УДК 621.9.064

Ю.А. Раисов, Н.И. Бычков

Алгоритм эллиптической интерполяции

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

Приведен алгоритм эллиптической интерполяции для системы ЧПУ. Алгоритм использует метод ЦДА для вычисления приращений координат с последующей коррекцией точек кривой посредством оценочной функции, как это делается в некоторых алгоритмах круговой интерполяции. Алгоритм обеспечивает точность интерполяции в пределах одной дискреты.

Ключевые слова: *эллипс, шаг интерполяции, коррекция радиуса.*

В современных системах ЧПУ предусмотрен довольно широкий набор видов интерполяции, в том числе и эллиптическая интерполяция. В частности, такой вид интерполяции имеют системы .Fanuc, самой крупной фирмы-производителя устройств ЧПУ. Интерес к этому виду интерполяции, видимо, обусловлен тем, помимо прямого назначения, т.е. задания движения по дуге эллипса, эллиптические дуги, как элементы кривой с переменным радиусом, могут быть использованы для аппроксимации более сложных кривых. Имеется информация об использовании об использовании такого решения фирмой Sharnoa (Израиль). К сожалению, фирмы-производители устройств ЧПУ не раскрывают своих решений, относя их, по видимому, к «ноу-хау».

В данной статье описан алгоритм эллиптической интерполяции, при разработке которого авторы использовали собственный опыт по созданию алгоритмов круговой интерполяции, обеспечивающих точность в одну дискрету и достаточную для практики стабильность контурной скорости.

Для достижения поставленной цели использовалось сочетание методов цифрового интегрирования и оценочной функции.

Алгоритм использует сочетание методов ЦДА (цифрового интегрирования) и ОФ (оценочной функции) [1]. Сначала по методу ЦДА вычисляются приращения координат за цикл управления и очередные значения координат, а затем с использованием ОФ выполняется коррекция значений координат и их приращений так, чтобы погрешность в положении текущей точки относительно точной, принадлежащей эллипсу, не превышала одной дискреты d.

Соотношения алгоритма получены из канонического уравнения эллипса.

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

где: a – полуось вдоль оси X;

b – полуось эллипса вдоль оси Y.

Уравнение (1) преобразовано к виду:

$$\mathrm{k}^2 \cdot X^2 + Y^2 = k^2 \cdot a^2 \qquad (2)$$

где $\mathrm{k}=\frac{b}{a}$.

Приращение координат за цикл управления вычисляются по соотношениям:

$$\Delta \mathrm{X} = \mathrm{int}\frac{H \cdot Y}{k \cdot a},\ \Delta \mathrm{Y} = -\mathrm{int}\frac{H \cdot X}{a} \tag{3}$$

где: H – шаг интерполяции $\mathrm{H} = V \cdot T_{Ц}$ (V – скорость подачи, $T_{Ц}$ - длительность цикла управления)

int – целая часть числа.

Соотношения (3) составлены для движения в первом квадранте по часовой стрелке, при этом шаг H имеет знак “+”, значения X и Y также положительные. Соответственно при других вариантах движения X, Y и H должны быть взяты с соответствующими знаками.

Не трудно убедиться в том, что если бы значения $\Delta \mathrm{X}$ и $\Delta \mathrm{Y}$ вычислялись точно, то приращение по контуру за $T_{Ц}$

$$\Delta \mathrm{l} = \sqrt{\Delta X_T^2 + \Delta Y_T^2} = H$$

т.е. обеспечивалась постоянная контурная скорость. В действительности, в силу целочисленности вычислений $\Delta \mathrm{X}$ и $\Delta \mathrm{Y}$, колебания контурной скорости неизбежны и тем значительнее, чем меньше величина H.

