

## Нелинейные нормальные формы связанных поперечно-продольных колебаний роторов на подшипниках качения

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины*

Получена модель колебаний несимметричного ротора на подшипниках качения. В модели подшипника учтены контактные напряжения. Нелинейная зависимость силы от перемещения представлена в виде степенного ряда относительно перемещений цапфы. Учтены гироскопические моменты диска, упругие свойства и распределённая масса вала. Математическая модель колебаний ротора сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для анализа полученной системы применен метод нелинейных нормальных форм Шоу-Пьерра. Проанализированы скелетные кривые нелинейных колебаний ротора.

**Ключевые слова:** ротор, подшипник качения, контактное взаимодействие, метод нелинейных нормальных форм.

### Введение

Многие приборы и агрегаты летательных аппаратов содержат вращающиеся роторы на подшипниках качения, которые описываются нелинейными упругими элементами. Требование снижения веса и вибраций этих устройств, приводит к необходимости повышения точности расчетов динамических процессов.

Поперечные линейные колебания валов с дисками с учётом гироскопических моментов, внешнего и внутреннего трения исследованы Ф.М. Диментбергом [1]. Собственные частоты линейных колебаний жесткого ротора на упругих радиально-упорных шарикоподшипниках рассмотрены Л.З. Новиковым [2]. Нелинейные нормальные формы колебаний вращающегося вала в подшипниках скольжения исследованы в статье [3]. К.В. Аврамовым и К. Пьерром применён метод нелинейных нормальных форм к исследованию колебаний систем с гироскопическими силами [4].

Целью настоящей работы является изучение связанных поперечно-продольных нелинейных колебаний жёсткого ротора с диском на радиально-упорных шарикоподшипниках. Для исследования нелинейных колебаний применяются нелинейные нормальные формы (ННФ).

### 1. Уравнения движения системы

Расчетная схема рассматриваемой системы показана на рис. 1. Начало координат располагаем в опоре А. Длина вала –  $l$ ; расстояние от опоры А до диска –  $l_1$ ; перемещения сечений вала по направлениям координатных осей обозначим  $u_x, u_y, u_z$ . Углы поворота и угловые скорости сечений вала обозначим  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  и  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . Угловые скорости сечений вала связаны с углами поворота известными кинематическими соотношениями [5]. Определим перемещения вала [3]:

$$u_x(Z, t) = x_1(t) \frac{Z}{l} + x_2(t) \frac{l-Z}{l}, \quad u_y(Z, t) = y_1(t) \frac{Z}{l} + y_2(t) \frac{l-Z}{l},$$

где  $x_v(t), y_v(t)$  – перемещения цапф,  $v$  – номера опор,  $Z$  – значение координаты сечения по оси  $z$ . Поскольку вал предполагается жёстким, а перемещения  $x_v(t)$  и

$y_v(t)$  – малы, то для любого сечения вала выполняется соотношение  $u_z(Z,t) = z(t)$ . Представим зависимости углов поворота от перемещений цапф следующим образом:

$$\theta_1 = -(y_2 - y_1)/l, \quad \theta_2 = (x_2 - x_1)/l.$$

Кинетическую энергию вала  $T_B$  запишем так:

$$T_B = \frac{\rho I}{2} \left( \int_0^l \dot{\theta}_1^2 dz + \int_0^l \dot{\theta}_2^2 dz \right) + \rho I \omega^2 l - 2 \rho I \omega \int_0^l \dot{\theta}_2 \theta_1 dz + \frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) dz,$$

где  $\rho$  – плотность материала вала,  $I$  – момент инерции сечения вала,  $S$  – площадь сечения вала;  $\omega = \omega_z$  – угловая скорость ротора. Кинетическая энергия диска  $T_D$  определяется уравнением

$$T_D = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2) + \frac{I_0}{2} \omega^2 - I_0 \omega \dot{\theta}_2 \theta_1 + \frac{m_0}{2} (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2)_{z=l_1},$$

где  $I_1$  – экваториальный момент инерции диска,  $I_0$  – полярный момент инерции диска,  $m_0$  – масса диска.

