

Численные исследования динамической ползучести начально-анизотропных тел на базе смешанного вариационного функционала

*Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»*

Представлена математическая постановка задачи динамической ползучести и повреждаемости начально-анизотропных тел. Предложено использование смешанного вариационного функционала для решения данной задачи. Освещен метод решения задачи, который представляет собой сочетание методов продолжения решения по времени с решением вариационного равенства на шаге времени вариационно-структурным методом теории R-функций. В качестве примера рассмотрена ползучесть начально-анизотропной пластины, конкретизированы константы материала в уравнениях состояния ползучести для такого случая, получены оценки ресурса цилиндра под внутренним давлением, который повреждается вследствие динамической ползучести.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, смешанный функционал, вариационно-структурный метод, начально-анизотропные тела.

Актуальность и состояние проблемы. Большинство элементов конструкций авиационной и ракетно-космической техники эксплуатируются в условиях, которые характеризуются высоким уровнем температур при действии комбинированного нагружения. Поэтому в расчетах на прочность таких элементов конструкций необходимо учитывать явление ползучести, результатом которого является накопление необратимых деформаций ползучести и повреждаемости, приводящих к разрушению конструкций.

В работе рассматривается постановка таких задач, а именно динамической ползучести и повреждаемости анизотропных тел. Предложен метод решения поставленной задачи на основе смешанного вариационного функционала. Выполнены численные исследования ползучести трансверсально-анизотропных пластин при растяжении и динамической ползучести изотропных цилиндров под внутренним давлением. Проведен анализ полученных результатов.

Постановка задачи и метод решения. Постановка задачи более подробно представлена в работах [1, 2]. Рассматривается в декартовой системе координат пространственное тело объемом V и поверхностью S : $S = S_t \cup S_u$, S_t , S_u - части поверхности тела, на которых заданы внешние распределенные силы и условия закрепления. Для такого случая смешанный вариационный функционал относительно неизвестных компонент тензоров перемещений, напряжений и деформаций ползучести при заданных объемных, поверхностных силах и комбинированном нагружении (в которое входит осциллирующее воздействие $\Phi_i(t)$) имеет виды

$$R_{u\sigma} = \iiint_V \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \sigma_{ij} C_{ij} - \Lambda(\sigma_{ij}) - (f_i - \rho \dot{v}_i) u_i \right] dV - \\ - \iint_{S_t} (p_i^0 + \Phi_i(t)) u_i dS - \iint_{S_u} n_i \sigma_{ij} (u_j - u_j^*) dS. \quad (1)$$

Из вариационного равенства для данного функционала получаем систему уравнений для решения начально-краевой задачи ползучести и повреждаемости тел, а также систему уравнений для решения задачи о вынужденных колебаниях тела. Данные системы уравнений отвечают приведенным в работе [4] и не

являются независимыми, а связаны через параметр асимметрии цикла напряжений σ_i^a , входящий в уравнения состояния ползучести.

Уравнения состояния динамической ортотропной ползучести записываются так как и в работе [2]:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} &= b_{1111}^{(N+1)/2} \frac{\bar{\sigma}_2^{N-1} (1+H(A))}{(1-\omega)^N} [B] \underline{\sigma}, \quad \dot{\omega} = d_{1111}^{k/2} \frac{\sigma_{*2}^k (1+K(A))}{(1-\omega)^{k+S}}, \\ \underline{\dot{\omega}} &= d_{1111}^{k/2} \frac{\sigma_{*2}^{k-2} (1+K(A))}{(1-\omega)^{k+S-1}} [D] \underline{\sigma}, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{\sigma}_2^2 = \underline{\sigma}^T [B] \underline{\sigma}$, $\sigma_{*2}^2 = \underline{\sigma}^T [D] \underline{\sigma}$ - инварианты напряжений.

На основе представленного выше предложен численно-аналитический метод решения задач ползучести, который представляет собой сочетание метода продолжения решения по времени с решением вариационного равенства на шаге времени, подробно описанное в работе [2].

