УДК 512.64

С.П. Коваленко

Угол между подпространствами действительного координатного пространства

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Действительными координатными пространствами могут быть: евклидовы пространства, матрицы как упорядоченные системы векторов евклидовых пространств, упорядоченные наборы таких матриц, блочные матрицы, системы блочных матриц и другие иные множества. Для любых двух элементов указанных множеств введены понятия расстояния и угла между ними. Обоснованы формулы, позволяющие находить угол между двумя подпространствами координатного пространства. Приведены различные примеры, в том числе пример координатного пространства, не имеющего ортогонального базиса.

Ключевые слова: биформа, базис относительно биформы, квазинорма, размерность, координатное пространство, расстояние между элементами, угол между элементами, угол между элементом и подпространством, угол между подпространствами.

Пусть E – действительное координатное пространство $[1,2]$ размерности m, порожденное действительной симметричной функцией двух переменных (биформой)

$$(x,y): E\times E \to \mathbb{R}. \quad (1)$$

Если $x=(x_1,...,x_k)$ и $y=(y_1,...,y_k)$ – упорядоченные наборы элементов из $E^k = E\times ...\times E$, то множество E^k превращается в координатное пространство размерностью $C_m^k = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$ с помощью биформы

$$E^k \times E^k \to \mathbb{R} : (x,y) := det\left\|(x_i, y_j)\right\|_i^k. \quad (2)$$

В дальнейшем, если в тексте не оговорено, о каком координатном пространстве идет речь, следует иметь в виду, что данный результат может иметь место как в E, так и в E^k.

Если $\{e_i\}_1^\alpha$ – фиксированный базис в E при $\alpha = m$ или фиксированный базис в E^k при $\alpha = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$, то для произвольных x и y из координатного пространства, как показано в $[1,2]$, имеет место формула

$$(x,y) = x_e E_e^{-1} y_e^T, \quad (3)$$

где $x_e = \left[(x,e_1),...,(x,e_\alpha)\right]$ и $y_e = \left[(y,e_1),...,(y,e_\alpha)\right]$ – строки, построенные для x и y на базисных элементах $\{e_i\}_1^\alpha$, а $E_e = \left\|(e_i, e_j)\right\|_1^\alpha$ – матрица биформы (1) или (2) в базисе $\{e_i\}_1^\alpha$.

Не следует думать, что E – это линейное пространство, а биформа (x,y) – скалярное произведение в нем. Результаты данной работы носят значительно более общий характер, однако все это справедливо и для евклидовых пространств.

Приведем некоторые примеры, позволяющие лучше понять, о каких объектах идет речь в данной работе.

Пусть $M_{n,m}(\mathbb{R})$ – множество $n\times m$ - матриц с действительными числами.

Пример 1. $E=M_{1,m}(\mathbb{R})$ – множество строк длины m, а x и y – элементы из E, тогда биформа

$$(x,y):=\left(xy^T\right)^2 \tag{4}$$

порождает в E координатное пространство размерностью $\binom{m+1}{2}$.

Заметим попутно, что если биформа (x,y) порождает в E координатное пространство размерностью m, то биформа $(x,y)^n$, где n – натуральное число, порождает в E координатное пространство размерностью $\binom{m+n-1}{n}$.

Пример 2. $E=M_{n,m}(\mathbb{R})$ $(n\le m)$, x и y – произвольные элементы из E, тогда биформа

$$(x,y):=det\left(xy^T\right) \tag{5}$$

порождает в E координатное пространство размерностью $\binom{m}{n}$.

Пример 3. $E=M_{n,m}(\mathbb{R})$, а биформа, определенная на E, имеет вид

$$(x,y):=pcr\left(xy^T\right). \tag{6}$$

В этом случае координатное пространство E имеет размерность $\binom{m+n-1}{n}$.

Пример 4. Пусть $E=M_n(t)$ – линейное пространство многочленов степени не выше, чем n, определенных на отрезке $[-1,1]$. Множество E превращается в евклидово пространство, если скалярное произведение в нем для многочленов $x=x(t)$ и $y=y(t)$ определить формулой $(x,y)=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)dt$.

Если $k\le n$, а $x=\left(x_1(t),...,x_k(t)\right)$, $y=\left(y_1(t),...,y_k(t)\right)$ – упорядоченные наборы многочленов из E, то биформа (2) превращает $E^k\times E^k$ в координатное пространство размерностью $\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$. Для частного случая, когда $n=k=2$, проверим формулу (3). Пусть $x=\left(t-1,t^2-2\right),y=\left(t^2-t+1,t+2\right)$, тогда $\left(x,y\right)=det\begin{pmatrix} -10/3 & -10/3 \\ -64/15 & -20/3 \end{pmatrix}=8$.

