

## **Построение приближенных аналитических решений задач изгиба предварительно напряженных прямоугольных и трапециевидных пластин при произвольных кинематических краевых условиях**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Дано приближенное аналитическое решение двумерной краевой задачи в прямоугольнике и трапеции, дифференциальное уравнение которой содержит переменные коэффициенты и некоторый параметр, а геометрические краевые условия произвольны. Полученное решение определяет деформирование плоских тонкостенных элементов конструкции, имеющих в плане форму прямоугольника и трапеции, при потере устойчивости системы, в которую эти элементы входят как блоки. Компоненты решения представлены либо в виде простых формул, либо в виде быстросходящихся рядов. Численно продемонстрирована эффективность метода расширения области до канонической в сочетании с методом наименьших квадратов по границе.

**Ключевые слова:** бигармонический оператор, исходное поле напряжений, переменные коэффициенты, параметр устойчивости, приближенное аналитическое решение, трапециевидная область, расширение области до канонической, метод наименьших квадратов по границе.

### **Введение**

В Национальном аэрокосмическом университете им. Н.Е. Жуковского с 1991г. ведутся работы, направленные на создание нового метода применительно к задачам упругой устойчивости и упругих колебаний тонкостенных пространственных систем, каковыми являются силовые конструкции летательных аппаратов, – метода идентификации краевых условий (МИКУ). Идея этого метода изложена в работах [1-3]. Метод реализуется в три этапа:

- построение исходного поля напряжений;
- постановка и решение так называемых промежуточных краевых задач (основной этап метода), что позволяет правильно определить условия взаимодействия блоков сложной системы при потере устойчивости и колебаниях;
- решение задач собственно устойчивости и собственных колебаний (это задачи из расширяющегося каталога).

Данная работа относится ко второму этапу МИКУ. Здесь дается аналитическое решение двумерной краевой задачи в прямоугольнике и трапеции, дифференциальное уравнение которой содержит переменные коэффициенты и некоторый параметр, а геометрические краевые условия произвольны. Решение поставленных задач определяет деформирование плоских тонкостенных элементов конструкции, имеющих в плане форму прямоугольника и трапеции, при потере устойчивости системы, в которую эти элементы входят как блоки, и, тем самым, становится возможным установление связи между обобщенными кинематическими краевыми функциями выделенного элемента системы и соответствующими им обобщенными статическими краевыми функциями.

Вначале дается решение для канонической прямоугольной области. Далее это решение используется для трапеции с помощью метода расширения области до канонической (МРОК) в сочетании с методом наименьших квадратов по грани-

це в функциональном пространстве С.Л. Соболева  $W_2^{(1)}(\Gamma)$ , где  $\Gamma$  – граница трапецевидной области.

Задача поперечного изгиба прямоугольной пластины при различных классических условиях опирания – давно известная задача. Многочисленные решения приведены, например, в работе [4]. Но среди множества решенных задач нет решения задачи об изгибе той же пластины при произвольных неоднородных краевых условиях. Впервые, по-видимому, эта задача была рассмотрена в работе [5], хотя до этого предпринимались попытки к решению задачи об изгибе жестко заземленной и произвольно нагруженной пластины [4, 6 и др.]. Далее, задачи об изгибе предварительно напряженных пластинах при неоднородных краевых условиях вовсе не рассматривались. Если к этому добавить, что в задачах устойчивости присутствует искомый параметр, то решения, выраженные через этот параметр и компоненты краевых функций, не отыскивались. При решении краевых задач математической физики в трапецевидной области известны два основных подхода: рассмотрение области в косоугольной системе координат и преобразование области к прямоугольнику. Первый применен, например, при решении задачи о кручении трапецевидной пластины в работе [7] и решении задачи об устойчивости неоднородного поля напряжений в свободно опертой трапецевидной пластине в работе [8]. Второй подход использовался, например, в работе [9] при решении по МИКУ задачи об устойчивости трапецевидной нервюры с криволинейными поясами при краевых условиях, допускающих частичное разделение переменных.

Таким образом, рассматриваемые ниже краевые задачи ставятся и решаются впервые. Предлагаемый метод решения ранее успешно был использован в работах [10, 11, 12].

### Прямоугольная пластина

Требуется найти решение следующей краевой задачи:

$$Aw(x, y) + k \cdot Bw(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$w|_{\Gamma} = \Phi(s), \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = \Psi(s), \quad \Gamma = \bigcup_{j=1}^4 \Gamma_j = \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $w(x, y)$  – искомая функция прогибов соболевского класса  $W_2^{(2)}(\Omega)$ ;  $A = \partial^4/\partial x^4 + 2\zeta_1 \cdot \partial^4/\partial x^2 \partial y^2 + \zeta_2 \cdot \partial^4/\partial y^4$  – бигармонический оператор в безразмерных координатах  $(x, y)$ , связанных с размерными  $(x_0, y_0)$  соотношениями  $x = x_0/a$ ,  $y = y_0/h$  ( $2a, 2h$  – размеры прямоугольника,  $h/a = \lambda$ );  $\zeta_1 = 1/\lambda^2$ ,  $\zeta_2 = 1/\lambda^4$ ;  $B = \zeta_3 N_x \cdot \partial^2/\partial x^2 + 2\zeta_4 \cdot N_{xy} \partial^2/\partial x \partial y + \zeta_5 N_y \cdot \partial^2/\partial y^2$  – оператор, учитывающий исходное напряженное состояние;  $k$  – параметр устойчивости;  $N_x = \delta \sigma_x$ ,  $N_{xy} = \delta \tau_{xy}$ ,  $N_y = \delta \sigma_y$ ;  $\delta$  – толщина пластины;  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$  – компоненты тензора напряжений, распределение

