (11)$$

$$V_{r2} = V_{\infty} \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) \cos \vartheta, \quad V_{\vartheta 2} = -V_{\infty} \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) \sin \vartheta. \quad (12)$$

Поместим в начало координат вихрь с интенсивностью $\beta(K)\Gamma$, где коэффициент $\beta(K)$ зависит от коэффициента проницаемости и имеет вид,

аналогичный множителю $\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right)$ в выражении (5), т.е.

$$\beta(K) = \left(1 + \frac{1-K}{1+K} \right). \quad (13)$$

Тогда выражения потенциала скорости для внешнего и внутреннего течения примут вид

$$\phi_1(r, \vartheta) = V_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) r \cos \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K} \right) \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta, \quad (14)$$

$$\phi_2(r, \vartheta) = V_{\infty} \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) r \cos \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K} \right) \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta. \quad (15)$$

Выражения для компонент скоростей для внешнего и внутреннего течений

$$V_{r1} = V_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) \cos \vartheta, \quad (16)$$

$$V_{\vartheta 1} = -V_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) \sin \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K} \right) \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (17)$$

$$V_{r2} = V_{\infty} \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) \cos \vartheta, \quad (18)$$

$$V_{\vartheta 2} = -V_{\infty} \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) \sin \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K} \right) \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (19)$$

Из аэрогидродинамики известно, что значение циркуляции скорости [3] вокруг цилиндра может быть представлено следующим образом:

$$\Gamma = 2\pi R \omega R, \quad (20)$$

где R – радиус цилиндра, m ;

ω, c^{-1} – угловая скорость вращения цилиндра.

Запишем относительные величины компонент скоростей (16)–(19) и подставим значение циркуляции (20) в выражения (17) и (19)

$$\bar{V}_{r1} = \frac{V_{r1}}{V_{\infty}} = \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) \cos \vartheta, \quad (21)$$

$$\bar{V}_{\vartheta 1} = \frac{V_{\vartheta 1}}{V_{\infty}} = - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{1-K}{1+K} \right) \sin \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K} \right) \frac{R}{r} \frac{\omega R}{V_{\infty}}, \quad (22)$$

$$\bar{V}_{r2} = \frac{V_{r2}}{V_{\infty}} = \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) \cos \vartheta, \quad (23)$$

$$\bar{V}_{\vartheta 2} = \frac{V_{\vartheta 2}}{V_{\infty}} = - \left(1 - \frac{1-K}{1+K} \right) \sin \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K} \right) \frac{R}{r} \frac{\omega R}{V_{\infty}}. \quad (24)$$

В теории идеального ветроколеса [4], используемой для горизонтально-осевых роторов, под идеальным понимают ветроколесо с бесконечно большим количеством лопастей очень малой ширины, а вертикально-осевой ротор можно представить в виде пронизываемого цилиндра.

Проведем аналогию между ротором вертикально-осевой схемы и пронизываемым цилиндром. Коэффициент пронизываемости цилиндра K должен быть функцией коэффициента заполнения ротора и отношения $\frac{\omega R}{V_{\infty}}$, соответствующего величине коэффициента быстроходности z в теории ветродвигателей [4].

Для роторов вертикально-осевой схемы автором был предложен «окружной» коэффициент заполнения, представляющий собой отношение суммы хорд лопастей к длине ометаемой окружности [5]:

$$\sigma_{окр} = \frac{i b_l}{\pi D}, \quad (25)$$

где i – количество лопастей;

b_l – хорда лопасти, m ;

D – диаметр ротора, m .

Коэффициент пронизываемости K может быть представлен произведением двух множителей: $K = K_0 \cdot K_z$, где первый множитель $K_0 = K_{z=0} = 1 - \sigma_{окр}$ зависит только от коэффициента заполнения $\sigma_{окр}$; второй

$K_z = e^{-z(0,823+0,628 \lg \sigma_{окр})}$ – от коэффициентов быстроходности и заполнения:

$$K = (1 - \sigma_{окр}) e^{-z(0,823+0,628 \lg \sigma_{окр})}. \quad (26)$$

Из выражения (26) видно, что при постоянном коэффициенте $\sigma_{окр}$ с увеличением коэффициента быстроходности z коэффициент проницаемости K уменьшается, т.е. поверхность приближается к сплошной. При $z = 0$ коэффициент проницаемости $K = 1 - \sigma_{окр}$, зависит только от геометрии ротора и с увеличением количества лопастей или их хорды (а следовательно, и с увеличением $\sigma_{окр}$) также уменьшается.

