

Детерминантное произведение действительных блочных матриц

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Введено новое для теории матриц понятие – детерминантное произведение блочных матриц, которое позволяет рассматривать ассоциированные матрицы с более общей точки зрения, а именно как матрицы оператора в базисе, состоящем из блочных матриц. Показано, что при этом сохраняются основные свойства таких матриц. Введено понятие собственных чисел и соответствующих им собственных блочных матриц, приведены различные примеры.

Ключевые слова: блочная матрица, биформа, базис относительно биформы, ассоциированная матрица, собственное число оператора, собственная блочная матрица.

В данной работе приняты следующие обозначения: $M_{n,m}$ – множество $n \times m$ ($n \leq m$) матриц с действительными элементами; $M_n := M_{n,n}$ – множество действительных квадратных матриц порядка n ; x^T – матрица, транспонированная по отношению к матрице $x \in M_{n,m}$; $M_{n,m}(M_{k,p})$ ($k \leq p$) – множество блочных $n \times m$ матриц, элементами которых есть действительные $k \times p$ матрицы (блоки, клетки).

Для произвольных матриц x и y из $M_{n,m}$ вводим операцию (биформу)

$$M_{n,m} \times M_{n,m} \rightarrow \mathbb{R} : \langle x, y \rangle := \det(xy^T). \quad (1)$$

Нетрудно понять, что она удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- 2) $\langle \alpha x, y \rangle = \det \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall \alpha \in M_n$.

Если $x_{ij} \in M_{k,p}$, то блочную матрицу $x^T = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots x_{1m} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{n1} \cdots x_{nm} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} x_{11}^T \cdots x_{n1}^T \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{1m}^T \cdots x_{nm}^T \end{pmatrix}$

назовем *транспонированной* по отношению к блочной матрице $x \in M_{n,m}(M_{k,p})$.

Пусть $x = (x_{ij})$ и $y = (y_{ij})$ – блочные матрицы из $M_{n,m}(M_{k,p})$, а $\alpha \in M_{p,l}$ и $\beta \in M_{l,k}$ – прямоугольные матрицы, то *суммой* матриц x и y , *произведением справа* α на x или *произведением слева* β на x назовем соответственно матрицы:

$$x + y := (x_{ij} + y_{ij}), \quad x\alpha := (x_{ij}\alpha), \quad \beta x := (\beta x_{ij}). \quad (2)$$

В литературе по теории матриц, например [1–5], введена операция умножения блочных матриц, результатом которой, следуя традиции XIX столетия,

есть блочная матрица. В данной работе предложен иной подход к определению произведения блочных матриц и приведены различные следствия, вытекающие из такого определения.

Пусть $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$ – столбцы, элементами которых есть матрицы

$x_i \in M_{k,p}$ или $y_j \in M_{k,p}$ ($k \leq p$).

Определение 1. *Детерминантным произведением* блочного столбца X на блочную строку y^T будем называть матрицу из $M_{n,m}$, обозначаемую XY^T и определяемую формулой

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} (y_1^T \dots y_m^T) = \left\| \langle x_i, y_j \rangle \right\| \in M_{n,m}. \quad (3)$$

Замечание 1. Частным случаем определения 1 есть произведение матрицы $A \in M_{n,k}$ на матрицу $B \in M_{k,m}$. В самом деле, матрицу A можно рассматривать как блочный столбец длины n , элементами которого есть матрицы (строки) из $M_{1,k}$, а матрицу B можно рассматривать как блочную строку длины m , элементами которой являются матрицы (столбцы) из $M_{k,1}$. Произведение строки на столбец дает число, но детерминант, состоящий из одного числа, есть по определению это число.

Пример 1. Пусть $x = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$, тогда

$$xy^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & -3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & -2 \\ -8 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

В том случае, когда $m = n$, xy^T – квадратная матрица порядка n . Следовательно, для блочных столбцов x и y одинаковой длины можно ввести операцию (биформу):

$$M_{n,1}(M_{k,p}) \times M_{n,1}(M_{k,p}) \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) := \det(xy^T). \quad (4)$$

Она обладает свойствами, аналогичными свойствам операции (1), а именно:

- 1) $(x, y) = (y, x)$;
- 2) $(\alpha x, y) = \det \alpha \cdot (x, y) \quad \forall \alpha \in M_n$.