Для разрешения системы линейных алгебраических уравнений в общепринятых обозначениях используется вариационно-структурный метод теории R-функций, в результате чего приходим к системе вида

$$[K] \{q\} = \{F\} + \{F^{cr}\}. \quad (3)$$

Амплитудные значения напряжений при вынужденных колебаниях вычисляются по решению такой системы уравнений:

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{q_*^1\} = \{p_*^1\}, \quad (4)$$

где $\{q_*^1\}$ - коэффициенты структур решений при вынужденных гармонических колебаниях тела с заданной частотой Ω ; $[K]$, $[M]$ - матрицы жесткости и масс тела; $\{p_*^1\}$ - вектор амплитудных значений нагрузок. Методы решения системы уравнений (4) известны.

Используя найденные амплитудные значения напряжений из системы уравнений (4) в начальный момент времени, выполняется интегрирование уравнений состояния динамической ползучести вида (2) с использованием метода Рунге-Кутты в модификации Мерсона и продолжается решение по времени на основе смешанного вариационного функционала (1) при использовании системы уравнений (2).

Численные исследования анизотропной ползучести пластины и динамической ползучести цилиндра. Рассмотрим трансверсально-изотропный при ползучести сплав Д16АТ, физико-механические постоянные которого в уравнении состояния (2) при температуре $T=275^\circ \text{C}$, приняты такими: $E = 65 \text{ ГПа}$, $b_{1111} = 6.669 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-2N/N+1} / (\nu)^{2N+1}$, $d_{1111} = 1.159 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-2} / (\nu)^{2k}$, $N = k = 3.4$, $\alpha = 0$, $\nu = 0.3$, $\rho = 3000 \text{ кг/м}^3$. Эти данные приведены в работе [3, 6].

Рассматривается одноосное растяжение пластины напряжением σ в плоскости анизотропии вдоль оси растяжения. Для скорости деформации в направлении, составляющем угол θ с осью анизотропии свойств материала, будем иметь уравнения состояния в виде:

$$\dot{\sigma} = b_{1111}^{(N+1)/2} F(\theta)^{\frac{N+1}{2}} \sigma^N / (1-\omega)^N, \quad \dot{\omega} = d_{1111}^{k/2} F_*(\theta)^{\frac{k}{2}} \sigma^k / (1-\omega)^{k+S}, \quad (5)$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = 1,$$

где

$$\begin{aligned}
 F(\theta) &= m^4 + 2\beta_{12}m^2n^2 + \beta_{22}n^4 + 4\beta m^2n^2, \\
 F_*(\theta) &= m^4 + 2\delta_{12}m^2n^2 + \delta_{22}n^4 + 4\delta m^2n^2, \\
 m &= \cos(\theta), \quad n = \sin(\theta).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Рассмотрим влияние ориентации главных осей анизотропии свойств материала на время до разрушения пластины. Растягивающее давление примем равным $\sigma=70$ МПа. Анализируя результаты табл. 1 делаем вывод о существенном влиянии на время до разрушения ориентации осей анизотропии свойств материала относительно направления растяжения пластины. Время до разрушения сокращается практически на 30 % при ориентации осей анизотропии поперек направлению растяжения пластины по сравнению со временем до разрушения при совпадении ориентации осей анизотропии свойств материалов с направлением растяжения пластины.

Таблица 1.