которых в области  $\Omega = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$  найдено из решения плоской задачи теории упругости [13];  $\zeta_3 = a^2/D$ ,  $\zeta_4 = a^2/\lambda D$ ,  $\zeta_5 = a^2/\lambda^2 D$ ;  $D = E\delta^3/12(1-\mu^2)$  – цилиндрическая жесткость;  $E, \mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины;  $\Phi(s)$ ,  $\Psi(s)$  – функции класса  $W_2^{(1)}(\Gamma)$ ;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к границе области;  $s$  – дуговая координата по границе  $\Gamma$ , изменяющаяся в пределах каждого участка  $\Gamma_j$  в интервале  $s_j \in [-1; 1]$  (обход границы – см. рис.1).

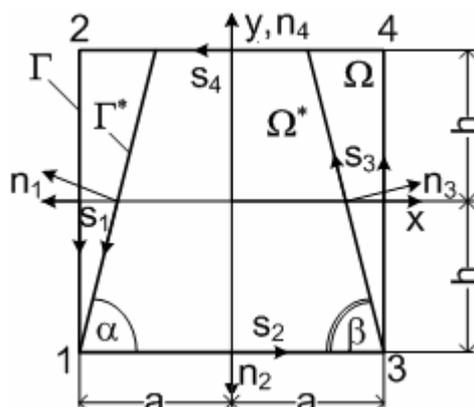


Рис.1. Основные геометрические обозначения

В силу линейности сформулированной выше краевой задачи система функций (2) представляется в виде:

$$\Phi(s) = \Phi_0(s) + \Phi_1(s), \quad \Psi(s) = \Psi_0(s) + \Psi_1(s), \quad (3)$$

где  $\Phi_0(s)$ ,  $\Psi_0(s)$  – явно выделяемые полиномы, принимающие на краях участков  $\Gamma_j$  заданные значения самой функции  $w(x, y)$  и ее производных  $\partial w / \partial x$ ,  $\partial w / \partial y$ ,  $\partial^2 w / \partial x \partial y$ ;  $\Phi_1(s) = \Phi(s) - \Phi_0(s)$ ,  $\Psi_1(s) = \Psi(s) - \Psi_0(s)$  – компоненты краевых функций, обращающиеся вместе со своими первыми производными в нуль на краях участков  $\Gamma_j$ , представляемые аппроксимациями

$$\Phi_1(s_j) = \sum_{k_j=0}^{K_j} \varphi_{j,k_j} \cdot H_{k_j}(s_j), \quad \Psi_1(s_j) = \sum_{q_j=0}^{Q_j} \psi_{j,q_j} \cdot H_{q_j}(s_j), \quad j = \overline{1,4}, \quad (4)$$

где  $H_n(s_j)$  [14] – специальные многочлены, образующие в метрике  $L_2(-1,1)$  полную ортонормированную систему функций.

В соответствии с представлением (3) решение задачи (1)-(2) ищется в виде

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y), \quad (5)$$

где компонента решения  $w_0(x, y)$  соответствует краевым функциям  $\Phi_0(s)$ ,  $\Psi_0(s)$ , а  $w_1(x, y)$  – краевым функциям (4). Каждая из компонент (5) строится последовательным удовлетворением соответствующим компонентам краевых условий (получение кинематически возможного поля перемещений) с дальнейшим удовлетворением уравнению краевой задачи (получение корректирующих функций).

По аналогии с работой [5] компонента  $w_0(x, y)$  вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} w_0(x, y) = & A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy + A_4x^2 + A_5y^2 + A_6xy^2 + A_7x^2y + \\ & + A_8x^3 + A_9y^3 + A_{10}xy^3 + A_{11}x^3y + \\ & + A_{12}g_{11}(x, y) + A_{13}g_{12}(x, y) + A_{14}g_{21}(x, y) + A_{15}g_{22}(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $g_{ik}(x, y)$  – известные функции (см. [5]). При представлении (6) краевые функции  $\Phi_0(s)$ ,  $\Psi_0(s)$  – кубические полиномы дуговой координаты ( $s_1 = -y, s_2 = x, s_3 = y, s_4 = -x$ ).

Коэффициенты  $A_k (k = \overline{0,15})$  определяются из решения линейной системы шестнадцати алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} w_0(X_i, Y_i) = W_{i,1}; \quad \frac{\partial w_0}{\partial x}(X_i, Y_i) = W_{i,2}; \\ \frac{\partial w_0}{\partial y}(X_i, Y_i) = W_{i,3}; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(X_i, Y_i) = W_{i,4}, \quad i = \overline{1,4}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $W_{i,j}$  – известные значения функции  $w(x, y)$  и ее производных в угловых точках с координатами  $(X_i, Y_i)$ , принятый способ нумерации которых виден из рис.1. Составив вектор-столбец из обобщенных перемещений угловых точек пластины

$$\overline{\mathbf{W}} = [W_{1,1}, W_{1,2}, W_{1,3}, W_{1,4}, W_{2,1}, \dots, W_{4,4}]^T, \quad (8)$$