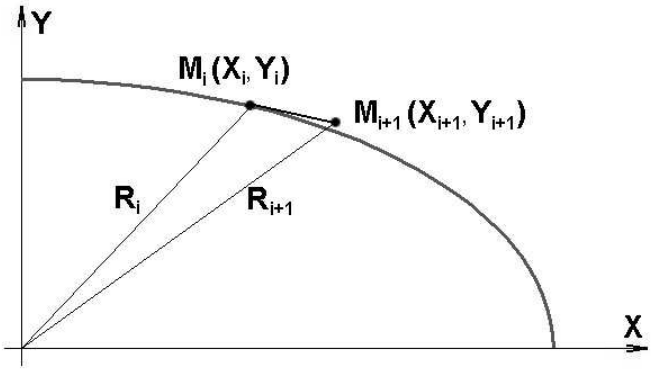

Рис. 1. Интерполяция эллипса

Приращения $\Delta \mathrm{X}$ и $\Delta \mathrm{Y}$ смещают точку $\mathrm{M_i}$ (рис. 1) в положение $\mathrm{M_{i+1}}$, в общем случае не на линии эллипса. Для точки $\mathrm{M_{i+1}}$ вычисляется значение ОФ, общее выражение которой вытекает из (2):

$$\mathrm{U_i} = \mathrm{k}^2 \cdot X^2 + Y^2 - k^2 \cdot a^2 \tag{4}$$

Для точки $\mathrm{M_{i+1}}$ получим:

$$\mathrm{U_{i+1}} = \mathrm{k}^2 \cdot \left(X + \Delta \mathrm{X}\right)^2 + \left(Y + \Delta Y\right)^2 - \mathrm{k}^2 \cdot a^2 =$$
$$\mathrm{U_i} + 2 \cdot \left(\mathrm{k}^2 \cdot X_i \cdot \Delta \mathrm{X} + Y_i \cdot \Delta Y\right) + \mathrm{k}^2 \cdot \Delta \mathrm{X}^2 + \Delta Y^2;$$

И далее:

$$\mathrm{X_{i+1}} = X_i + \Delta X;$$
$$\mathrm{Y_{i+1}} = Y_i + \Delta Y;$$

Можно показать, что если $\left|\mathrm{U_{i+1}}\right| \le a,$ то погрешность положения точки $\mathrm{M_{i+1}}$, измеренная вдоль радиуса вектора $\mathrm{R_{i+1}}$, не превосходит 1d.

Поэтому если $\left|\mathrm{U}_{\mathrm{i+1}}\right| \le a,$ то полученные значения $\mathrm{X}_{\mathrm{i+1}}$, $\mathrm{Y}_{\mathrm{i+1}}$, $\Delta\mathrm{X}$ и $\Delta\mathrm{Y}$ считаются точными и будут использованы для вычислений в следующем цикле и для выдачи на приводы подач.

Если же $\left|\mathrm{U}_{\mathrm{i+1}}\right| > a,$ то выполняется коррекция вдоль радиуса $\mathrm{R}_{\mathrm{i+1}}$, для чего вычисляются, подобно тому, как это выполнено в [2]:

$$\mathrm{R}_{\mathrm{i+1}} = \mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{X}_{\mathrm{i+1}}^2 + Y_{\mathrm{i+1}}^2};$$

$$\delta\mathrm{R} = -\frac{U}{a};$$

$$\delta\mathrm{X} = \mathrm{Re}\left(\frac{\delta\mathrm{R}\cdot\mathrm{X}_{\mathrm{i+1}}}{\mathrm{k}\cdot\mathrm{R}}\right);$$

$$\delta Y = \mathrm{Re}\left(\frac{\delta\mathrm{R}\cdot\mathrm{Y}_{\mathrm{i+1}}}{\mathrm{R}}\right);$$

$$\mathrm{U}^* = U_{i+1} + 2\left(\mathrm{k}^2\cdot X_{i+1}\cdot\delta X + Y_{i+1}\cdot\delta Y\right) + \mathrm{k}^2\cdot\delta X^2 + \delta Y^2$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_{\mathrm{i+1}} + \delta\mathrm{X};$$

$$\Delta\mathrm{X} = \Delta\mathrm{X}_{\mathrm{i+1}} + \delta\mathrm{X};$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_{\mathrm{i+1}} + \delta\mathrm{Y};$$

$$\Delta\mathrm{Y} = \Delta\mathrm{Y}_{\mathrm{i+1}} + \delta\mathrm{Y};$$

Re – округление до целого.