Базис $\{e_i\}_1^3$ в E^2 составим из пар первых трех ортогональных многочленов Лежандра $e_1=\left(1,t\right),e_2=\left(1,t^2-1/3\right),e_3=\left(t,t^2-1/3\right)$. Тогда $E_e^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 135 \end{pmatrix}$,

$x_e=\left(\frac{20}{9},-\frac{16}{45},\frac{16}{135}\right),y_e=\left(\frac{40}{9},-\frac{32}{45},-\frac{16}{135}\right)$.

Следовательно, $\left(x,y\right)=x_eE_e^{-1}y_e^T=8$.

Величину

$$\left|x\right|=+\left(x,x\right)^{1/2} \tag{7}$$

будем называть **квазинормой** элемента x в координатном пространстве. Ясно, что квазинорма совпадает с нормой этого элемента, если координатное пространство – это евклидово пространство, а биформа (1) – скалярное произведение в нем. Всякий элемент из координатного пространства будем называть **изотропным**, или **нуль-элементом**, если его квазинорма равна нулю, и такой элемент будем обозначать θ.

Если квадратичная форма

$$\left(x,y\right)=x_eE_e^{-1}x_e^T \quad \forall x:\neq\theta \tag{8}$$

положительно или отрицательно определена, то для произвольных x и y из координатного пространства выполняется неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$\left|\left(x,y\right)\right|\leq\left|x\right|\cdot\left|y\right|. \tag{9}$$

В этом случае для любых двух неизотропных элементов x и y из координатного пространства вводится угол $\left(x,\hat{\ }y\right)$, определяемый формулой

$$cos\left(x,\hat{\ }y\right):=\frac{\left(x,y\right)}{\left|x\right|\cdot\left|y\right|} \qquad \left(0\leq\left(x,\hat{\ }y\right)\leq\pi\right). \tag{10}$$

При этом, если $cos\left(x,\hat{\ }y\right)=1$, то будем считать, что элементы x и y **сонаправлены**, и обозначать это символом $x\uparrow\uparrow y$. Если же $cos\left(x,\hat{\ }y\right)=-1$, то будем говорить, что элементы x и y **противоположно направлены**, и обозначать $x \uparrow\downarrow y$. В том случае, когда $cos\left(x,\hat{\ }y\right)=0$, то считаем, что элементы x и y **ортогональны**, и обозначим это символом $x \perp y$. Систему элементов $\{x_i\}_1^k$ из E назовем **ортогональной** относительно биформы (1), если элементы этой системы попарно ортогональны, и **ортонормированной**, если она ортогональна и квазинорма каждого элемента этой системы равна единице.

Расстояние между произвольными элементами x и y из E определим с помощью функции

$$\rho(x,y):=\left[(x,x)+(y,y)-2(x,y)\right]^{1/2}, \tag{11}$$

и проанализируем ее свойства.

Заметим, что

$$\rho(x,y)=\left[|x|^2+|y|^2-2|x||y|cos\left(x,\hat{\ }y\right)\right]^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq\left[|x|^2+|y|^2-2|x||y|\right]^{\frac{1}{2}}=\left\||x|-|y|\right\| \geq 0. \tag{12}$$

Причем $\rho(x,y)=0$ только в том случае, когда $cos\left(x,\hat{\ }y\right)=1$ и $|x|=|y|$, т.е. только тогда, когда $x \uparrow\uparrow y$ и $|x|=|y|$.

С другой стороны,

$$\rho(x,y)\leq\left[|x|^2+|y|^2+2|x||y|\right]^{\frac{1}{2}}=|x|+|y|. \tag{13}$$

Равенство $\rho(x,y)=|x|+|y|$ возможно только в том случае, когда $x \uparrow\downarrow y$.

Объединяя равенства (12) и (13), приходим к двойному неравенству

$$0\leq\rho(x,y)\leq|x|+|y|. \tag{14}$$

Упорядоченный набор (строку) действительных чисел

$$x_{(e)}:=x_e E_e^{-1} \tag{15}$$

будем называть **координатами** элемента x в базисе $\{e_i\}_1^m$.

Отметим, что в том случае, когда E – линейное пространство, а биформа (1) билинейна, то строка (15) совпадает со строкой координат элемента x в базисе $\{e_i\}_1^{\varepsilon}$ линейного пространства.

Если в E выбран иной базис $\{f_i\}_1^m$ относительно биформы (1), то связь между координатами элемента x в разных базисах осуществляется по формуле

$$x_{(e)}=x_{(f)}F_e E_e^{-1}. \tag{16}$$

Если базис $\{e_i\}_1^m$ ортонормирован относительно биформы (1), то $x_{(e)}=x_e$.