компонента решения задачи (1)-(2) при  $\Phi(s) = \Phi_0(s)$ ,  $\Psi(s) = \Psi_0(s)$  записывается в виде:

$$w_0(x, y) = (\overline{\omega} + \overline{\omega}) \cdot \overline{\mathbf{W}}, \quad (9)$$

где вектор-строка  $\overline{\omega} = \{\overline{\omega}_k(x, y)\}_{k=1}^{16}$ , элементы которой являются функциями формы соответствующих обобщенных перемещений, получается следующим образом:

$$\overline{\omega} = \chi \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad (10)$$

где

$$\chi = [1, x, y, xy, x^2, y^2, xy^2, x^2y, x^3, y^3, xy^3, x^3y, g_{11}(x, y), g_{12}(x, y), g_{21}(x, y),$$

$g_{22}(x, y)]$ ;  $A$  – матрица системы (7); вектор-строка  $\bar{\omega} = \{\bar{\omega}_k(x, y)\}_{k=1}^{16}$  содержит элементы, являющиеся корректирующими функциями, дополняющими функции формы  $\bar{\omega}_k(x, y)$  до бигармонических. Для определения функций  $\bar{\omega}_k(x, y)$  необходимо решить краевую задачу:

$$(A + k \cdot B)\bar{w}(x, y) = -(A + k \cdot B)(\bar{\omega} \cdot \bar{W}), (x, y) \in \Omega, \bar{w}|_{\Gamma} = \partial \bar{w} / \partial n|_{\Gamma} = 0, \quad (11)$$

где принято обозначение  $\bar{w}(x, y) = \bar{\omega} \cdot \bar{W}$ . Точное решение поставленной задачи отсутствует, поэтому строится приближенное решение методом Бубнова-Галеркина по координатной системе  $\{H_m(x) \cdot H_n(y)\}_{m,n=0}^{\infty}$ , полной в пространстве положительно определенных операторов  $A$  и  $B$  [14]:

$$\bar{w}(x, y) = \bar{H} \cdot \bar{C}, \quad (12)$$

где  $\bar{C} = \{\bar{C}_k\}_{k=1}^{(\bar{M}+1)(\bar{N}+1)} = [C_{0,0}, \dots, C_{0,\bar{N}}, \dots, C_{\bar{M},0}, \dots, C_{\bar{M},\bar{N}}]^T$  – вектор-столбец, составленный из неизвестных коэффициентов разложения;

$\bar{H} = \{\bar{h}_k(x, y)\}_{k=1}^{(\bar{M}+1)(\bar{N}+1)} = [H_0(x)H_0(y), \dots, H_0(x)H_{\bar{N}}(y), \dots, H_{\bar{M}}(x)H_0(y), \dots, H_{\bar{M}}(x)H_{\bar{N}}(y)]$  – вектор-строка, элементы которой – соответствующие координатные функции, количеством  $(\bar{M} + 1)(\bar{N} + 1)$ .

Приближенность решения краевой задачи (11) надо понимать в смысле приближенности процедуры Бубнова-Галеркина, когда в решениях удерживается конечное число членов. Отметим, что функция  $\bar{w}(x, y)$ , определяемая выбранной координатной системой, точно удовлетворяет однородным краевым условиям. Из системы линейных уравнений  $\bar{a} \cdot \bar{C} = \bar{\beta} \cdot \bar{W}$ , доставляемой процедурой Бубнова-Галеркина, определяется зависимость коэффициентов разложения  $C$  от обобщенных угловых перемещений  $\bar{W}$ , откуда следует явный вид функций  $\bar{\omega}_k(x, y)$ :

$$\bar{\omega} = \bar{H} \cdot \bar{a}^{-1} \cdot \bar{\beta} \quad (13)$$

где

$$\bar{a} = \{\bar{\alpha}_{i,j}\} = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{h}_i(x, y) \cdot (A + k \cdot B) \bar{h}_j(x, y) dx dy \right\}_{i,j=1}^{(\bar{M}+1)(\bar{N}+1)},$$

$$\bar{\beta} = \{\bar{\beta}_{i,k}\} = \left\{ - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{h}_i(x, y) \cdot (A + k \cdot B) \bar{\omega}_k(x, y) dx dy \right\}_{i,k=1}^{(\bar{M}+1)(\bar{N}+1), 16}.$$

Система координатных функций  $\{H_m(x) \cdot H_n(y)\}_{m,n=0}^{M,N}$  обладает свойством сильной минимальности [14,15], поэтому ряды (12), (13) обладают хорошей сходимостью. Матрица разрешающей системы метода Бубнова-Галеркина  $\alpha$  в силу этого свойства координатной системы, хорошо обусловлена, следовательно, численная процедура получения приближенных решений (12), (13) устойчива.

Для построения компоненты решения  $w_1(x, y)$  из коэффициентов рядов краевых кинематических функций (4) составляется вектор-столбец следующей структуры:

$$\mathbf{W} = \{W_k\}_{k=1}^K = \left[ \{\Phi_{1,k_1}\}_{k_1=0}^{K_1}, \dots, \{\Phi_{4,k_4}\}_{k_4=0}^{K_4}, \{\Psi_{1,q_1}\}_{q_1=0}^{Q_1}, \dots, \{\Psi_{4,q_4}\}_{q_4=0}^{Q_4} \right]^T, \quad (14)$$

где  $K = \sum_{j=1}^4 (K_j + Q_j + 2)$ .