Покажем, что для матриц из $M_{n,1}(M_{k,p})$ выполняются формулы, аналогичные формулам, справедливым для матриц из $M_{n,m}$ [6–8].

Пусть $\{e_i\}_1^\varepsilon$, где $\varepsilon = C_p^k$ – первый канонический базис на множестве $M_{k,p}$ ($k \leq p$) относительно биформы (1), а $\{E_j\}_1^\tau$, где $\tau = C_\varepsilon^n$, – первый канонический базис на множестве $M_{n,1}(M_{k,p})$ относительно биформы (4) (см. [8]). Тогда в силу ортонормированности базиса $\{E_j\}_1^\tau$ справедливы формулы

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\tau} (x, E_i)(y, E_i), \quad (5)$$

$$(x, y) = (x, E)(y, E), \quad (6)$$

где $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ E_\tau \end{bmatrix}$.

В том случае, когда базис $\{E_j\}_1^\tau$ не является ортонормированным, то формула (5) принимает более общий вид:

$$(x, y) = x_E E_E^{-1} y_E^T, \quad (7)$$

где $x_E = ((x, E_1), \dots, (x, E_\tau))$, $y_E = ((y, E_1), \dots, (y, E_\tau))$, $E_E = \left\| (E_i, E_j) \right\|_1^\tau$, а формула (6) будет выглядеть так:

$$(x, y) = (x, E)(E, E)^{-1}(y, E). \quad (8)$$

Формулы (5) – (8) являются следствиями теоремы 1 (основной) [8].

Замечание 2. Частным случаем (6) является известная формула для определителей $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, где A и B – из M_n . В самом деле, строки или столбцы квадратных матриц A или B можно рассматривать как координаты системы n векторов пространства $\mathbb{R}^n$ в каноническом базисе этого пространства.

Например, первый канонический базис множества $M_{2,3}$ состоит из матриц

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда первый канонический базис на множестве $M_{2,1}(M_{2,3})$ состоит из блочных матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а первый канонический базис множества $M_{3,1}(M_{2,3})$ имеет только один блочный столбец

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Пример 2. Будем предполагать, что $x = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$,

$\{E_i\}_1^3$ – канонический базис (10). Тогда

$$(x, y) = \left\| \begin{array}{cc|cc} -2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right\| = 4, \quad (x, x) = \left\| \begin{array}{cc|cc} 6 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right\| = 24, \quad (y, y) = \left\| \begin{array}{cc|cc} 6 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right\| = 68,$$

$$(x, E_1) = 4, \quad (x, E_2) = 2, \quad (x, E_3) = 2, \quad (y, E_1) = -4, \quad (y, E_2) = 4, \quad (y, E_3) = 6.$$

Полученные результаты проверим с помощью формулы (5).

$$(x, y) = 4 \cdot (-4) + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 4, \quad (x, x) = 4^2 + 2^2 + 2^2 = 24,$$

$$(y, y) = (-4)^2 + 4^2 + 6^2 = 68.$$

Пример 3. В этом случае будем считать, что

$$x = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$(x,y) = \begin{vmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 8 & -10 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -88, \quad (x,x) = \begin{vmatrix} 21 & -6 & -4 \\ -6 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 1936, \quad (y,y) = \begin{vmatrix} 8 & -10 & 2 \\ -10 & 21 & -6 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$(x,E) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -44, \quad (y,E) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Формула (6) позволяет проверить полученные результаты:

$$(x,y) = (-44) \cdot 2 = -88, \quad (x,x) = (-44)(-44) = 1936, \quad (y,y) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Пусть базисом в $M_{2,3}$ относительно биформы (1) является система матриц

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Тогда система блочных матриц (10) относительно биформы (4) не является ортогональной.

Пример 4. Пусть x и y взяты из примера 2, а базис $\{E_i\}_1^3$ получен с помощью системы матриц (12). Тогда

$$E_e^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (x, E_1) = \left\| \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = 4, \quad (x, E_2) = \left\| \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = 0,$$

$$(x, E_3) = \left\| \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = -4, \quad x_E = (4, 0, -4), \quad (y, E_1) = \left\| \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = -20,$$

$$(y, E_2) = \left\| \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| = 2, \quad (y, E_3) = \left\| \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right\| = -10, \quad y_E = (-20, 2, -10).$$