Формулу (11) в координатном виде с базисом $\{e_i\}_1^m$ в E относительно биформы (1) можно записать в виде

$$\rho^2(x,y)=(x,x)-(x,y)+(y,y)-(y,x)=x_eE_e^{-1}x_e^T-x_eE_e^{-1}y_e^T+y_eE_e^{-1}y_e^T-y_eE_e^{-1}x_e^T=$$
$$=x_eE_e^{-1}(x_e-y_e)^T+y_eE_e^{-1}(y_e-x_e)^T=x_eE_e^{-1}(x_e-y_e)^T-y_eE_e^{-1}(x_e-y_e)^T=$$
$$=(x_e-y_e)E_e^{-1}(x_e-y_e)^T.$$

Итак, имеет место равенство

$$\rho(x,y)=\left[(x_e-y_e)E_e^{-1}(x_e-y_e)^T\right]^{1/2}=\left[\left(x_{(e)}-y_{(e)}\right)E_e\left(x_{(e)}-y_{(e)}\right)^T\right]^{1/2}. \quad (17)$$

Убедимся в том, что последнее равенство не зависит от выбора базиса в E. Пусть $\{f_i\}_1^m$ – другой базис в E, тогда учитывая, что $F_e^T=E_f$, и формулы (15) и (16), получим

$$\left(x_{(e)}-y_{(e)}\right)E_e\left(x_{(e)}-y_{(e)}\right)^T=\left(x_{(f)}F_eE_e^{-1}-y_{(f)}F_eE_e^{-1}\right)E_e\times$$
$$\times\left(E_e^{-1}F_e^Tx_{(f)}^T-E_e^{-1}F_e^Ty_{(f)}^T\right)=\left(x_{(f)}-y_{(f)}\right)F_eE_e^{-1}E_eE_e^{-1}E_f\left(x_{(f)}-y_{(f)}\right)^T=$$
$$=\left(x_{(f)}-y_{(f)}\right)F_eE_e^{-1}E_f\left(x_{(f)}-y_{(f)}\right)^T=\left(x_{(f)}-y_{(f)}\right)F_f\left(x_{(f)}-y_{(f)}\right)^T.$$

Если базис $\{e_i\}_1^m$ ортонормирован относительно биформы (1), то формула (17) принимает вид

$$\rho^2(x,y)=\sum_{i=1}^m(x_e-y_e)^2. \quad (18)$$

Отметим, что $(x,\theta)=0$ для произвольного элемента x из координатного пространства E. Действительно, из неравенства (9) следует, что $(x,\theta)^2\le(x,x)(\theta,\theta)=0$. Поэтому $\rho(x,\theta)=|x|$.

Если x и y – неизотропные элементы и $x\perp y$, то справедливо равенство $\rho^2(x,y)=|x|^2+|y|^2$, которое выражает известную теорему Пифагора для одномерных ориентированных величин. Как видно, она справедлива и для многомерных ориентированных величин.

В силу симметрии биформы (1) справедливо тождество $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для произвольных x и y из E.

Отметим, что для любых элементов x,y,z из координатного пространства E справедливо «неравенство треугольника».

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(y,z). \quad (19)$$

Убедимся в этом. Пусть $\{e_i\}_1^m$ – базис в E относительно биформы (1), тогда

$$\rho^2(x,y) = (x_e - y_e)E_e^{-1}(x_e - y_e)^T = \left[(x_e - z_e) - (y_e - z_e)\right]E_e^{-1} \times$$
$$\times\left[(x_e - z_e) - (y_e - z_e)\right]^T = (x_e - z_e)E_e^{-1}(x_e - z_e)^T +$$
$$+2(z_e - y_e)E_e^{-1}(x_e - z_e)^T + (y_e - z_e)E_e^{-1}(y_e - z_e)^T. \qquad (20)$$

Учитывая формулы (2), (8) и (9), имеем

$$\left|(x_e - y_e)E_e^{-1}(x_e - z_e)^T\right| \le \left[(z_e - y_e)E_e^{-1}(z_e - y_e)^T\right]^{1/2} \times$$
$$\times\left[(x_e - z_e)E_e^{-1}(x_e - z_e)^T\right]^{1/2}.$$

Тогда, возвращаясь к равенству (20), с учетом последнего неравенства, получаем

$$\rho^2(x,y) \le (x_e - z_e)E_e^{-1}(x_e - z_e)^T + 2\left[(z_e - y_e)E_e^{-1}(z_e - y_e)^T\right]^{1/2} \times$$
$$\times\left[(x_e - z_e)E_e^{-1}(x_e - z_e)^T\right]^{1/2} + (y_e - z_e)E_e^{-1}(y_e - z_e)^T =$$
$$\rho^2(x,z) + 2\rho(x,z)\rho(y,z) + \rho^2(y,z) = \left(\rho(x,z) + \rho(y,z)\right)^2,$$

откуда и вытекает справедливость неравенства (19).

Известно, что множество X называется **метрическим пространством**, если каждой паре элементов x, y этого множества поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x,y)$, называемое расстоянием между элементами x и y, такое, что для произвольных элементов x, y, z множества X выполняются следующие условия (аксиомы метрики):

1. $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.
3. $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

При этом функция $\rho(x,y): X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется **метрикой**.