Вектор-столбцу (14) соответствует вектор-строка функций формы

$$\omega_1 = \{\omega_{1,k}(x, y)\}_{k=1}^K = \begin{bmatrix} \{\eta_1(y)H_{k_1}(x)\}_{k_1=0}^{K_1}, \{\eta_1(x)H_{k_2}(y)\}_{k_2=0}^{K_2}, \\ \{\eta_2(y)H_{k_3}(x)\}_{k_3=0}^{K_3}, \{\eta_2(x)H_{k_4}(y)\}_{k_4=0}^{K_4}, \\ \{\eta_3(y)H_{q_1}(x)\}_{q_1=0}^{Q_1}, \{\eta_3(x)H_{q_2}(y)\}_{q_2=0}^{Q_2}, \\ \{\eta_4(y)H_{q_3}(x)\}_{q_3=0}^{Q_3}, \{\eta_4(x)H_{q_4}(y)\}_{q_4=0}^{Q_4} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где функции  $\eta_j(z)$  определяются таким образом:

$$\eta_1(z) = \frac{1}{4}(2 - 3z + z^3), \quad \eta_2(z) = \frac{1}{4}(2 + 3z - z^3), \\ \eta_3(z) = \frac{1}{4}(1 - z - z^2 + z^3), \quad \eta_4(z) = \frac{1}{4}(-1 - z + z^2 + z^3).$$

При этом

$$\eta_1(-1) = 1, \quad \eta_1(1) = 0, \quad \eta_1'(-1) = 0, \quad \eta_1'(1) = 0; \\ \eta_2(-1) = 0, \quad \eta_2(1) = 1, \quad \eta_2'(-1) = 0, \quad \eta_2'(1) = 0; \\ \eta_3(-1) = 0, \quad \eta_3(1) = 0, \quad \eta_3'(-1) = 1, \quad \eta_3'(1) = 0; \\ \eta_4(-1) = 0, \quad \eta_4(1) = 0, \quad \eta_4'(-1) = 0, \quad \eta_4'(1) = 1.$$

Бигармонизирующие поправки для функций формы  $\omega_k(x, y)$  из (15) содержатся в вектор-строке  $\tilde{\omega}_1 = \{\tilde{\omega}_{1,k}(x, y)\}_{k=1}^K$ , элементы которой определяются из решения краевой задачи, аналогичной (11):

$$(A + k \cdot B)\tilde{w}(x, y) = -(A + k \cdot B)(\omega_1 \cdot \mathbf{W}), \quad (x, y) \in \Omega, \quad \tilde{w}|_{\Gamma} = \partial \tilde{w} / \partial n|_{\Gamma} = 0, \quad (16)$$

где принято обозначение  $\tilde{w}(x, y) = \tilde{\omega}_1 \cdot W$ . Все сказанное о решении задачи (11) переносится без изменения для решения задачи (16). Тогда

$$\tilde{\omega}_1 = H \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta, \quad (17)$$

где

$$H = \{h_k(x, y)\}_{k=1}^{(M+1)(N+1)} = [H_0(x)H_0(y), \dots, H_0(x)H_N(y), \dots, H_M(x)H_0(y), \dots, H_M(x)H_N(y)];$$

$$\alpha = \{\alpha_{i,j}\} = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_i(x, y) \cdot (A + k \cdot B)(h_j(x, y)) dx dy \right\}_{i,j=1}^{(M+1)(N+1)};$$

$$\beta = \{\beta_{i,k}\} = \left\{ - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_i(x, y) \cdot (A + k \cdot B)(\omega_k) dx dy \right\}_{i,k=0}^{(M+1)(N+1), K}.$$

Таким образом,

$$w_1(x, y) = \omega \cdot W, \quad (18)$$

где  $\omega = \{\omega_k(x, y)\}_{k=1}^K = \omega_1 + \tilde{\omega}_1$ , и решение краевой задачи (1)-(2) можно считать завершённым.

Как только построена разрешающая функция (5), то все параметры напряженно-деформированного состояния получаются путем дифференцирования  $(M_x(s_j), M_y(s_j))$  – погонные реактивные моменты;  $V_x(s_j), V_y(s_j)$  – погонные реактивные усилия по Кирхгоффу):

$$M_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)} = M_x(s_1(3)) = C_{M_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^{\bar{W}} \cdot \bar{W} + C_{M_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^W \cdot W;$$

$$V_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)} = V_x(s_1(3)) = C_{V_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^{\bar{W}} \cdot \bar{W} + C_{V_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^W \cdot W;$$

$$M_y|_{\Gamma_2(\Gamma_4)} = M_y(s_2(4)) = C_{M_y|_{\Gamma_2(\Gamma_4)}}^{\bar{W}} \cdot \bar{W} + C_{M_y|_{\Gamma_2(\Gamma_4)}}^W \cdot W;$$

$$V_y|_{\Gamma_2(\Gamma_4)} = V_y(s_2(4)) = C_{V_y|_{\Gamma_2(\Gamma_4)}}^{\bar{W}} \cdot \bar{W} + C_{V_y|_{\Gamma_2(\Gamma_4)}}^W \cdot W, \quad (19)$$