Время до разрушения пластины в зависимости
от ориентации осей анизотропии, θ°

Ориентация осей анизотропии, θ°	Время до разрушения, ч	Ориентация осей анизотропии, θ°	Время до разрушения, ч
0	29,8	40	24,38
10	29,3	60	21,59
15	28,72	90	20,14
20	27,97		

Далее рассматриваются ползучесть и повреждаемость толстостенного цилиндра со свободными торцами, находящегося под действием комбинированного нагружения на внутренней поверхности $p_1 = p_1^0 + p_1^a \cdot \sin(\mu 2\pi\xi/T)$. При этом значение постоянной составляющей давления выбрано равным $p_1^0 = 25$ МПа, а значения амплитуды и частоты циклической составляющей соответственно $p_1^a = 5$ МПа, $p_1^a = 10$ МПа и $\xi = 500$ Гц, $\xi = 1000$ Гц. В расчетах приняты следующие значения геометрических параметров цилиндра из материала Д16АТ: $R_1 = 0.1$ м, $R_2 = 0.5$ м - внутренний и внешний радиусы соответственно, $2h = 0.6$ м - длина цилиндра. В данном случае в отличие от предыдущего используются данные об одноосной ползучести образцов изотропного сплава Д16АТ, физико-механические постоянные которого в уравнениях состояния ползучести, как и в работе [1], при температуре $T=300^\circ$ С, приняты равными: $E = 65$ ГПа, $B = 0.34 \cdot 10^{-7}$ МПа⁻ⁿ/ч, $D = 1.9 \cdot 10^{-7}$ МПа^{-m}/ч, $n = m = k = l = 2.93$, $r = 1.379$, $\alpha = 0$, $\nu = 0.3$, $\rho = 3000$ кг/м³.

На рис. 1 приведены распределения окружных напряжений в сечении цилиндра в начальный момент времени (а) и перед разрушением (б). На этом рисунке представлены окружные напряжения, которые наиболее существенно перераспределяются в сечении цилиндра при ползучести, особенно на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Время до разрушения цилиндра при отсутствии осциллирующей составляющей – 109 часов.

В табл. 2 представлены значения времени до разрушения цилиндра при варьировании значения амплитуды и частоты осциллирующей составляющей нагружения. Из анализа представленных в таблице результатов установлено, что

дополнительное к статическому действие осциллирующей составляющей нагрузки приводит к сокращению времени до окончания скрытого разрушения цилиндра.

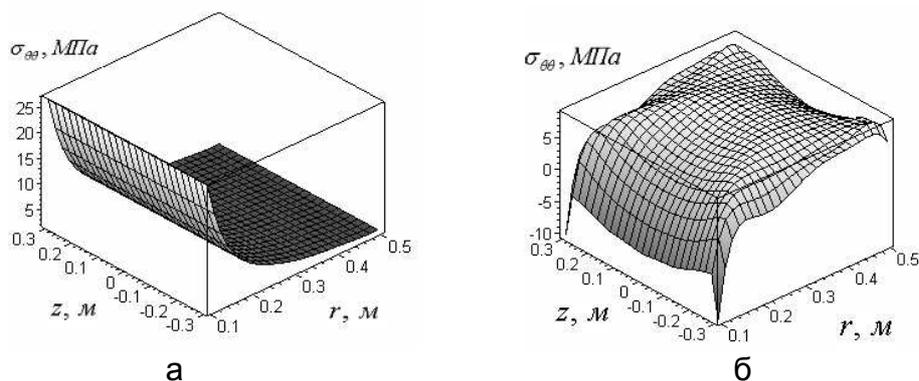


Рис. 1. Распределения окружных напряжений: а - $t_0=0$ ч, б - $t_* = 92.5$ ч. ($p_1^a = 10$ МПа, $\xi = 1000$ Гц)

Таблица 2.

Время до разрушения цилиндра при разных значениях частоты амплитуды и частоты осциллирующего нагружения, $p_1^0 = 25$ МПа

Ω_*	500, Гц	1000, Гц	Ω_*	500, Гц	1000, Гц
p_1^a			p_1^a		
5,0 МПа	92,5 ч	91,9 ч	10,0 МПа	69,1 ч	67,7 ч

Заключение

В заключение можно сделать следующие выводы:

1. Представлена постановка задач динамической ползучести и повреждаемости начально-анизотропных тел.
2. Выполнены численные исследования ползучести трансверсально-анизотропных пластин при растяжении и динамической ползучести изотропных цилиндров под внутренним давлением. Установлено влияние на время до разрушения пластины ориентации осей анизотропии свойств материала при ползучести к оси растяжения пластины, а также влияние на время до разрушения цилиндра добавки к статической составляющей осциллирующей нагрузки.
3. Планируется продолжение исследований в данном направлении и учета как анизотропии свойств материала при ползучести, так и действия комбинированного нагружения на элементы рассматриваемых конструкций.