Отметим, что формула (11) определяет метрику на действительном координатном пространстве E только в том случае, когда элементы из E – одномерные ориентированные величины (векторы). Однако для ориентированных величин, размерность которых больше единицы, первая аксиома метрики не выполняется. В самом деле, пусть координатное пространство $E = M_{n,m}(\mathbb{R})$ $(n \le m)$ порождено биформой (5), x и y – элементы из E, связанные соотношением $y = \alpha x$, где α – квадратная матрица порядка n и такая, что $det\,\alpha = 1$. Тогда $\rho(x,y) = 0$. Действительно

$$\rho(x,y)=+\left[(x,x)+(y,y)-2(x,y)\right]^{1/2}=+\left[(x,x)+det^2\alpha(x,x)-2\,det\,\alpha(x,x)\right]^{1/2}=$$
$$=\left[(x,x)+(x,x)-2(x,x)\right]^{1/2}=0.$$

Если $y=\alpha x$ и $det\,\alpha=-1$, то $\rho(x,y)=2|x|$. В этом случае x и y – многомерные ориентированные величины, противоположно направленные. Заметим, что операция умножения действительной прямоугольной матрицы слева на квадратную матрицу α в координатном пространстве, порожденном биформой (4), сводится к умножению координат этой матрицы в фиксированном базисе на число, равное $det\,\alpha$.

Аналогично, если координатное пространство $E=M_{n,m}(\mathbb{R})$ порождено биформой (6), то расстояние между двумя элементами x и y из E, связанных условием $y=\alpha x$, где $\alpha=diag(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $det\,\alpha=per\,\alpha=1$, равно нулю.

Теорема 1. Если система элементов $x,e_1,...,e_n$ из E независима относительно биформы (1), то имеет место формула

$$\begin{vmatrix}(x,x)(x,e_j)\\(e_i,x)(e_i,e_j)\end{vmatrix}_1^n=(x,x)\,det\,E_e-x_e\tilde{E}_e x_e^T, \tag{21}$$

где $x_e=\left[(x,e_1),...,(x,e_n)\right]$ – строка, а $\tilde{E}_e$ – матрица, присоединенная для матрицы $E_e=\left\|(e_i,e_j)\right\|_1^n$.

Доказательство. Раскроем определитель $n+1$ - го порядка, стоящий в левой части равенства (21), по первой строке. В результате получим

$$\begin{vmatrix}(x,x)(x,e_j)\\(e_i,x)(e_i,e_j)\end{vmatrix}_1^n=(x,x)\,det\,E_e+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(x,e_j)M_j(x), \tag{22}$$

где $M_j(x)$ – дополнительный минор элемента (x,e_j) в исходном определителе. Если теперь раскрыть каждый определитель $M_j(x)$, то будем иметь

$$M_j(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}(e_i,x)M_{ij}. \tag{23}$$

Подставив (23) в (22), получим

$$\begin{vmatrix}(x,x)(x,e_j)\\(e_i,x)(e_i,e_j)\end{vmatrix}_1^n=(x,x)\,det\,E_e-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(x,e_j)M_{ij}(e_i,x)=$$
$$=(x,x)\,det\,E_e-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(x,e_j)A_{ij}(e_i,x), \tag{24}$$

где $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента $\left(e_i,e_j\right)$ в определителе матрицы E_e. Так как матрица E_e симметрична, то и матрица $\tilde{E}_e$ – также симметрична, поэтому последнее выражение в равенстве (24) – это квадратичная форма, матрица которой – $\tilde{E}_e$. Поэтому матричный вид квадратичной формы – $x_e\tilde{E}_e x_e^T$.

Тем самым теорема доказана.

Пусть $G\left(x_1,...,x_n\right):=det\left\|\left(x_i,x_j\right)\right\|_1^n$. Если элементами этого определителя являются скалярные произведения, определенные на элементах x_i и x_j из линейного пространства E, то $G\left(x_1,...,x_n\right)$ – это определитель Грама. В других случаях его можно рассматривать как некоторое обобщение такого определителя.

Равенство (21) с введенным обозначением принимает вид

$$G\left(x,e_1,...,e_n\right)=G\left(x\right)G\left(e_1,...,e_n\right)-x_e\tilde{E}_e x_e^T. \quad (25)$$

В том случае, когда $x_e\tilde{E}_e x_e^T$ – положительно определенная квадратичная форма, то из последнего равенства следует неравенство

$$G\left(x,e_1,...,e_n\right)\le G\left(x\right)G\left(e_1,...,e_n\right),$$

которое приводит к неравенству

$$G\left(x,e_1,...,e_n\right)\le G\left(x\right)G\left(e_1\right)...G\left(e_n\right), \quad (26)$$

а это есть обобщенное неравенство Адамара.