где

$$C_{M_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^{\bar{W}} = A_{M_x}(\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}); \quad C_{M_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^W = A_{M_x} \omega;$$

$$C_{V_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^{\bar{W}} = A_{V_x}(\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}); \quad C_{V_x|_{\Gamma_1(\Gamma_3)}}^W = A_{V_x} \omega;$$

$$A_{M_x} = -D \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu}{a^2 \lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad A_{V_x} = -D \left( \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{2-\mu}{a^3 \lambda^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right),$$

$$x = x_{1(3)}(s_{1(3)}), \quad y = y_{1(3)}(s_{1(3)});$$

$$C_{M_y}^{\bar{W}}|_{\Gamma_2(\Gamma_4)} = A_{M_y}(\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}); \quad C_{M_y}^W|_{\Gamma_2(\Gamma_4)} = A_{M_y} \omega;$$

$$C_{V_y}^{\bar{W}}|_{\Gamma_2(\Gamma_4)} = A_{V_y}(\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}); \quad C_{V_y}^W|_{\Gamma_2(\Gamma_4)} = A_{V_y} \omega;$$

$$A_{M_y} = -D \left( \frac{1}{a^2 \lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\mu}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad A_{V_y} = -D \left( \frac{1}{a^3 \lambda^3} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{2-\mu}{a^3 \lambda} \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \right),$$

$$x = x_{2(4)}(s_{2(4)}), \quad y = y_{2(4)}(s_{2(4)}).$$

### Трапецевидная пластина

Рассматривается краевая задача (1)-(2), в которой прямоугольная область  $\Omega$  заменена на трапецевидную область  $\Omega^*$  (рис.1) с границей  $\Gamma^* = \bigcup_{j=1}^4 \Gamma_j^*$ , параметрические уравнения участков которой имеют следующий вид ( $\alpha, \beta$  – углы при основании трапеции):

$$\Gamma_1^* : \begin{cases} x = x_1(s_1) = \lambda \cdot (1 - s_1) \cdot \text{ctg} \alpha - 1; \\ y = y_1(s_1) = -s_1; \end{cases} \quad \Gamma_2^* : \begin{cases} x = x_2(s_2) = s_2; \\ y = y_2(s_2) = -1; \end{cases}$$

$$\Gamma_3^* : \begin{cases} x = x_3(s_3) = 1 - \lambda \cdot (s_3 + 1) \cdot \text{ctg} \beta; \\ y = y_3(s_3) = s_3; \end{cases}$$

$$\Gamma_4^* : \begin{cases} x = x_4(s_4) = \lambda \cdot (\text{ctg} \alpha - \text{ctg} \beta) - [1 - \lambda \cdot (\text{ctg} \alpha + \text{ctg} \beta)] \cdot s_4; \\ y = y_4(s_4) = 1, \end{cases}$$

где  $s_j$  – дуговая координата вдоль стороны  $\Gamma_j^*$ , для которой справедливо все сказанное выше о дуговой координате вдоль сторон прямоугольника.

Распределение в области  $\Omega^*$  компонент исходного поля  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  найдено в [11].

Как видно из рис.1, область  $\Omega^*$  вписана в область  $\Omega$ . Это позволяет использовать ранее полученное решение для прямоугольника в качестве канонического при решении задачи (1)-(2) в трапеции.

Компонента решения  $w_0(x, y)$  для области  $\Omega^*$  строится аналогично функции (9) с той разницей, что коэффициенты  $A_k$  ( $k = \overline{0,15}$ ) из (6) определяются из системы (7), в которой следует вместо координат углов прямоугольника подставить координаты углов трапеции.

Пусть  $\Phi_1^*, \Psi_1^*$  – кинематические функции, аналогичные разложениям (4), заданные на границе  $\Gamma^*$ :

$$\Phi_1^* = \mathbf{H}^{W^*} \cdot \mathbf{W}^*, \Psi_1^* = \mathbf{H}^{\Theta^*} \cdot \Theta^*, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{W^*} &= \left\{ h_k^{W^*}(s) \right\}_{k=1}^{K^*} = \left[ \{ H_{k_1}(s_1) \}_{k_1=0}^{K_1^*}, \dots, \{ H_{k_4}(s_4) \}_{k_4=0}^{K_4^*} \right]; \\ \mathbf{H}^{\Theta^*} &= \left\{ h_q^{\Theta^*}(s) \right\}_{q=1}^{Q^*} = \left[ \{ H_{q_1}(s_1) \}_{q_1=0}^{Q_1^*}, \dots, \{ H_{q_4}(s_4) \}_{q_4=0}^{Q_4^*} \right]; \\ \mathbf{W}^* &= \left\{ W_k^* \right\}_{k=1}^{K^*} = \left[ \{ \Phi_{1,k_1}^* \}_{k_1=0}^{K_1^*}, \dots, \{ \Phi_{4,k_4}^* \}_{k_4=0}^{K_4^*} \right]^T, \quad K^* = \sum_{j=1}^4 K_j^*; \\ \Theta^* &= \left\{ \Theta_q^* \right\}_{q=1}^{Q^*} = \left[ \{ \Psi_{1,q_1}^* \}_{q_1=0}^{Q_1^*}, \dots, \{ \Psi_{4,q_4}^* \}_{q_4=0}^{Q_4^*} \right]^T, \quad Q^* = \sum_{j=1}^4 Q_j^*. \end{aligned}$$