Формула (7) позволяет вычислить

$$(x,y) = (1,0,-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} = 4, \quad (x,x) = (1,0,-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 24,$$

$$(y, y) = (-10, 1, -5) \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 1 & 3-1 \\ -1-1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 68.$$

Пример 5. Будем предполагать, что блочные матрицы x и y взяты из примера 3, а блочная матрица E имеет вид (11), где система $\{e_i\}_1^3$ – (12). Тогда

$$(x, E) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 88, \quad (y, E) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -7 & -5 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad (E, E) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Формула (8) в этом случае позволяет получить:

$$(x, y) = -88, \quad (x, x) = 1936, \quad (y, y) = 4.$$

Результаты примеров 4 и 5 следует сравнить, соответственно, с результатами примеров 2 и 3.

Так как на множестве $M_{n,1}(M_{k,p})$ относительно биформы (4) существует ортонормированный базис, то квадратичная форма $(x, x) = x_E E_E^{-1} x_E^T$ положительно определена, следовательно, на основании критерия Сильвестра для произвольных x и y выполняется неравенство Коши – Буняковского – Шварца

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (13)$$

При этом равенство возможно в следующих случаях:

а) если $n < \tau$ и блочные столбцы x и y связаны условием $y = \alpha x$, где $\alpha \in M_n$. Действительно, $(x, y) = \det \alpha (x, x)$, $(y, y) = \det^2 \alpha (x, x)$, но тогда $(x, y)^2 = (x, x)(y, y)$;

б) если $n = \tau$, т.е. блочные столбцы x и y имеют длины, равные размерности множества $M_{n,1}(M_{k,p})$ относительно биформы (4). В самом деле, в данном случае справедлива формула (8). Поэтому

$$(x, y)^2 = (x, E)^2 (E, E)^{-2} (y, E)^2 = (x, x)(y, y);$$

в) если $n > \tau$, т.е. длина блочных столбцов x и y больше размерности τ множества $M_{n,1}(M_{k,p})$, порождаемого биформой (4). В этом случае $(x, y) = (x, x) = (y, y) = 0$.

Пример 6. Рассмотрим случай, когда в $M_{2,1}(M_{2,3})$ выбран базис, который имеет более общий вид и не строится по формулам (10) из одного базиса в $M_{2,3}$. Для этого предположим, что $M_{2,3}$ относительно биформы (1) выбраны два

различных базиса $\{e_i\}_1^3$ и $\{f_i\}_1^3$, где $e_1 = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & 0-1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -0-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0-1 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix}$.

Базисом в $M_{2,1}(M_{2,3})$ относительно биформы (4) возьмем набор блочных матриц

$$F_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} e_3 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (F_1, F_1) &= \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle \langle e_1, f_1 \rangle \\ \langle f_1, e_1 \rangle \langle f_1, f_1 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-4 & \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2, \quad (F_1, F_2) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_2 \rangle \langle e_1, f_2 \rangle \\ \langle f_1, e_2 \rangle \langle f_1, f_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \\ (F_1, F_3) &= \begin{vmatrix} \langle e_1, e_3 \rangle \langle e_1, f_3 \rangle \\ \langle f_1, e_3 \rangle \langle f_1, f_3 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-6 & \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7, \quad (F_2, F_2) = \begin{vmatrix} \langle e_2, e_2 \rangle \langle e_2, f_2 \rangle \\ \langle f_2, e_2 \rangle \langle f_2, f_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 2, \\ (F_2, F_3) &= \begin{vmatrix} \langle e_2, e_3 \rangle \langle e_2, f_3 \rangle \\ \langle f_2, e_3 \rangle \langle f_2, f_3 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-1 & \end{vmatrix} = -1, \quad (F_3, F_3) = \begin{vmatrix} \langle e_3, e_3 \rangle \langle e_3, f_3 \rangle \\ \langle f_3, e_3 \rangle \langle f_3, f_3 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 26. \end{aligned}$$

Таким образом, $F_F = \|(F_i, F_j)\|_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0-7 \\ 0 & 2-1 \\ -7 & -1 & 26 \end{pmatrix}$. Это свидетельствует о том,

что базис $\{F_i\}_1^3$ не является ортогональным относительно биформы (4). При этом

$$F_F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 51 & 7 & 14 \\ 7 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если блочные матрицы x и y взять из примера 2, то

$$\begin{aligned} (x, F_1) &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0-1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2-1 & -2-3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0, \\ (x, F_2) &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0-1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1-3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \end{aligned}$$

$$(x, F_3) = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left\| \begin{matrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\| = -6.$$