Таким образом, выражения нормальной и касательной компонент скорости для внешнего ($\bar{V}_{r1}$ и $\bar{V}_{\vartheta1}$) и внутреннего ($\bar{V}_{r2}$ и $\bar{V}_{\vartheta2}$) течений на поверхности цилиндра примут вид

$$\bar{V}_{r1} = \left(1 - \frac{1-K}{1+K}\right) \cos \vartheta, \quad \bar{V}_{\vartheta1} = -\left(1 + \frac{1-K}{1+K}\right) \sin \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K}\right) z, \quad (27)$$

$$\bar{V}_{r2} = \left(1 - \frac{1-K}{1+K}\right) \cos \vartheta, \quad \bar{V}_{\vartheta2} = -\left(1 - \frac{1-K}{1+K}\right) \sin \vartheta + \left(1 + \frac{1-K}{1+K}\right) z. \quad (28)$$

Для наветренной стороны, т.е. для $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{2}$, подставлялись компоненты скорости для внешней поверхности ($\bar{V}_{r1}$ и $\bar{V}_{\vartheta1}$), а для подветренной стороны, т.е. для $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, – для внутренней поверхности ($\bar{V}_{r2}$ и $\bar{V}_{\vartheta2}$).

На рис. 2 и 3 показаны зависимости $\bar{V}_r(\vartheta, \sigma_{окр}, z)$ и $\bar{V}_{\vartheta}(\vartheta, \sigma_{окр}, z)$ при постоянном окружном коэффициенте заполнения для различных коэффициентов быстроходности и при коэффициенте быстроходности $z = 3$ при различных значениях окружного коэффициента заполнения.

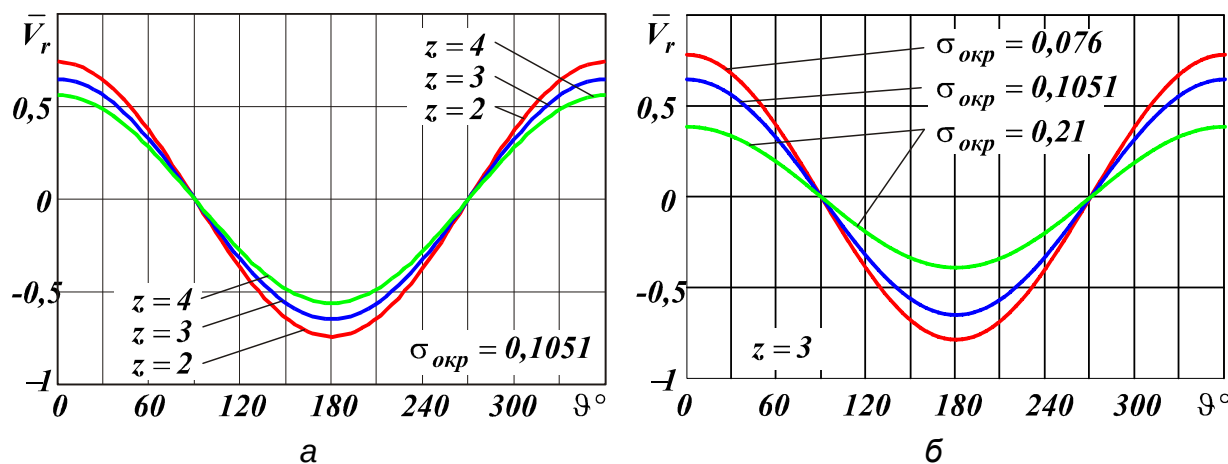
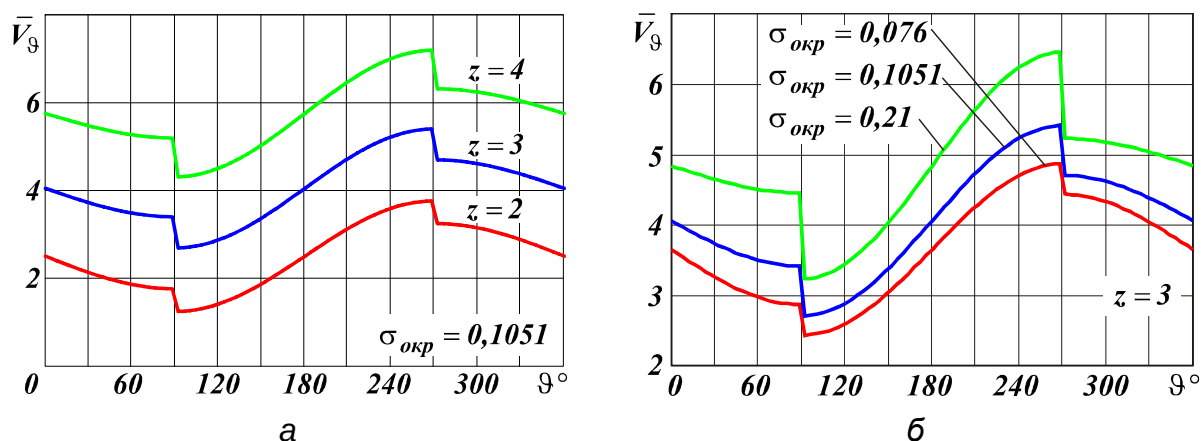