Функция  $w_1(x, y)$  из (18) удовлетворяет бигармоническому уравнению всюду в области  $\Omega^*$  (поскольку  $\Omega^* \subset \Omega$ ) для произвольных значений постоянных  $\mathbf{W}$ . Определим эти постоянные из условия, что на границе  $\Gamma^*$  функция  $w_1(x, y)$  приближает краевые функции (20) наилучшим возможным способом в смысле наименьших квадратов в метрике  $W_2^{(1)}(\Gamma^*)$ :

$$\int_{\Gamma^*} (w_1 - \Phi_1^*)^2 ds + \int_{\Gamma^*} \left( \frac{\partial w_1}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial s} \right)^2 ds + \int_{\Gamma^*} \left( \frac{\partial w_1}{\partial n} - \Psi_1^* \right)^2 ds \rightarrow \min. \quad (21)$$

Для коэффициентов  $\mathbf{W}$  функции, на которой достигается этот минимум, получаем систему

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{B}^{W^*} \cdot \mathbf{W}^* + \mathbf{B}^{\Theta^*} \cdot \Theta^*, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{A} = \{ a_{m,k} \} = \left\{ \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \left\{ \omega_k(s_i) \omega_m(s_i) + \frac{\partial \omega_k}{\partial s_i}(s_i) \frac{\partial \omega_m}{\partial s_i}(s_i) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \omega_k}{\partial n_i}(s_i) \frac{\partial \omega_m}{\partial n_i}(s_i) \right\} ds_i \Bigg\}_{m,k=1}^K,$$

$$\mathbf{B}^{W^*} = \left\{ b_{m,k}^{W^*} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \left\{ h_k^{W^*}(s_i) \omega_m(s_i) + \frac{dh_k^{W^*}(s_i)}{ds_i} \frac{\partial \omega_m}{\partial s_i}(s_i) \right\} ds_i \right\}_{m,k=1}^{K,K^*},$$

$$\mathbf{B}^{\Theta^*} = \left\{ b_{m,q}^{\Theta^*} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \left\{ h_q^{\Theta^*}(s_i) \frac{\partial \omega_m}{\partial n_i}(s_i) \right\} ds_i \right\}_{m,q=1}^{K,Q^*}.$$

В последних выражениях следует полагать:

$$\omega_t(s_i) = \omega_t(x_i(s_i), y_i(s_i)); \quad \frac{\partial \omega_t}{\partial s_i}(s_i) = \frac{\partial \omega_t}{\partial x} \Bigg|_{x=x_i(s_i)} \cdot x_i'(s_i) + \frac{\partial \omega_t}{\partial y} \Bigg|_{y=y_i(s_i)} \cdot y_i'(s_i);$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i}(s_i) = \frac{\partial}{\partial n_i} \Bigg|_{\substack{x=x_i(s_i) \\ y=y_i(s_i)}}; \quad \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \cos \alpha; \quad \frac{\partial}{\partial n_2} = -\frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial n_3} = \frac{\partial}{\partial x} \sin \beta + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta; \quad \frac{\partial}{\partial n_4} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Определитель матрицы  $\mathbf{A}$  системы (22) является определителем Грама для линейно независимых функций  $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \dots$  в пространстве С.Л. Соболева  $W_2^{(1)}(\Gamma)$ . Следовательно,  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , и рассматриваемая система (22) однозначно разрешима. Тогда

$$w_1(x, y) = \omega \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \left( \mathbf{B}^{W^*} \cdot \mathbf{W}^* + \mathbf{B}^{\Theta^*} \cdot \Theta^* \right).$$

Поскольку  $\Omega^*$  – односвязная область с границей Липшица, а  $\Phi_1^*, \Psi_1^* \in W_2^{(1)}(\Gamma^*)$ , то метод наименьших квадратов (21) для рассматриваемой задачи сходится [16].

### Численный анализ сходимости и точности решений

В табл.1 приведены значения некоторых коэффициентов  $C_{mn}$  в зависимости от числа удерживаемых членов  $\overline{M}, \overline{N}$  в представлении (12). Из данных таблицы следует два основных вывода. Во-первых, значения коэффициентов, начиная с некоторых  $\overline{M}, \overline{N}$ , стабилизируются и в дальнейшем от  $\overline{M}, \overline{N}$  не зависят, т.е. на практике видно, что процесс получения приближенного решения является устой-

чивым. Во-вторых, значения коэффициентов с ростом хотя бы в одном индексе резко падают, что свидетельствует о хорошей сходимости представления (12).