Аналогично

$$(y, F_1) = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 2, \quad (y, F_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad (y, F_3) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = -8.$$

Следовательно, $x_F = (0, 4, -6)$, $y_F = (2, 10, -8)$. Поэтому

$$(x, x) = x_F F_F^{-1} x_F^T = \frac{1}{4} (0, 4, -6) \begin{pmatrix} 51 & 7 & 14 \\ 7 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = (-14, 0, -4) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 24,$$

$$(y, y) = y_F F_F^{-1} y_F^T = (15, 7, 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = 68, \quad (x, y) = x_F F_F^{-1} y_F^T = (-14, 0, -4) \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = 4.$$

Полученные результаты рекомендуется сравнить с результатами примера 2.

Множество $M_{n,1}(M_{k,p})$ ($k \leq p$) относительно биформы (4) превращается в координатное пространство размерности $\tau = C_\varepsilon^n$, где $\varepsilon = C_p^k$. Это позволяет каждому элементу x из $M_{n,1}(M_{k,p})$ в фиксированном базисе $\{E_i\}_1^\tau$ поставить в соответствие упорядоченный набор (строку) из τ действительных чисел – координат этого элемента в базисе $\{E_i\}_1^\tau$, по формуле (см. [7,8])

$$x_{(E)} = x_E E_E^{-1}, \quad (14)$$

где $x_E = [(x, E_1), \dots, (x, E_\tau)]$ – строка, построенная для элемента x на базисных элементах $\{E_i\}_1^\tau$, а $E_E = \left\| (E_i, E_j) \right\|_1^\tau$. Например, если вернуться к примеру 6, то в базисе $\{F_i\}_1^3$ элементы x и y будут иметь координаты $x_{(F)} = (-14, 0, -4)$, $y_{(F)} = (15, 7, 4)$, а в первом каноническом базисе пространства $M_{2,1}(M_{2,3})$ (10) $x_{(E)} = (4, 2, 2)$, $y_{(E)} = (-4, 4, 6)$. Связь между координатами элемента x в двух различных базисах $\{E_i\}_1^\tau$ и $\{F_i\}_1^\tau$ определяется формулой

$$x_{(E)} = x_{(F)} F_E E_E^{-1}, \quad (15)$$

где $F_E = \left\| (F_i, E_j) \right\|_1^T$.

Убедимся в этом. Формула (7) позволяет записать связь между базисами $\{E_i\}_1^T$ и $\{F_i\}_1^T$ в матричной форме

$$E_E = E_F F_F^{-1} F_E, \quad (E_F = F_E), \quad (16)$$

где $F_F = \left\| (F_i, F_j) \right\|_1^T$.

Используя формулу (7) и матричное равенство (16), будем иметь

$$\begin{aligned} (x, y) &= x_F F_F^{-1} y_F^T = x_E E_E^{-1} y_E^T = x_E \left(E_F F_F^{-1} F_E \right)^{-1} y_E^T = x_E F_E^{-1} F_F E_F^{-1} y_E^T = \\ &= \left(x_E F_E^{-1} F_F \right) F_F^{-1} \left(F_E E_F^{-1} y_E^T \right)^{-1} y_E^T. \end{aligned}$$

Следовательно, $x_F = x_E F_E^{-1} E_E^{-1}$.

Проведем теперь численный эксперимент. Для рассмотренных выше элементов x и y и базисов $\{E_i\}_1^T$ и $\{F_i\}_1^T$ имеем $F_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, E_E –

единичная матрица. Тогда формула (15) позволяет записать

$$x_{(E)} = (-14, 0, -4) F_E = (4, 2, 2),$$

$$y_{(E)} = (15, 7, 4) F_E = (-4, 4, 6).$$

Рассмотрим действие одного из простейших операторов вида

$$M_{n,1}(M_{k,p}) \rightarrow M_{n,1}(M_{k,p}) : x \mapsto xA, \quad (17)$$

где матрица $A \in M_n$. Если $\{E_i\}_1^T$ – базис в $M_{n,1}(M_{k,p})$ относительно биформы (4), то действие оператора (17) слева направо в координатной форме записывается в виде (см. [9])

$$x_{(E)} A_{E,E} = (xA)_{(E)}, \quad (18)$$

где $A_{E,E} = \left\| (E_i A, E_j) \right\|_1^T \cdot E_E^{-1}$ – матрица оператора (17) в базисе $\{E_i\}_1^T$.