Следствие 1. Если $det\,E_e\ne 0$, а $G\left(x,e_1,...,e_n\right)=0\ \ \forall x\in E$, то справедлива формула

$$\left(x,x\right)=x_e E_e^{-1}x_e^T. \quad (27)$$

Доказательство. При выполнении указанных условий формула (21) примет вид $\left(x,x\right)det\,E_e=x_e\tilde{E}_e x_e^T$. Остается разделить обе части последнего равенства на $det\,E_e$.

Множество M элементов из E назовем **подпространством** координатного пространства E, порожденного системой $\left\{e_i\right\}_1^n\left(n\le\varepsilon\right)$ независимых относительно биформы (1) элементов, если $\left(x,x\right)=x_e E_e^{-1}x_e^T\ \ \forall x\in M$. При этом систему элементов $\left\{e_i\right\}_1^n$ будем называть **базисом** подпространства M.

Следствие 2. Если $x\in E$, но $x\notin M$, то

$$\left|\begin{matrix}\left(x,x\right) & \left(x,e_j\right)\\ \left(e_i,x\right) & \left(e_i,e_j\right)\end{matrix}\right|_1^n=0\quad\forall y\in M. \quad (28)$$

Доказательство. Ясно, что система $\{x,e_1,...,e_n\}$ независима, а система $\{y,e_1,...,e_n\}$ зависима относительно биформы (1). Пусть $f_1 = x, f_1 = e_1,..., f_{n+1} = e_n$. Рассмотрим подпространство N, для которого система $\{f_i\}_1^{n+1}$ является базисом. Определим ранг матрицы

$$C = \left\| \begin{matrix} (x,y)(x,e_j) \\ (e_i,y)(e_i,e_j) \end{matrix} \right\|_1^n = \left\| \begin{matrix} x_f F_f^{-1} y_f^T & x_f F_f^{-1} (e_j)_f^T \\ (e_i)_f F_f^{-1} y_f^T & (e_i)_f F_f^{-1} (e_j)_f^T \end{matrix} \right\|_1^n = A \cdot F_f \cdot B,$$

где $x_f = [(x,f_1),...,(x,f_{n+1})]$ – строка, $F_f = \left\| (f_i, f_j) \right\|_1^{n+1}$,

$$A = \left\| \begin{matrix} (x,f_1)\cdots(x,f_{n+1}) \\ (e,f_1)\cdots(e,f_{n+1}) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (e_n,f_1)\cdots(e_n,f_{n+1}) \end{matrix} \right\|_1^{n+1} F_f^{-1},\ B = F_f^{-1} \left\| \begin{matrix} (y,f_1)(e_1,f_1)\cdots(e_n,f_1) \\ (y,f_2)(e_1,f_2)\cdots(e_n,f_2) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (y,f_{n+1})(e_1,f_{n+1})\cdots(e_n,f_{n+1}) \end{matrix} \right\|_1^{n+1}.$$

Строки матрицы A – это координаты элементов $\{f_i\}_1^n$ в базисе из таких же элементов, поэтому матрица $A = E_{n+1}$ – это единичная матрица $n+1$ - го порядка. Столбцы матрицы B – координаты элементов $y,e_1,...,e_n$ в базисе $\{f_i\}_1^{n+1}$. Поэтому ранг матрицы B равен n. Известно $[3-5]$, что произведение слева или справа невырожденной квадратной матрицы на прямоугольную не меняет ранга последней. Таким образом, $rgC = n$. Это и доказывает следствие 2.

Следствие 3. Если M – подпространство координатного пространства E, порожденного биформой (1) с базисом $\{e_i\}_1^n$ и $x \notin M$, то $\forall y \in M$ имеет место формула

$$(x,y) = x_e E_e^{-1} y_e^T, \tag{29}$$

где $x_e = [(x,e_1),...,(x,e_n)]$, $y_e = [(y,e_1),...,(y,e_n)]$ – строки, построенные для x и y соответственно на базисных элементах $\{e_i\}_1^n$.

Доказательство. По условию система $\{e_i\}_1^n$ образует базис в M, следовательно, $G(e_1,...,e_n) \neq 0$. С другой стороны, выполняется соотношение (23). Поэтому, если к равенству (28) применить рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве теоремы 1, то получим

$$\begin{vmatrix} (x,x)(x,e_j) \\ (e_i,x)(e_i,e_j) \end{vmatrix}_1^n = (x,y)G(e_1,...,e_n) - x_e\tilde{E}_e y_e^T = 0,$$

откуда вытекает формула (29).