Список литературы

1. Соболев, В.Н. Смешанный вариационный функционал для численных исследований динамической ползучести начально-анизотропных тел // Вісник Нац. техн. ун-ту «Харк. Політехн. ін-т» [Текст] / В.Н.Соболев. – Х.: НТУ „ХПІ”, 2011. - № 52 - С. 161 - 164.
2. Морачковский, О.К., Метод решения задач ползучести тел на основе смешанного вариационного принципа [Текст] / О.К. Морачковский, В.Н. Соболев // Вісник Нац. техн. ун-ту «Харк. політех. ін-т». – Х.: ХПІ, 2003. – №12, Т.1.– С. 84 –89.
3. Morachkovsky O., Pasynok M. The creep damage model of transversally-isotropic metals // 6th International Symposium on Creep and Coupled Processes, Białowieża - 1998. P. 367 – 375.

4. Бреславский Д.В. Нелинейная ползучесть и разрушение плоских тел при высокочастотном циклическом нагружении [Текст] Д. В. Бреславский, О.К. Морачковский // Прикл. механика. – 1998. - Т. 34, № 3. – С.97 - 103.
5. Конкин В.Н. Ползучесть и длительная прочность легких сплавов, проявляющих анизотропные свойства [Текст] / В.Н. Конкин, О.К. Морачковский // Проблемы прочности. - 1987. - №5. - С. 38 - 42.
6. Морачковский, О.К. Расчеты анизотропных плоских тел, разрушающихся вследствие ползучести [Текст] / О. К. Морачковский, М. А. Пасынок // Сб. науч. тр. ХГПУ "Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье". – Вып.6. – Х.: ХКПУ. - 1998. Ч. 1. - С. 1 – 104.
7. Малинин Н.Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. [Текст] Н. Н. Малинин - М.: Машиностроение, 1981. – 221 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Бетин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 14.03.12.

Числові дослідження динамічної повзучості початково-анізотропних тіл на базі змішаного варіаційного функціонала

Подано математичну постановку задач динамічної повзучості й пошкоджуваності початково-анізотропних тел. Запропоновано використання змішаного варіаційного функціонала для розв'язання цієї задачі. Висвітлено метод розв'язання задачі, що являє собою сполучення методу продовження розв'язання за часом із розв'язанням варіаційної рівності на кроці часу варіаційно-структурним методом теорії R-Функцій. Як приклад розглянуто повзучість початково-анізотропної пластини, конкретизовано константи матеріалу в рівняннях стану повзучості для такого випадку, отримано оцінки ресурсу циліндра під внутрішнім тиском, що ушкоджується внаслідок динамічної повзучості.

Ключові слова: повзучість, пошкоджуваність, змішаний функціонал, варіаційно-структурний метод, початково-анізотропні тіла.

Numerical investigations of dynamic creep and damage problems for initially-anisotropic bodies on the basis of mixed variational functional

A mathematical statement of dynamic creep and damage problems for initially-anisotropic bodies is presented. A mixed variational functional have been used for solving of such problem. Solution method are given, which consist from method combinations of solutions continuation over time and the variational-structural R-functions theory for solving initial-boundary-value creep problem. As an example, numerical estimations of transversally-isotropic plate under tension during creep process and dynamic creep-damage problem for the cylinder under internal pressure are given.

Keywords: creep, damageability, mixed functional, variational-structural method, initial anisotropic body.