Таким образом, в фиксированном базисе $\{E_i\}_1^T$ координатная строка новой блочной матрицы равна координатной строке старой блочной матрицы, умноженной на матрицу оператора (17) в базисе $\{E_i\}_1^T$.

Действие оператора (17) в координатной форме (18) позволяет сформулировать следующее определение: число λ будем называть собственным значением, а ненулевую блочную матрицу $x \in M_{n,1}(M_{k,p})$ – собственной

матрицей оператора (17), если в некотором базисе $\{E_i\}_1^r$ они связаны между собой соотношением

$$x_{(E)} A_{E,E} = \lambda x_{(E)} \quad . \quad (19)$$

Пример 7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-1 \\ 1-1-1 \end{pmatrix}$. Собственные числа этой матрицы

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, а соответствующие им собственные векторы $g_1 = (1, -1, -2); g_2 = (1, -1, 1); g_3 = (1, 1, 0)$, $\{E_i\}_1^3$ – первый канонический базис на множестве $M_{2,1}(M_{2,3})$ относительно биформы (4) имеет вид (10). Рассмотрим блочные матрицы

$$x = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 2-2-1 \\ 0 & 2-1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3-3-3 \\ 2-2-1 \\ 0-2-2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ z = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

и убедимся в том, что они являются собственными матрицами оператора (17), соответствующими собственным значениям $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 8$ и $\lambda_3 = -8$.

В самом деле,

$$xA = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 2-2-1 \\ 0 & 2-1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-1 \\ 1-1-1 \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3-1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

$$(xA, E_1) = 48,$$

$$(xA, E_2) = -48, (xA, E_3) = 48.$$

Таким образом, $(xA)_{(E)} = 48(1, -1, 1)$.

Аналогичным образом $(yA)_{(E)} = 48(-1, 1, 2)$, $(zA)_{(E)} = 48 \cdot 3 \cdot (1, 1, 0)$.

Учитывая, что $x_{(E)} = -12(1, -1, 1); y_{(E)} = 6(-1, 1, 2)$ и $z_{(E)} = -18(1, 1, 0)$,

$$\text{будем иметь } x_{(E)} A_{E,E} = -12(1, -1, 1)(-4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-1 \\ 1-1-1 \end{pmatrix} = 48(1, -1, 1).$$

$$\text{Аналогично, } y_{(E)} A_{E,E} = 6(-4)(-1, 1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-1 \\ 1-1-1 \end{pmatrix} = 48(-1, 1, 2);$$

$$z_{(E)}A_{E,E} = (-4)(-18)(1,1,0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 8 \cdot 18(-1,1,0).$$

Подводя итог, будем иметь

$$x_{(E)}A_{E,E} = -4 \cdot x_{(E)}, \quad y_{(E)}A_{E,E} = 8 \cdot y_{(E)}, \quad z_{(E)}A_{E,E} = -8 \cdot z_{(E)}. \quad (20)$$

Заметим, что собственные блочные матрицы, отвечающие собственному значению, находят с точностью до произведения каждого блока такой матрицы на произвольные невырожденные квадратные матрицы, определители которых имеют одинаковые знаки. Например, в нашем случае

$$x = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

В работе [10] показано, что ассоциированные матрицы – это матрицы операторов в некотором фиксированном базисе относительно той или иной биформы.

Для оператора (17) матрица $A_{E,E} = \left\| (E_i A E_j) \right\|_1^T \cdot E_E^{-1}$ в базисе $\{E_i\}_1^T$ относительно биформы (4) есть обобщенной ассоциированной для матрицы $A \in M_n$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств таких матриц:

а) если A и B – квадратные матрицы n -го порядка, то

$$(AB)_{E,E} = A_{E,E} \cdot B_{E,E}; \quad (21)$$

б) если A – невырожденная матрица из M_n , то

$$A_{E,E}^{-1} = (A^{-1})_{E,E}; \quad (22)$$

в) $\det A_{E,E} = (\det A)^{C_{\varepsilon-1}^{n-1} \cdot C_{p-1}^{k-1}}$, где $\varepsilon = C_p^k$; (23)

г) $(A^T)_{E,E} = A_{E,E}^T$.