Так как ротор – абсолютно твердое тело, потенциальная энергия системы  $\Pi$  состоит только из потенциальных энергий деформации подшипников  $\Pi_{\Pi}$ . Компоненты упругих реакций подшипника вдоль осей  $x, y, z$  определяем так [2]:

$$P_x = K \sum_{v=1}^N [x \cos \alpha \cos \beta_v + y \cos \alpha \sin \beta_v + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \cos \beta_v,$$

$$P_y = K \sum_{v=1}^N [x \cos \alpha \cos \beta_v + y \cos \alpha \sin \beta_v + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \sin \beta_v,$$

$$P_z = K \sum_{v=1}^N [x \cos \alpha \cos \beta_v + y \cos \alpha \sin \beta_v + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \sin \alpha, \quad (1)$$

где  $x, y, z$  – смещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца;  $\alpha$  – угол между линиями, проходящими через середины площадок контакта шариков с кольцами и плоскостью, перпендикулярной оси ротора (рис. 2,а);  $\beta_v$  – угол между направлением на шарик с номером  $v$  и осью  $x$  (рис. 2,б);  $N$  – количество шариков;  $K$  – величина, определяемая формулой

$$K = \frac{3Q}{2N} z_0^{-3/2} \sin^{-5/2} \alpha,$$

где  $Q$  – сила предварительного осевого натяга,  $z_0$  – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы  $Q$ . Величину  $z_0$  можно определить, рассмотрев геометрические соотношения в зонах контакта

$$z_0 = (2R_k + w_1 + w_2 - d_{ш}) \sin \alpha,$$

где  $R_k$  – радиусы канавок качения в кольцах подшипника,  $w_1$  и  $w_2$  – сближения внутреннего и внешнего колец с шариком по направлению линии контакта, вызванное предварительным осевым поджатием;  $d_{ш}$  – диаметр шарика. Сближения вычисляем по формуле Герца [5]

$$w_i = b_i P_k^{3/2}; i = 1, 2,$$

где  $b_1$  и  $b_2$  – коэффициенты формулы Герца;  $P_k$  – сила сжатия, действующая по направлению линии контакта

$$P_k = Q / (N \sin \alpha).$$

Угол  $\alpha$  находим из решения уравнения

$$(2R_k + w_1 + w_2 - d_{uu}) \cos \alpha = R_1 + 2R_k - R_2,$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы внутреннего и внешнего колец, измеренные от оси подшипника до середин канавок качения.

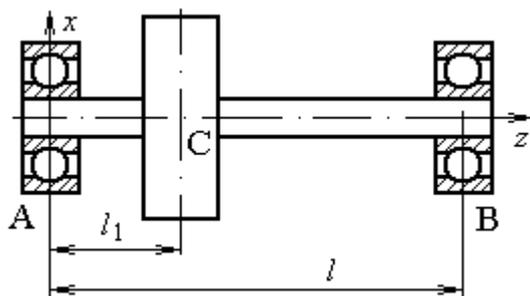


Рис. 1. Расчётная схема ротора

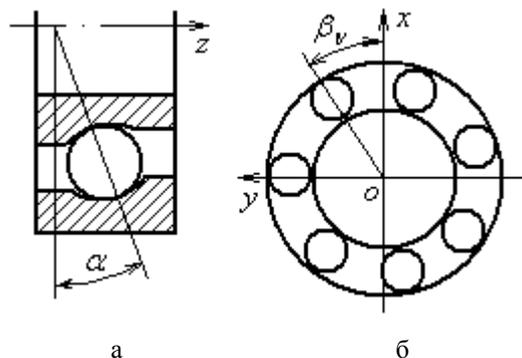


Рис. 2. Расчётная схема шарикоподшипника

Коэффициенты формулы Герца определяем так:

$$b = \frac{3}{2} F_1 \sqrt[3]{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) k^2 (\Theta_1 + \Theta_2)^2 / (3E_1)},$$