Определим квадрат расстояния от элемента $x \in E$ до подпространства $M \subset E$ формулой

$$\rho^2(x,M) := \inf_{y \in M} \rho^2(x,y). \qquad (30)$$

Теорема 2. В том случае, когда $\{e_i\}_1^n$ – базис подпространства M, то для произвольного $x \in E$

$$\rho^2(x,M) = (x,x) - x_e E_e^{-1} x_e^T. \qquad (31)$$

Доказательство. Учитывая формулы (11), (17) и (29), будем иметь

$$\rho^2(x,y) = (x,x) + (y,y) - (x,y) - (x,y) = (x,x) + y_e E_e^{-1} y_e^T - x_e E_e^{-1} y_e^T -$$
$$- x_e E_e^{-1} y_e^T + x_e E_e^{-1} x_e^T - x_e E_e^{-1} x_e^T = (x,x) + (y_e - x_e) E_e^{-1} y_e^T - \left(x_e E_e^{-1} y_e^T - x_e E_e^{-1} x_e^T\right) -$$
$$- x_e E_e^{-1} x_e^T = (x,x) + (y_e - x_e) E_e^{-1} y_e^T - (y_e - x_e) E_e^{-1} x_e^T - x_e E_e^{-1} x_e^T =$$
$$= (x,x) + (y_e - x_e) E_e^{-1} (y_e - x_e)^T - x_e E_e^{-1} x_e^T.$$

Из последнего выражения видно, что наименьшее значение, равное $(x,x) - x_e E_e^{-1} x_e^T$, оно примет на любом элементе $y \in M$, таком, что $y_e = x_e$.

Пусть $np_M x$ – проекция элемента x на подпространство M, тогда из (31) следует, что $|np_M x|^2 = x_e E_e^{-1} x_e^T$, а равенство (31) – это есть не что иное, как известная теорема Пифагора.

Если $\{e_i\}_1^k$ – система независимых относительно биформы (x,y) элементов координатного пространства E, порожденного указанной биформой, то подпространством M в E будем называть множество всевозможных элементов $x \in E : (x,x) = x_e E_e^{-1} x_e^T$.

Пример 5. Пусть $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$. Биформа (5) порождает в E трехмерное координатное пространство. Рассмотрим подпространство M, базисом которого есть матрицы $e_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \end{pmatrix}$. Нетрудно понять, что элементами этого подпространства являются только матрицы вида $x = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ 0 \\ x_3\ x_4\ 0 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1\ 0\ y_2 \\ y_3\ 0\ y_4 \end{pmatrix}$, где x_i и y_i – произвольные действительные числа.

Предположим, что символ $\left(x\hat{,}M\right)$ обозначает угол, который элемент x образует с подпространством M. Рассуждения, приведенные выше, позволяют ввести следующие величины:

$$cos^2\left(x\hat{,}M\right)=\frac{\left|np_M x\right|^2}{(x,x)}=\frac{x_e E_e^{-1} x_e^T}{(x,x)}, \tag{32}$$

$$sin^2\left(x\hat{,}M\right)=\frac{\rho^2(x,M)}{(x,x)}=\frac{G(x,e_1,...,e_n)}{G(e_1,...,e_n)(x,x)}. \tag{33}$$

Нетрудно понять, что эти формулы не зависят от выбора базиса в M.

Соотношение (25) дает возможность убедиться в том, что выполняется тригонометрическое тождество $cos^2\left(x\hat{,}M\right)+sin^2\left(x\hat{,}M\right)=1$.

Формулы (32) и (33) позволяют также находить угол $\left(N\hat{,}M\right)$ между подпространствами координатного пространства. В самом деле, если подпространства N и M имеют базисы $\{g_i\}_1^k$ и $\{h_j\}_1^m$ $(k \le m)$ соответственно, то в качестве единственного многомерного ориентированного элемента в N возьмем упорядоченный набор $x=(g_1,...,g_k)$, а в качестве базиса в M рассмотрим многомерные ориентированные элементы $e_i=\left(h_{j_1},...,h_{j_k}\right)$, $j_i=1,...,C_m^k$, образованные различными сочетаниями из элементов $\{h_j\}_1^m$ по k в каждом. Тогда $\left(N\hat{,}M\right)=\left(x\hat{,}M\right)$.

Рассмотрим два примера, которые позволяют находить углы как по формулам (32) и (33), так и обычными методами аналитической геометрии. Пусть $E=\mathbb{R}^3$ - трехмерное евклидово пространство.

Пример 6. Если $\vec{x}=(1,2,-1)$, а базис подпространства M состоит из векторов $\vec{e}_1=(1,2,1)$ и $\vec{e}_2=(-1,1,1)$, тогда, воспользовавшись формулами (32) и (33), будем иметь $(\vec{x},\vec{x})=6, (\vec{x},\vec{e}_1)=4, (\vec{x},\vec{e}_2)=0, x_e=(4,0)$, $E_e^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$, $G(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=14, G(\vec{x},\vec{e}_1,\vec{e}_2)=36$, $cos^2\left(x\hat{,}M\right)=\frac{4}{7}, sin^2\left(x\hat{,}M\right)=\frac{3}{7}$.