Частным случаем последнего равенства, является так называемая теорема Сильвестра – Франке [2].

г) если $\{E_i\}_1^T$ и $\{F_i\}_1^T$ – базисы на множестве $M_{n,1}(M_{k,p})$ ($k \leq p$) относительно биформы (4), то связь между матрицами оператора (17) или, что то же самое, между ассоциированными матрицами для матрицы A в различных базисах, осуществляется с помощью формулы

$$A_{F,F} = F_E E_E^{-1} A_{E,E} E_E F_E^{-1}. \quad (24)$$

Пример 8. В этом случае матрица A взята из примера 7, матрицы системы $\{E_i\}_1^3$ определяются условиями (9) и (10), а матрица E – условиями (9) и (11). Система матриц

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

образует базис на множестве $M_{2,3}$ относительно биформы (1). Нетрудно убедиться в том, что эти матрицы являются собственными матрицами оператора $M_{2,3} \rightarrow M_{2,3} : x \mapsto xA$ в базисе $\{E_i\}_1^3$, соответствующими собственным значениям $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 2$ соответственно.

Пусть базис в $M_{2,1}(M_{2,3})$ относительно биформы (4) состоит из блочных матриц

$$F_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

а базис в $M_{3,1}(M_{2,3})$ состоит из одной матрицы

$$F = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\text{тогда } A_{E,E} = -4A, \quad F_E = -6 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_E^{-1} = -\frac{1}{6^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как базис $\{E_i\}_1^3$ ортонормирован относительно биформы (4), то

$$A_{F,F} = F_E A_{E,E} F_E^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система блочных матриц $\{F_i\}_1^3$ образует ортогональную систему относительно биформы (4) собственных матриц, соответствующих собственным значениям 8, -4, -8.

В том случае, когда число базисных элементов совпадает с порядком матрицы A , то ассоциированная матрица для матрицы A превращается в число, которое будем называть *ассоциированным числом* для матрицы A в том или ином базисе. Поскольку при этом все символы, входящие в формулу (24), – числа, то из (24) вытекает, что $A_{F,F} = A_{E,E}$. Таким образом, ассоциированное число для матрицы A не зависит от выбора базиса, т.е. ассоциированное число для

квадратной матрицы инвариантно по отношению к заданию базиса на множестве $M_{n,1}(M_{k,p})$ относительно биформы (4).

Пусть на множестве $\mathcal{E}^k \times \mathcal{E}^k, k \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{E}$ – множество элементов произвольной природы, задана биформа

$$(x, y): \mathcal{E}^k \times \mathcal{E}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (28)$$

порождающая на множестве $\mathcal{E}^k$ координатное пространство размерности n^k и удовлетворяющая условию

$$(x, y) = (y, x) \quad (29)$$

для произвольных элементов x и y из $\mathcal{E}^k$.

Предположим, что на множестве $\mathcal{E}^k$ введена операция умножения произвольного элемента x из $\mathcal{E}^k$ на некоторый объект α , при этом для любых x и y из $\mathcal{E}^k$ справедливо тождество

$$(\alpha x, y) = \omega(y, x), \text{ где } \omega \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}^k : x \mapsto \mathcal{A}(x). \quad (31)$$

Этот оператор будем называть *самосопряженным относительно биформы* (x, y) , если для любых элементов x и y из $\mathcal{E}^k$ имеет место равенство

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y)). \quad (32)$$

Если $\{e_i\}_1^{n_k}$ – базис в $\mathcal{E}^k$ относительно биформы (28), то действие оператора (31) в координатной форме будет иметь вид

$$x_{(e)} A_{e,e} = \mathcal{A}(x)_{(e)}, \quad (33)$$

где $x_{(e)} = [(x, e_1), \dots, (x, e_{n_k})] \cdot E_e^{-1}$ – строка координат элемента x в базисе

$\{e_i\}_1^{n_k}$, $E_e = \|(e_i, e_j)\|_1^{n_k}$, $A_{e,e} = \|\mathcal{A}(e_i), e_j\|_1^{n_k} E_e^{-1}$ – матрица оператора (31) в

указанном базисе. Если в $\mathcal{E}^k$ относительно биформы (28) найдется ортогональный базис, то такой самосопряженный оператор относительно биформы (x, y) обладает теми же свойствами, что и самосопряженный оператор относительно скалярного произведения. Приведем эти свойства:

а) оператор $\mathcal{A}(x)$ является самосопряженным относительно биформы (28)

тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном базисе $\{e_i\}_1^{n_k}$

относительно этой биформы симметрична, т.е. $A_{e,e} = A_{e,e}^T$;

б) собственные элементы самосопряженного оператора относительно биформы (28), принадлежащие разным собственным значениям, ортогональны относительно этой биформы;

в) пусть $\mathcal{A} : \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}^k$ – самосопряженный оператор относительно биформы (28). Тогда в $\mathcal{E}^k$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных элементов этого оператора.