где  $F_1, E_1$  – эллиптические интегралы первого и второго рода;  $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$  – кривизны главных нормальных сечений контактирующих поверхностей;  $k$  – корень трансцендентного уравнения

$$(F_1 - E_1) / (F_1 - E_1 / k^2) = (K_{11} - K_{21}) / (K_{12} - K_{22}),$$

$\Theta_1$  и  $\Theta_2$  – величины, зависящие от свойств материалов контактирующих тел.

$$\Theta_i = (1 - \sigma_i^2) / (\pi \bar{E}_i),$$

где  $\sigma_i$  – коэффициент Пуассона,  $\bar{E}_i$  – модуль упругости.

Выражения (1) можно представить в виде степенных рядов. Ограничившись третьим порядком малости по  $x/z_0, y/z_0, z/z_0$ , получим следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} P_x &= c_r x + \frac{c_r x z}{2z_0} - \frac{c_r x^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x y^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x z^2}{8z_0^2}, \\ P_y &= c_r y + \frac{c_r y z}{2z_0} - \frac{c_r y^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y x^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y z^2}{8z_0^2}, \\ P_z &= \frac{c_a 2z_0}{3} + c_a z + \frac{c_r x^2}{4z_0} + \frac{c_r y^2}{4z_0} + \frac{c_a z^2}{4z_0} - \frac{c_r z x^2}{8z_0^2} - \frac{c_r z y^2}{8z_0^2} - \frac{c_a z^3}{24z_0^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$c_r = \frac{3}{4} N K z_0^{1/2} \sin^{1/2} \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$c_a = 2c_r \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Эти зависимости свидетельствуют о том, что перемещение опорного сечения вала по любому направлению вызывает реакцию подшипника по всем трём координатным направлениям.

Так как ротор находится в поле потенциальных сил, соотношения (2) являются производными потенциальной энергии по перемещениям цапф ротора. Кинетическая и потенциальная энергии могут быть выражены функциями обобщённых перемещений и скоростей, которые можно представить как

$$T = T_B + T_D = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2);$$

$$\Pi = \Pi_{II} = \Pi(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

В дальнейшем диссипацией энергии в шарикоподшипнике пренебрегаем. Составим уравнение движения в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате получим

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [\bar{K}]\{U^2\} + [\hat{K}]\{UU_\lambda\} + [\check{K}]\{U^3\} + [\tilde{K}]\{U_\mu^2 U_\nu\} = 0, \quad (3)$$

где  $[K]$  – матрица жёсткости,  $[G]$  – матрица гироскопических сил,  $[M]$  – матрица масс,  $\{U\} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ z]^T$  – вектор перемещений;

$$\{UU_\lambda\} = [x_1 z \ y_1 z \ x_2 z \ y_2 z \ 0]^T,$$

$$\{U_\mu^2 U_\nu\} =$$

$$= [x_1 y_1^2 \ y_1 x_1^2 \ x_2 y_2^2 \ y_2 x_2^2 \ z x_1^2 \ z y_1^2 \ z x_2^2 \ z y_2^2 \ x_1 z^2 \ y_1 z^2 \ x_2 z^2 \ y_2 z^2]^T$$

Динамическую систему (3) можно переписать таким образом

$$\{\ddot{U}\} + [G_1]\{\dot{U}\} + [K_1]\{U\} + [\bar{K}_1]\{U^2\} + [\hat{K}_1]\{UU_\lambda\} + [\check{K}_1]\{U^3\} + [\tilde{K}_1]\{U_\mu^2 U_\nu\} = 0. \quad (4)$$

## 2. Нелинейные формы колебаний

Нелинейные нормальные формы позволяют свести колебания систем с  $N$  степенями свободы к динамике осциллятора с одной степенью свободы [8]. Этот метод эффективно применяют для решения различных технических задач.