Второй способ. Находим $\vec{n}=\vec{e}_1\times\vec{e}_2=(1,-2,3)$, тогда $cos\left(\vec{x}\hat{,}\vec{n}\right)=\frac{\left(\vec{x}\hat{,}\vec{n}\right)}{|\vec{x}|\cdot|\vec{n}|}=-\sqrt{\frac{3}{7}}$. Следовательно, $cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(x\hat{,}M\right)\right)=-\sqrt{\frac{3}{7}}$ и $sin\left(x\hat{,}M\right)=\sqrt{\frac{3}{7}}$, а $sin^2\left(x\hat{,}M\right)=\frac{3}{7}$.

Пример 7. Пусть подпространства N и M в $\mathbb{R}^3$ образованы соответственно базисами $\{\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$ и $\{\vec{h}_1,\vec{h}_2\}$, где $\vec{g}_1=(1,2,-1)$, $\vec{g}_2=(-1,0,1)$, $\vec{h}_1=(1,2,0)$, $\vec{h}_2=(-1,1,1)$. Тогда $x=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $(x,x)=det\left(xx^T\right)=8$, $(x,e)=det\left(xe^T\right)=10$, $(e,e)=det\left(ee^T\right)=14$, $G(x,e)=12$. Формулы (32) и (33) дают $cos^2\left(x\hat{,}M\right)=cos^2(N,M)=\frac{25}{28}$, $sin^2\left(x\hat{,}M\right)=sin^2(N,M)=\frac{3}{28}$.

Второй способ. $\vec{n}_1=\vec{g}_1\times\vec{g}_2=(2,0,2)$, $\vec{n}_2=\vec{h}_1\times\vec{h}_2=(2,-1,3)$. Тогда $cos\left(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2\right)=cos\left(N\hat{,}M\right)=\sqrt{\frac{25}{28}}$, откуда $cos^2\left(N\hat{,}M\right)=\frac{25}{28}$.

Пример 8. Допустим, что $E=M_{2,3}(\mathbb{R})$ – трехмерное координатное пространство, порожденное биформой (5). Если $x=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}\in E$, а подпространство $M\subset E$ имеет базис, состоящий из матриц $e_1=\begin{pmatrix}100\\ 010\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}010\\ 001\end{pmatrix}$, то $(x,x)=11, (x,e_1)=3, (x,e_2)=1$, $G(x,e_1,e_2)=1, G(e_1,e_2)=1$, и формулы (32), (33) позволяют вычислить, что $cos^2\left(x\hat{,}M\right)=\frac{10}{11}$, $sin^2\left(x\hat{,}M\right)=\frac{1}{11}$.

Если предположить, что подпространство $N\subset E$ относительно биформы (5) имеет базис, состоящий из матриц $g_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, то $x=\{g_1,g_2\}$, $e=\{e_1,e_2\}$, $(x,x)=det\left(\left\|\left(g_i,g_j\right)\right\|_1^2\right)=14$, $(x,e)=det\left(\left\|\left(g_i,e_j\right)\right\|_1^2\right)=3$, $(e,e)=det\left(\left\|\left(e_i,e_j\right)\right\|_1^2\right)=1$, $G(x,e)=5$. В этом случае формулы (32) и (33) дают $cos^2\left(N\hat{,}M\right)=\frac{9}{14}$ и $sin^2\left(N\hat{,}M\right)=\frac{5}{14}$.

Пример 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^2$, которое биформой (4) превращается в трехмерное координатное пространство E. Покажем, что в нем не существует ортогонального базиса. В самом деле, пусть подпространство M имеет базис, состоящий из векторов $e_1=(1,0)$ и $e_2=(0,1)$. Определим максимальный угол, на который вектор $x=(\alpha,\beta)$, где $\alpha^2+\beta^2=1$ отстоит от подпространства M. Другими словами, найдем $\max\limits_{x\in E} \sin^2(x,M)$ при дополнительном условии $\alpha^2+\beta^2=1$. Сведем указанную задачу к задаче на безусловный экстремум и исследуем ее.

Используя формулу (33), получим, что

$$\sin^2\left(x\hat{,}M\right)=\begin{vmatrix}1 & \alpha^2 & \beta^2\\ \alpha^2 & 1 & 0\\ \beta^2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \beta^2\\ \alpha^2 & 1 & 0\\ \beta^2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & -\alpha^2\\ \alpha^2-1 & 1 & -1\\ -\alpha^2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\alpha^2\left(1-\alpha^2\right).$$

Эта функция принимает максимальное значение, равное $\frac{1}{4}$ при $\alpha^2=\frac{1}{2}$.

Таким образом, $\max\limits_{x\in E} \sin^2(x,M)=\frac{1}{2}$ при $\left(x\hat{,}M\right)=\pm\frac{\pi}{4}$.