Убедимся в справедливости свойства б). Пусть $\lambda \neq \mu$, тогда в координатной форме имеют место равенства

$$x_e A_{e,e} = \lambda x_{(e)}, \quad y_e A_{e,e} = \mu y_{(e)}.$$

Умножая эти равенства соответственно на y_e^T и x_e^T , будем иметь

$$x_{(e)} A_{e,e} y_e^T = \lambda x_{(e)} y_e^T, \quad y_{(e)} A_{e,e} x_e^T = \mu y_{(e)} x_e^T$$

$$\text{или } (\mathcal{A}(x), y) = \lambda(x, y), \quad (\mathcal{A}(y), x) = (\mathcal{A}(x), y) = \mu(x, y),$$

откуда следует $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$ или $(x, y) = 0$, что и требуется доказать.

Замечание 2. Существование ортогонального базиса относительно биформы (28) существенно для сохранения свойств а) – в) оператором, удовлетворяющим условию (32). Примером биформы, которая не порождает ортогонального базиса, есть $M_{1,m} \times M_{1,m}$, $(x, y) := (xy^T)^2$ (см. пример 9 [11]).

В заключение отметим, если $x \in M_{n,m}(M_{k,p})$, $y \in M_{n,l}(M_{k,p})$ ($k \leq p$) и $X_i (i=1, \dots, m)$, $Y_j (j=1, \dots, l)$ – столбцы матриц x и y , то детерминантным произведением блочной матрицы x на блочную матрицу y^T будем называть матрицу

$$xy^T := \left\| (X_i, Y_j) \right\| \in M_{m,l}.$$

Если $n = m$, то $(x, y) := \det(xy^T)$.

Список литературы

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М: Наука, 1967. – 576 с.
2. Маркус М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
3. Абгарян К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К.А. Абгарян. – М.: Наука, 1973. – 432 с.
4. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. Хорн Р. Матричный анализ. / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
6. Коваленко С.П. Родство теоремы Лапласа и формулы Бине-Коши для определителей и перманентов / С.П. Коваленко // Докл. АН УССР, Сер. А. 1989. – №11. – С. 9 – 12.
7. Коваленко С.П. Координатные пространства / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 6. – Х., 2000. – С. 139 – 145.

8. Коваленко С.П. Новый взгляд на теорию матриц и не только / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 38. – Х., 2008. – С. 188 – 210.
9. Коваленко С.П. Простейшие операторы в координатных пространствах. / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 9. – Х., 2001. – С. 125 – 131.
10. Коваленко С.П. Ассоциированные матрицы и их свойства / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 20. – Х., 2003. – С. 70 – 83.
11. Коваленко С.П. Угол между подпространствами действительного координатного пространства / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 45. – Х., 2010. – С. 233 – 247.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 28.02.11

Детермінантний добуток дійсних блокових матриць

Наведено нове для теорії матриць поняття – детермінантний добуток блокових матриць, яке дозволяє розглянути асоційовані матриці з більш загальної точки зору, а саме як матриці оператора у базисі, складеному з блокових матриць. Показано, що при цьому зберігаються основні властивості цих матриць. Впроваджено поняття власних чисел і відповідних їм власних блокових матриць, наведено різні приклади.

Ключові слова: блокова матриця, біформа, базис відносно біформи, асоційована матриця, власне число оператора, власна блокова матриця.

Determinant product of real block matrices

A new notion in the theory of matrices that is a determinant product of real block matrices is introduced. This idea allows us to analyze compound matrices from more general of view namely as operator matrices, consisting of block matrices. It is known that in this case the main properties of these matrices are preserved. A notion of characteristic value and their associated block matrices is introduced. Different examples are offered in this study.

Keywords: block matrix; biform; compound matrix; basis relative to biform; characteristic value of operator; characteristic block matrix.