Полученные значения X, Y и U* запоминаются для использования в следующем цикле, а скорректированные $\Delta\mathrm{X}$ и $\Delta\mathrm{Y}$ выдаются на приводы подач.

Для точного выхода в конечную точку участка интерполяции предлагается вместо слежения по контуру выполнять слежение за остатками перемещений по осям, т.е. в каждом цикле после вычисления $\Delta\mathrm{X}$ и $\Delta\mathrm{Y}$ определяются:

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}} = \mathrm{L}_{\mathrm{X}} - \Delta X;\ \mathrm{L}_{\mathrm{Y}} = \mathrm{L}_{\mathrm{Y}} - \Delta\mathrm{Y}$$

(начальные значения L_{X} и L_{Y} берутся равными сумме перемещений по соответствующей оси по всем квадрантам, через которые проходит дуга эллипса).

Если хотя бы одна из величин L_{X}, L_{Y} > 2H, то очередные вычисления следует выполнять по основному алгоритму. В противном случае принимается

$\Delta X = LX,\ \Delta Y = LY,$

а для исключения скачка скорости на последнем шаге интерполяции вычисляется остаток контурного пути

$\Delta l = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2},$

поправочный коэффициент $C = \frac{\Delta l}{H}$, и вводится задержка выдачи приращений величиной

$$T_З = CT_Ц.$$

На рис. 2 приведена полная схема алгоритма, на рис. 3 – пример интерполяции эллипса с a=200, b=100 от точки (0, 100) – полный эллипс, на рис. 4 – наложенные друг на друга полные эллипсы с теми же параметрами, что и рис. 3 - один по алгоритму интерполяции, второй – по точному уравнению эллипса. Из

рис.4 следует, что в пределах точности счета достигается полное совпадение траекторий реализованных по описанному алгоритму и по точному уравнению эллипса. Это означает, что достигнутая точность не хуже одной дискреты.