Таблица 1

Значения коэффициентов в зависимости от числа удерживаемых членов

$$\lambda = 1, \alpha = \beta = 80^0; \Phi(s_1) = \frac{1}{2}(1 - s_1), \Phi(s_2) = 0, \Phi(s_3) = \frac{1}{2}(1 + s_3), \Phi(s_4) = 1; \Psi(s) = 0; k = 2$$

$\overline{M}, \overline{N}$	$10^2 C_{0,0}$	$10^3 C_{0,1}$	$10^4 C_{0,2}$	$10^6 C_{0,3}$
0	3,21	-	-	-
1	3,15	7,48	-	-
2	3,12	7,42	5,12	-
3	3,12	7,35	4,97	6,32

Сходимость функций (17) прослеживается в табл.2, где приведены расстояния между элементами фундаментальной последовательности  $\tilde{\omega}_{1,1}^{M,N}(x, y)$  в смысле метрики энергетического пространства оператора краевой задачи ( $\lambda = 2, \alpha = \beta = 85^0; \Phi|_{\Gamma_1^*} = H_0(s_1), \Phi|_{\Gamma_{2,3,4}^*} = \Psi(s) = 0; k = 1$ ). В той же таблице для возможности относительной оценки величины  $\rho^2$  приведено отношение

$$\chi = \rho^2 \left( \tilde{\omega}_{1,1}^{M,N}, \tilde{\omega}_{1,1}^{\overline{M}, \overline{N}} \right) / \left\| \omega_{1,1}^{M,N} \right\|_{A+kB}^2.$$

Хорошая сходимость (в среднем) метода наименьших квадратов по границе иллюстрируется данными табл.3. Проведенные исследования показали, что для определения коэффициентов  $\mathbf{W}$  можно использовать условие (21), в котором опущен второй интеграл, при этом, однако, ухудшается скорость сходимости на границе, что видно из графиков рис.2, и в области.

Хорошей сходимостью обладают и производные от функции (5), что видно из графика рис.3, где показана зависимость относительной погрешности в определении приближенного значения коэффициента жесткости  $\left\{ \mathbf{C}_{M_x}^{\mathbf{W}} \right\}_1$  на участке границы  $\Gamma_1$  от количества гармоник  $K_j, Q_j$  в представлении (14).

Таблица 2

Расстояния между элементами фундаментальной последовательности  $\tilde{\omega}_{1,1}^{M,N}$

$M, N; \overline{M}, \overline{N}$	0	1	2	3	4
$\rho^2 \left( \tilde{\omega}_{1,1}^{M,N}, \tilde{\omega}_{1,1}^{\overline{M}, \overline{N}} \right)$	$2,41 \cdot 10^{-2}$	$5,82 \cdot 10^{-3}$	$6,53 \cdot 10^{-5}$	$3,25 \cdot 10^{-6}$	
$\chi, \%$	4,9%	0,2%	$1,7 \cdot 10^{-5}\%$	$3,2 \cdot 10^{-7}\%$	

Таблица 3

Расстояния между элементами фундаментальной последовательности приближенных решений  $w_1^{K_j, Q_j}(x, y)$

$$(\lambda = 1/2, \alpha = \beta = 75^0; \Psi|_{\Gamma_1^*} = 2H_0(s_2) + 1,5 \cdot H_1(s_2) + H_2(s_2),$$

$$\Psi|_{\Gamma_{2,3,4}^*} = \Phi(s) = 0; k = 3)$$

$K_j, Q_j; \overline{\overline{K_j, Q_j}}$	0	1	2	3	4	5
$\rho^2 \left( w^{K_j, Q_j}, \overline{\overline{w^{K_j, Q_j}}} \right)$	2,3417	1,9511	1,4852	0,0943	0,0102	

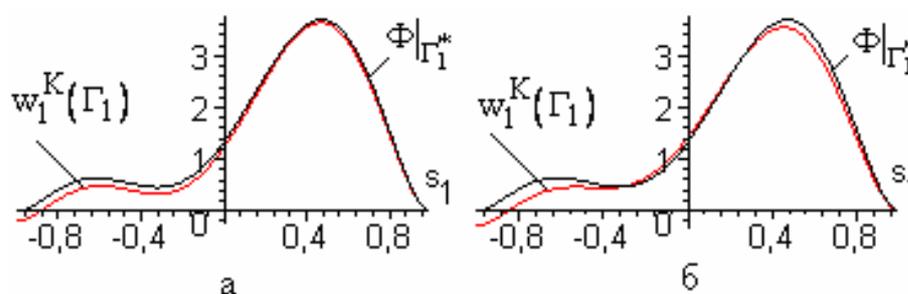


Рис. 2. Сходимость решения  $w_1^K(x, y)$  к краевой функции  $\Phi|_{\Gamma_1^*}$  при удержании второго слагаемого в (21) (а) и без него (б) при одном и том же числе  $K(K_j, Q_j = 2)$

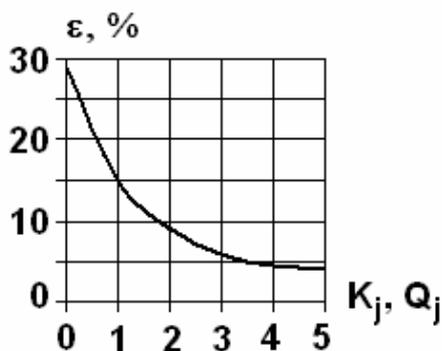


Рис. 3. К оценке сходимости производных функции (5)

Точность получаемых результатов при численном анализе напрямую связана со сходимостью метода и устойчивостью процесса (как получения приближенных решений, так и самих решений). Априорные оценки точности получения приближенных решений малоэффективны [16]. Более важное значение имеет апостериорная оценка, т.е. оценка точности уже полученных приближенных решений в не-

которой метрике. Оценка точности приближенного решения проведена вычислением невязок в уравнении (1), которые представлены в таблице 4.