Рис. 2. Зависимости $\bar{V}_r(\vartheta, \sigma_{окр}, z)$

Из рис. 2 и рис. 3 видно, что как увеличение окружного коэффициента заполнения при $z = const$, так и увеличение коэффициента быстроходности при $\sigma_{окр} = const$ приводит к уменьшению нормальной и увеличению касательной относительной скорости. Это объясняется тем, что оба случая приводят к уменьшению коэффициента проницаемости K (см. выражение (26)), т.е. поверхность становится более сплошной.

Рис. 3. Зависимости $\bar{V}_\vartheta(\vartheta, \sigma_{окр}, z)$

Представленные на рис. 3 зависимости $\bar{V}_\vartheta(\vartheta)$ терпят разрыв при $\vartheta = 90^\circ$ и $\vartheta = 270^\circ$, что связано с применением решений для внешнего и внутреннего течений в диапазоне $90^\circ \leq \vartheta \leq 270^\circ$ и $-90^\circ < \vartheta < 90^\circ$ соответственно.

В настоящей работе приведено аналитическое решение задачи потенциального обтекания пронизаемого цилиндра методом гидродинамических особенностей. Проведены аналогии между работой ротора вертикально-осевой схемы и обтеканием пронизаемого цилиндра, записаны выражения для нормальной и касательной компонент скорости во всей области течения.

Данная работа представляет интерес при постановке задачи обтекания ротора, который может рассматриваться как вращающийся цилиндр с некоторой пронизаемостью.

Список литературы

1. Сургайло, М.Л. Потенциальное обтекание перфорированного цилиндра [Текст] / М.Л. Сургайло, В.В. Чмовж // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 20. – Х., 2003. – С.22-30.
2. Араманич, И.Г. Уравнения математической физики [Текст] / И.Г. Араманич, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
3. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика [Текст] / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – Л.: ГИТТЛ, 1948. Ч. I, II.
4. Фатеев, Е.М. Ветродвигатели и ветроустановки [Текст] / Е.М. Фатеев. – М.: Сельхозгиз, 1956. – 536 с.
5. Сургайло, М.Л. Потенциальное обтекание пронизаемого цилиндра применительно к моделированию обтекания ротора вертикально-осевого ветродвигателя [Текст] / М.Л. Сургайло, В.В. Чмовж // Науково-технічний та громадянський часопис Президії Академії інженерних наук України "Вісті": сб. науч. тр. Інженерної академії України. – Вып. 3(33). – К., 2007. – С. 192-195.
6. Абрамовский, Е.Р. Аэродинамика ветродвигателей [Текст]: учеб. пособие для вузов / Е.Р. Абрамовский, С.В. Городько, Н.В. Свиридов; под общ. ред. Е.Р. Абрамовского. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. 220с.

Рецензент: д. физ.-мат. наук, проф., В.В. Тюрев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 09.10.2012

Потенціальне обтікання обертового проникного циліндра

Розглянуто потенціальне обтікання проникного циліндра потоком невязкої рідини. Сформульовано крайові задачі для визначення потенціалу швидкості й функції течії у всій області течії для випадку безциркуляційного обтікання проникного циліндра. Одержано вирази для визначення потенціалу швидкості й функції течії, нормальної та дотичної компонент швидкості у всій області течії при циркуляційному обтіканні.

Одержані результати призначені для розроблення методу розрахунку характеристик ротора з вертикальною віссю обертання і оптимізації його параметрів.

Ключові слова: проникний циліндр, крайова задача, коефіцієнт проникності, нормальна та дотична компоненти швидкості, коефіцієнт заповнення, коефіцієнт швидкохідності, ротор вертикально-осьової схеми.

The potential flow over the rotating permeable cylinder

The potential inviscid flow over the permeable cylinder is considered. The boundary value problems for the determination of the velocity potential and the stream function inside and outside of the permeable cylinder are defined. Expressions for the determination of the velocity potential and stream function, normal and tangential velocity components in the entire region for the circulation flow are obtained.

The results are intended to develop a method for calculating the characteristics of the vertical axis rotor and optimize its parameters.

Keywords: permeable cylinder, boundary value problems, permeability coefficient, normal and tangential velocity components, solidity, tip-speed ratio, vertical axis rotor.