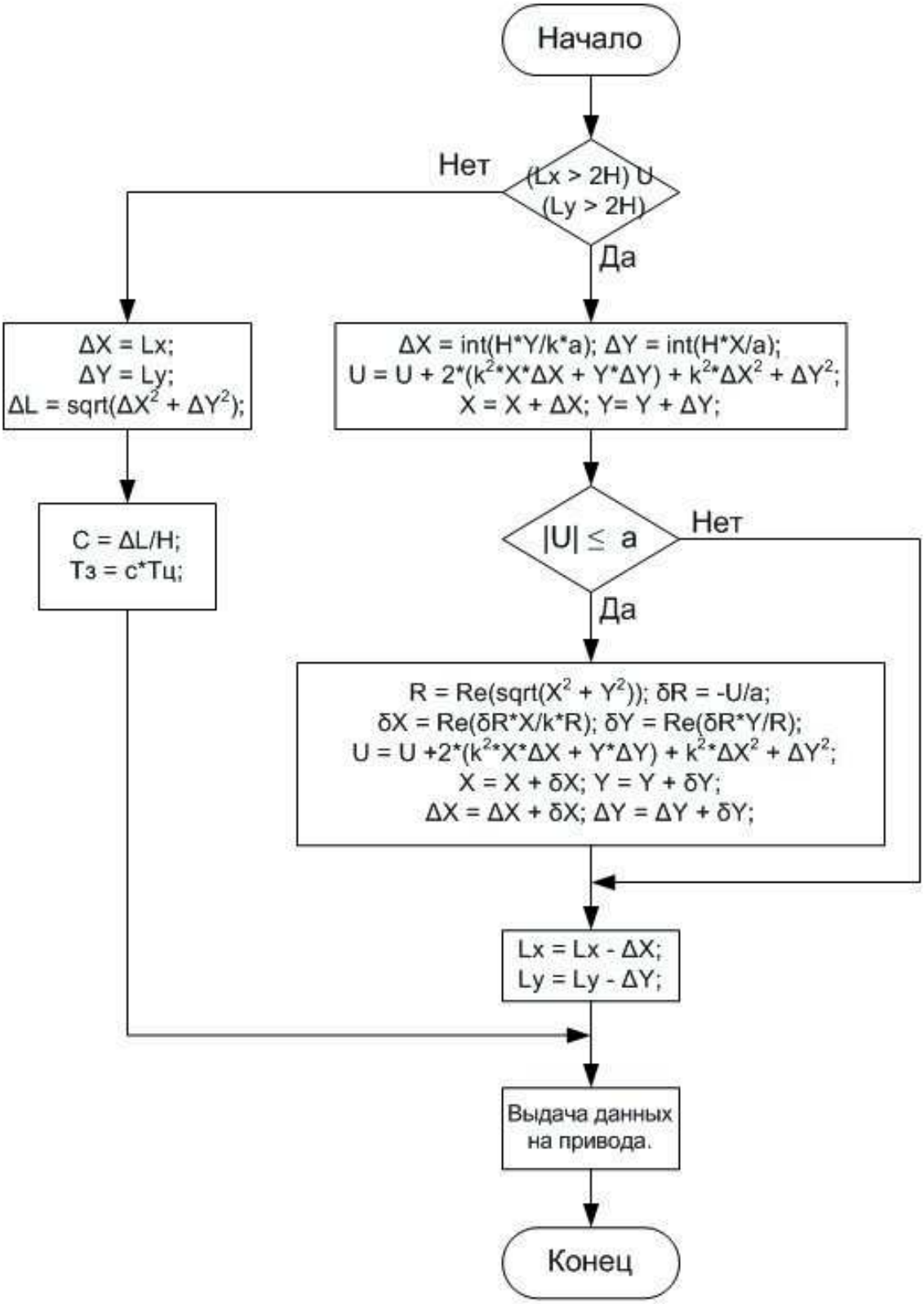

Рис. 2. Алгоритм интерполяции (в рамках одного цикла управления)

Можно ожидать, что с увеличением отношения a/b увеличатся величины коррекций по осям. Это может привести к заметным колебаниям контурной скорости, поскольку величины коррекции по осям будут отличаться в К раз. Поэтому потребуется принимать меры по стабилизации контурной скорости. Отмеченные вопросы требуют дополнительного исследования.

Описанный алгоритм может быть применен для круговой интерполяции. В таком случае в алгоритме следует положить К=1, из чего вытекает, что a=b=R, где R – радиус окружности. В схеме алгоритма при определении радиусной поправки вместо величины a использовать значение 2R. Можно также исключить из алгоритма операцию расчета текущего радиуса.