Принимаем, что при движении по ННФ обобщённые координаты изменяются синхронно. Все фазовые координаты можно выразить через одну, выбранную произвольно, базовую пару фазовых координат с номером  $J$  [6]:  $p$  – перемещение и  $q = \dot{p}$  – скорость. Представим ННФ в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(p, q) \\ Q(p, q) \end{Bmatrix},$$

где  $V = \dot{U}$  – обобщённые скорости. Элементы векторных функций  $P$  и  $Q$  определяются уравнениями

$$p_n(p, q) = \gamma_{n,1}p + \gamma_{n,2}q + \gamma_{n,3}p^2 + \gamma_{n,4}pq + \gamma_{n,5}q^2 + \\ + \gamma_{n,6}p^3 + \gamma_{n,7}p^2q + \gamma_{n,8}pq^2 + \gamma_{n,9}q^3,$$

$$q_n(p, q) = \gamma_{5+n,1}p + \gamma_{5+n,2}q + \gamma_{5+n,3}p^2 + \gamma_{5+n,4}pq + \gamma_{5+n,5}q^2 + \gamma_{5+n,6}p^3 + \gamma_{5+n,7}p^2q + \gamma_{5+n,8}pq^2 + \gamma_{5+n,9}q^3, \quad (5)$$

$$n = \overline{1, \dots, J-1, J+1, \dots, 5}.$$

Согласно работе [4], коэффициенты линейной части определяем как:

$$\gamma_{n,1} = \frac{\zeta_n \delta_{5+J} - \zeta_{5+J} \delta_n}{\zeta_J \delta_{5+J} - \zeta_{5+J} \delta_J}, \quad \gamma_{n,2} = \frac{\zeta_J \delta_n - \zeta_n \delta_J}{\zeta_J \delta_{5+J} - \zeta_{5+J} \delta_J},$$

где  $\zeta_n, \delta_n$  – действительная и мнимая части собственных векторов линейной части системы (4). Продифференцировав (5), получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_n(p, q) &= \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}, \\ \dot{q}_n(p, q) &= \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}, \end{aligned} \quad (6)$$

обозначим

$$\begin{aligned} \{\dot{q}_j\} &= -\{G_1\}\{q_j\} - \{K_1\}\{p_j\} - \{\bar{K}_1\}\{p_j^2\} - \{\hat{K}_1\}\{(pp_\lambda)_j\} - \{\bar{K}\}\{p_j^3\} - \{K\}\{(p_\nu p_\mu^2)_j\} = \\ &= \{W_j(\{p_j\}, \{q_j\})\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $j$  – номер формы. Подставив (7) в (6), запишем

$$\begin{aligned} \dot{p}_{j,n} = q_{j,n} &= \frac{\partial p_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,J} + \frac{\partial p_{j,n}}{\partial q_{j,J}} W_{j,J}(p_{j,J}, q_{j,J}), \\ \dot{q}_{j,n} = W_{j,n}(p_{j,J}, q_{j,J}) &= \frac{\partial q_{j,n}}{\partial p_{j,J}} q_{j,J} + \frac{\partial q_{j,n}}{\partial q_{j,J}} W_{j,J}(p_{j,J}, q_{j,J}), \end{aligned} \quad (8)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $p^\mu q^\nu$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\gamma_{k,j}$ . Из этой системы выделим подсистему для определения коэффициентов при квадратичных членах ННФ, а затем определим коэффициенты при кубических членах.

Вычисленные коэффициенты ННФ (5) подставляем в  $J$ -ое уравнение системы (4). В результате получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение движения на ННФ:

$$\dot{q} + B_1q + B_2p + B_3p^2 + B_4pq + B_5q^2 + B_6p^3 + B_7p^2q + B_8pq^2 + B_9q^3 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,1} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,1}, \\ B_2 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,2} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,2}, \\ B_3 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,3} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,3} + \sum_{n=1}^5 \bar{K}_{1,J,n} \gamma_{n,1}^2 + \sum_{n=1}^5 \hat{K}_{1,J,n} \gamma_{n,1} \gamma_{\lambda,1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_4 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,4} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,4} + \\
 &+ \sum_{n=1}^5 2\bar{K}_{1,J,n} \gamma_{n,1} \gamma_{n,2} + \sum_{n=1}^5 \hat{K}_{1,J,n} (\gamma_{n,2} \gamma_{\lambda,1} + \gamma_{n,1} \gamma_{\lambda,2})', \\
 B_5 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,5} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,5} + \sum_{n=1}^5 \bar{K}_{1,J,n} \gamma_{n,2}^2 + \sum_{n=1}^5 \hat{K}_{1,J,n} \gamma_{n,2} \gamma_{\lambda,2}, \\
 B_6 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,6} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,6} + \sum_{n=1}^5 2\bar{K}_{1,J,n} \gamma_{n,1} \gamma_{n,3} + \\
 &+ \sum_{n=1}^5 \hat{K}_{1,J,n} (\gamma_{n,3} \gamma_{\lambda,1} + \gamma_{n,1} \gamma_{\lambda,3}) + \sum_{n=1}^5 \check{K}_{1,J,n} \gamma_{n,1}^3 + \sum_{n=1}^{12} \tilde{K}_{1,J,n} \gamma_{\mu,1}^2 \gamma_{\nu,1}, \\
 B_7 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,7} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,7} + \sum_{n=1}^5 2\bar{K}_{1,J,n} (\gamma_{n,1} \gamma_{n,4} + \gamma_{n,2} \gamma_{n,3}) + \\
 &+ \sum_{n=1}^5 \hat{K}_{1,J,n} (\gamma_{n,4} \gamma_{\lambda,1} + \gamma_{n,3} \gamma_{\lambda,2} + \gamma_{n,2} \gamma_{\lambda,3} + \gamma_{n,1} \gamma_{\lambda,4}) + \\
 &+ \sum_{n=1}^5 3\check{K}_{1,J,n} \gamma_{n,1}^2 \gamma_{n,2} + \sum_{n=1}^{12} \tilde{K}_{1,J,n} (\gamma_{\mu,1}^2 \gamma_{\nu,2} + 2\gamma_{\nu,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}), \\
 B_8 &= \sum_{n=1}^5 G_{1,J,n} \gamma_{5+n,8} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,8} + \sum_{n=1}^5 2\bar{K}_{1,J,n} (\gamma_{n,1} \gamma_{n,5} + \gamma_{n,2} \gamma_{n,4}) + \\
 &+ \sum_{n=1}^5 \hat{K}_{1,J,n} (\gamma_{n,5} \gamma_{\lambda,1} + \gamma_{n,4} \gamma_{\lambda,2} + \gamma_{n,2} \gamma_{\lambda,4} + \gamma_{n,1} \gamma_{\lambda,5}) + \\
 &+ \sum_{n=1}^5 3\check{K}_{1,J,n} \gamma_{n,2}^2 \gamma_{n,1} + \sum_{n=1}^{12} \tilde{K}_{1,J,n} (\gamma_{\mu,2}^2 \gamma_{\nu,1} + 2\gamma_{\nu,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}); \\
 B_9 &= \sum_{n=1}^5 G_{J,n} \gamma_{5+n,9} + \sum_{n=1}^5 K_{1,J,n} \gamma_{n,9} + \sum_{n=1}^5 2\bar{K}_{1,J,n} \gamma_{n,5} \gamma_{n,2} + \\
 &+ \sum_{n=1}^5 \hat{K}_{1,J,n} (\gamma_{n,5} \gamma_{\lambda,2} + \gamma_{n,2} \gamma_{\lambda,5}) + \sum_{n=1}^5 \check{K}_{1,J,n} \gamma_{n,2}^3 + \sum_{n=1}^{12} \tilde{K}_{1,J,n} \gamma_{\mu,2}^2 \gamma_{\nu,2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Значения индексов  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  в зависимости от номера перемещения  $n$  для формул (9) даны в таблице.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\lambda$	5	5	5	5								
$\mu$	2	1	4	3	1	2	3	4	5	5	5	5
$\nu$	1	2	3	4	5	5	5	5	1	2	3	4