Таблица 4

К оценке точности приближенного решения:

невязки уравнения (1) в отдельных точках области  $\Omega^*$

$(\lambda = 1, \alpha = \beta = 80^0; \Phi|_{\Gamma_1^*} = H_0(s_1), \Phi|_{\Gamma_{2,3,4}^*} = \Psi(s) = 0; k = 4; M, N = 4)$

$y$	-0,95	-0,60	-0,3	0	0,3	0,6	0,95
$\Delta, \% (x = 0)$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	3,4	2,3	4,1	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$
$\Delta, \% (x = -0,3)$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-1}$
$\Delta, \% (x = -0,6)$	$9,4 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$

## Выводы

Построены приближенные аналитические решения задач изгиба предварительно напряженных прямоугольных и трапециевидных пластин, явно выраженные через краевые кинематические функции. Путем дифференцирования полученных решений определены условия перехода на смежных границах рассмотренных элементов, входящих в тонкостенные разветвленные системы. Компоненты решений представлены либо в виде простых формул, либо в виде быстроходящихся рядов. Численно продемонстрирована эффективность метода расширения области до канонической в сочетании с методом наименьших квадратов по границе.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С.А. Халилову за постановку задачи, конструктивную критику и постоянную помощь в работе.

## Список литературы

1. Халилов С.А. Проблема устойчивости несущей конструкции большегрузных самолетов / С.А. Халилов // Авиационно-космическая техника и технология. Труды Харьковского авиационного института им. Н.Е. Жуковского. – Х., 1994. – С. 358-369.
2. Халилов С.А. Развитие альтернативного подхода к решению проблемы устойчивости силовых элементов конструкции самолета / С.А. Халилов // Авиационно-космическая техника и технология. Труды Харьковского авиационного института им. Н.Е. Жуковского. – Х., 1995. – С. 223-227.
3. Халилов С.А. Метод идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости. Идея метода / С.А. Халилов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2003. – 36/1. – С. 15-21.
4. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

5. Халилов С.А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях / С.А. Халилов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: темат. сб. научн. тр. – Х.: ХАИ, 1987. – С. 31-39.
6. Даревский В.М. Новое решение задачи об изгибе защемленной по краям прямоугольной пластины / В.М. Даревский, И.Л. Шарин // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 183-194.
7. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.-Л.: Гос.изд.техн.-теор.лит., 1950. – 695 с.
8. Яровой М.А. Устойчивость трапециевидной пластины переменной толщины // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2004. – Вып.37(2). – С. 132-137.
9. Минтук В.Б. Устойчивость подкрепленной в области и на криволинейной границе пластины как элемента тонкостенной пространственной системы: Дис. ...канд.техн.наук: 01.02.04. – Х., 2004. – 147 с.
10. Халилов С.А. Приближенное замкнутое решение плоской задачи теории упругости в трапециевидной области / С.А. Халилов, М.А. Яровой // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. –2/10. – С. 33-38.
11. Халилов С.А. Построение приближенного аналитического решения плоской задачи теории упругости в трапециевидной области / С.А. Халилов, С.Г. Кравченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2009. – 1/58. – С. 16-23.
12. Халилов С.А. Решение основной бигармонической проблемы в трапециевидной области / С.А. Халилов, С.Г. Кравченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ «ХАИ», 2009. – Вып.43. – С. 183-193.
13. Халилов С.А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. научн. тр. – Х.: ХАИ, 1978, – Вып.5. – С. 46-56.
14. Халилов С.А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. научн. тр. – Х.: ХАИ, 1978. – Вып.5. – С. 46-56.
15. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
16. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: пер.с англ. – М.: Мир, 1985. – 590 с.

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Проценко В.С., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 01.03.10.

## **Побудована наближених аналітичних розв'язків задач згину попередньо напружених прямокутних та трапецієподібних пластин за довільних кінематичних крайових умов**

Наведено наближене аналітичне розв'язання двовимірної крайової задачі у прямокутнику та трапеції, диференціальне рівняння якої має змінні коефіцієнти та деякий параметр, а геометричні крайові умови довільні. Набутий розв'язок визначає деформування плоских тонкостінних елементів конструкцій, що мають у плані форму прямокутника та трапеції, при втраті стійкості системи, до якої ці елементи входять як блоки. Компоненти розв'язку подано або у вигляді простих формул, або у вигляді швидкозбіжних рядів. Чисельно продемонстровано ефективність методу розширення області до канонічної у поєднанні з методом найменших квадратів уздовж границі.

**Ключові слова:** бігармонічний оператор, вихідне поле напружень, змінні коефіцієнти, параметр стійкості, наближений аналітичний розв'язок, трапецієподібна область, розширення області до канонічної, метод найменших квадратів уздовж границі

## **Defining the approximate analytical solutions of bending problems of pre-stressed rectangular and trapezoid plates under voluntary cinematic boundary conditions**

Approximate analytical solution of two-dimensional boundary problem in rectangular and trapezoid is given; the differential equation of boundary problem contains variable coefficients and certain parameter; geometrical boundary conditions are voluntary. The solution obtained defines the buckling failure straining of plane thin-walled structure elements (rectangular and trapezoid top view) that are the part of the system as blocks. Simple formulas or rapidly convergent series represent components of solution. Efficiency of application of method of region expansion to canonic with least-squares method is demonstrated numerically.

**Keywords:** biharmonic operator, initial stress field, variable coefficients, stability factor, approximate analytical solution, trapezoid region, method of region expansion to canonic, least-squares method