Если в подпространстве M координатного пространства E выбраны три базиса $\{f_i\}_1^n$, $\{e_i\}_1^n$ и $\{g_i\}_1^n$, то в зависимости от взаимной ориентации этих базисов угол $\left(M\hat{,}M\right)$ может быть равен нулю или π. Следовательно, формулу (3) можно записать в виде

$$F_g=F_eE_e^{-1}G_e^T, \tag{34}$$

где $F_g=\left\|\left(f_i,g_j\right)\right\|_1^n$, $F_e=\left\|\left(f_i,e_j\right)\right\|_1^n$ и $G_e=\left\|\left(g_i,e_j\right)\right\|_1^n$.

В частном случае, когда базис $\{e_i\}_1^n$ – ортонормированный, то формула (34) упростится

$$F_g=F_eG_e^T. \tag{35}$$

Пример 10. Пусть в подпространстве M (см. пример 5) выбраны два базиса $\{f_i\}_1^2$ и $\{g_i\}_1^2$, где $f_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $g_1=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Тогда $F_e=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $G_e=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}$, $F_g=\begin{pmatrix}-21 & 0\\ 0 & -21\end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь трехмерное координатное пространство $E=M_{2,3}(\mathbb{R})$ относительно биформы (5), в котором выбраны три базиса $\{f_i\}_1^3$, $\{g_i\}_1^3$ и $\{e_i\}_1^3$, где $f_1=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $g_1=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$,

$g_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $F_e = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $G_e = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ -8 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $F_g = \begin{pmatrix} 51 & -56 & 28 \\ -3 & 1 & -9 \\ 12 & 3 & -27 \end{pmatrix}$. Проверка показывает, что формула (35) выполняется.

Пример 11. Координатное пространство $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$ относительно биформы (6) имеет размерность, равную четырем. Рассмотрим три базиса в этом пространстве $\{e_i\}_1^4$, $\{f_i\}_1^4$ и $\{g_i\}_1^4$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad f_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad g_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$F_e = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{pmatrix},\qquad E_e = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$G_e = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -24 \end{pmatrix},\ F_g = \begin{pmatrix} 32 & -16 & -4 & -8 \\ -8 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \\ 0 & 0 & 8 & -56 \end{pmatrix},\ F_f = \begin{pmatrix} 32 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -16 & 8 \\ 0 & -16 & 32 & -16 \\ 0 & 8\backslash & -16 & 32 \end{pmatrix}.$$

Численно нетрудно убедиться в выполнении равенства (34) и равенства $F_f = F_e E_e^{-1} F_e^T$.

В работе [6] для двух матриц, имеющих одинаковые размеры, введено расстояние между ними. Ясно, что результаты данной работы для любых матриц $A \in M_{k,m}(\mathbb{R})$ $(k \le m)$ и $B \in M_{p,m}(\mathbb{R})$ $(p \le m)$, таких, что $rangA \le rangB$, позволяют установить угол между ними.

Список литературы

1. Коваленко С.П. Координатные пространства / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 6. – Х., 2000. – С. 139 – 145.
2. Коваленко С.П. Новый взгляд на теорию матриц и не только / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 38. – Х., 2008. – С. 188 – 210.
3. Маркус М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус., Х. Минк. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
4. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. Хорн Р. Матричный анализ / Р.Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
6. Коваленко С.П. О расстоянии между элементами правильного модуля / С.П. Коваленко // Методы математической физики и их приложения: сб. науч. тр. ХАИ. – Х., 1988. – С. 147 – 150.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 04.02.10

Кут між підпросторами дійсного координатного простору

Дійсними координатними просторами можуть бути: евклідові простори, матриці як упорядковані системи векторів дійсних евклідових просторів, упорядковані системи таких матриць, блокові матриці, системи таких матриць і різні інші множини. Для довільних двох елементів таких множин впроваджено поняття відстані та кута між ними. Обгрунтовано формули, які дають змогу знаходити кут між елементом і підпростором, кут між двома підпросторами. Наведено різні приклади, у тому числі приклад координатного підпростору, що не має ортогонального базису.

Ключові слова: біформа, базис відносно біформи, квазінорма, розмірність, координатний простір, відстань між елементами, кут між елементом і підпростором, кут між підпросторами.

Angle between subspaces of real coordinate space

Real coordinate spaces may be: Euclidean space, matrices as regulated systems of Euclidean space, vectors, regulated sets of such matrices, block matrices, block matrix systems and different other sets. For any two elements of the given sets we introduce such notions as distances and angle between them. Formulas allowing to lind angle between element and subspace, angle between two subspaces of coordinate space are substantiated. Various examples including the case of coordinate space with no orthogonal basis are given.

Keywords: biform; basis as related to biform; quasi-norm; dimensionality; coordinate space; distance between elements; angle between elements; angle between elements and spaces; angle between subspaces.