## 2. Численный анализ колебаний

Нами проведен численный анализ колебаний ротора со следующими значениями параметров:  $l = 0,5$  м,  $l_1 = 0,125$  м, диаметр вала  $d = 0,025$  м,  $m_0 = 10$  кг,  $I_1 = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_0 = 0,2$  кг·м<sup>2</sup>,  $\omega = 628,3$  рад/с. Параметры подшипников таковы:  $R_1 = 0,01600$  м,  $R_2 = 0,02753$  м,  $R_K = 0,00593$  м,  $d_{III} = 0,01151$  м,  $N = 7$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\sigma = 0,3$ ,  $Q = 300$  Н. На рис. 3,а изображена ННФ перемещения первого опорного сечения ротора на подшипниках качения. На рис. 3,б показана та же форма скорости сечения.

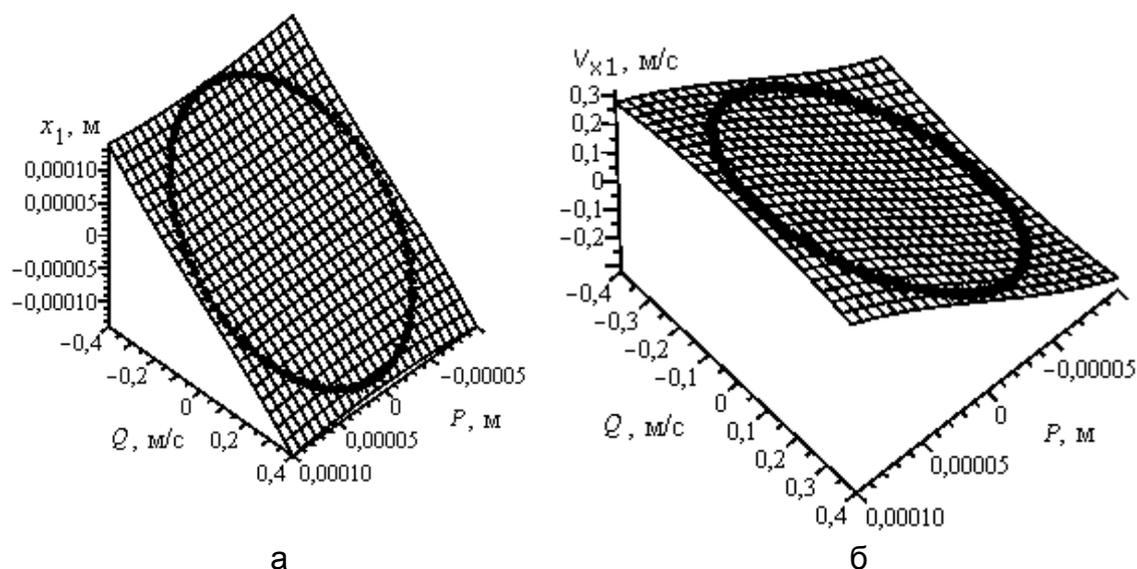


Рис 3. ННФ ротора на шарикоподшипниках

Проверка правильности построения ННФ выполнена численным интегрированием полной системы уравнений движения (3) при начальном условии на поверхности нормальной формы. Фазовые траектории на ННФ показаны толстыми линиями на рис. 3,а и 3,б.

Для исследования амплитудно-частотной характеристики колебаний применён метод гармонического баланса [7]. На рис. 4 показаны скелетные кривые для всех форм колебаний ротора. При колебаниях по первой форме ротор совершает преимущественно продольные перемещения. Осевая жесткость шарикоподшипника меньше радиальной жесткости, поэтому частота продольных колебаний самая маленькая. Вторая и третья частоты кратные, они соответствуют формам колебаний ротора в двух плоскостях, при этом оба подшипника деформируются в одном направлении. Четвёртая и пятая частоты соответствуют формам колебаний ротора, при которых опорные сечения перемещаются в противоположных направлениях. Различие этих частот обусловлено влиянием гироскопического момента.

### Заключение

Разработана методика исследования нелинейных колебаний жёсткого ротора на подшипниках качения. Построены нелинейные нормальные формы и фазовые траектории системы. Исследованы скелетные кривые системы. С ростом амплитуды частоты колебаний уменьшаются потому, что кривизна канавок каче-

ния в шарикоподшипниках переменная. При увеличении амплитуды колебаний шарики перемещаются в область большей кривизны контактирующей поверхности, то есть в зону меньшей жёсткости зоны контакта.

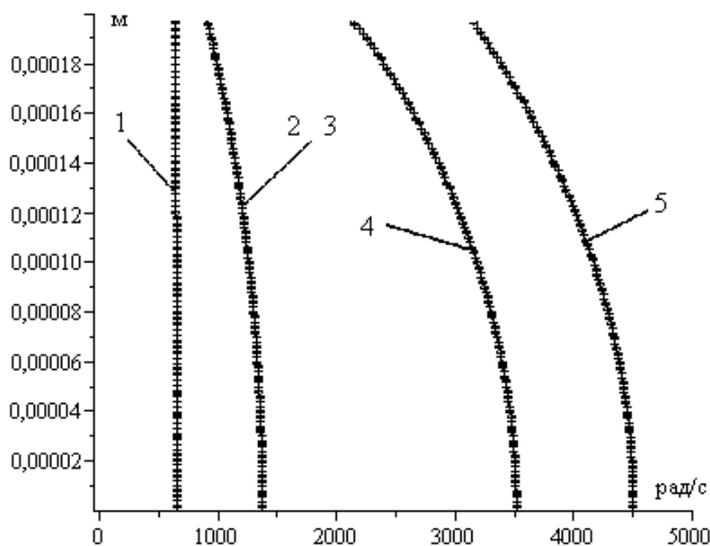


Рис. 4. Скелетные кривые ротора. Номер линии соответствует номеру ННФ

#### Список литературы

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М. Диментберг. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.
2. Определение собственных частот колебаний электродвигателя, связанных с нелинейной упругостью подшипников / Л.З. Новиков // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 6. – С. 84–91.
3. Nonlinear Normal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method / M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw // International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – Vol. 10, № 4. – P. 319–335.
4. Аврамов К.В. Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами / К.В. Аврамов, К. Пьерр, Н.С. Ширяева // Доп. національної Академії Наук України. – 2006. – №1. – С. 7-10.
5. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости / Л.С. Лейбензон. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 465 с.
6. Normal modes for nonlinear vibratory systems / S.W. Shaw, C. Pierre // J. Sound and Vibr. – 1993. – № 164. – P. 85–124.
7. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных систем / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.
8. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Модели, методы, явления. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.

**Рецензент:** доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики О.К. Морачковский, Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 29.06.10

### **Нелінійні нормальні форми зв'язаних поперечно-поздовжніх коливань ротора на підшипниках кочення**

Отримано модель коливань несиметричного ротора на підшипниках кочення. У моделі підшипника враховано контактні напруження. Нелінійну залежність сили від переміщень розкладено в степеневий ряд відносно переміщень цапфи. Враховано гіроскопічні моменти диска, пружні властивості й розподілену масу вала. Математична модель коливань ротора зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для аналізу отриманої системи застосовано метод нелінійних нормальних форм Шоу-П'єрра. Виконано аналіз кістякових кривих нелінійних коливань ротора.

**Ключові слова:** ротор, підшипник кочення, контактна взаємодія, метод нелінійних нормальних форм.

### **Nonlinear normal modes of a rotor transverse-axial oscillation on the ball bearings**

The model of oscillations of an asymmetrical rotor on rolling-contact bearings is received. In model of the bearing contact stresses are taken into account. The nonlinear dependence of force from displacements is represented as power series with respect to the journal displacements. Gyroscopic torques, elasticity and the allocated mass of the shaft are taken into account. This model is reduced to a system of ordinary differential second-kind equations. To research of a system the method of nonlinear normal modes of Shaw and Pierre is applied. The skeletal curves of nonlinear oscillations of a rotor are searched.

**Keywords:** rotor, ball bearing, contact interaction, nonlinear normal modes method.