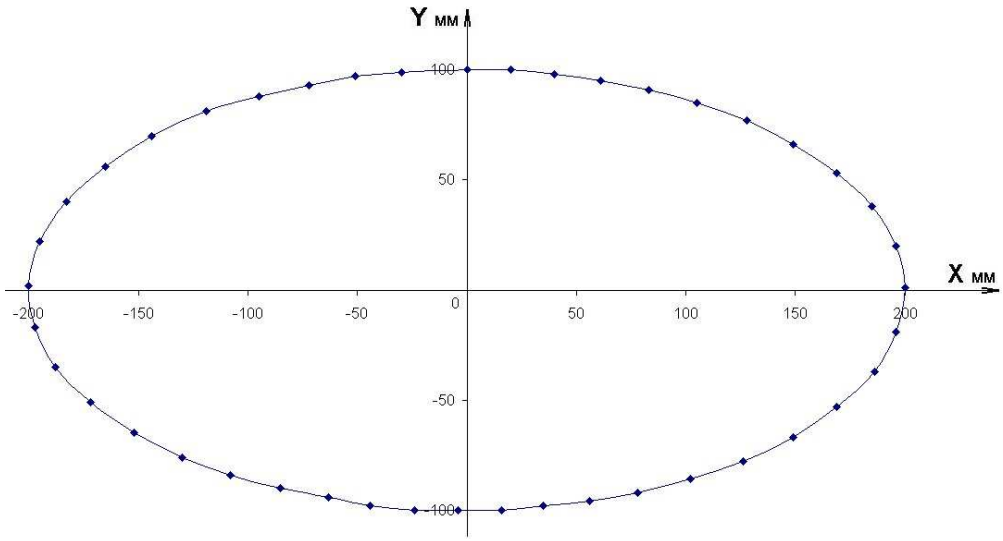

Рис. 3 Пример интерполяции эллипса с a=200, b=100 от точки (0, 100) – полный эллипс

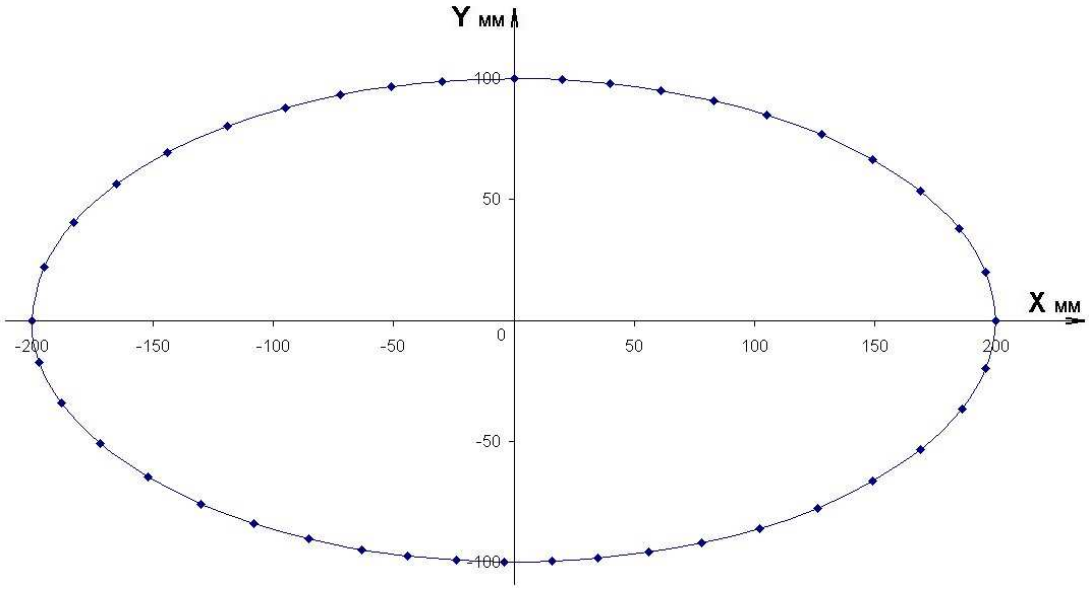

Рис. 4. Наложенные друг на друга полные эллипсы

Вывод

Описанный алгоритм привлекателен для практической реализации в системах ЧПУ.

Список литературы

1. Байков В. Д. Решение траекторных задач в микропроцессорных системах ЧПУ/ В. Д.Байков, С. Н. Вашкевич– Л: Машиностроение, 1986. – 100с.
2. Раисов Ю.А. Точный линейно-круговой интерполятор для систем формообразования в машиностроении / Ю. А. Раисов, И. В. Бычков, В. В. Комбаров // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. – Харьков, 2007. – №1. – С. 12 – 18.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. П. А. Фомичев, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 23.03.10

Алгоритм еліптичної інтерполяції

Наведено алгоритм еліптичної інтерполяції для систем ЧПК. Алгоритм використовує метод ЦДА для обчислення приростів координат з подальшою корекцією точок кривої за допомогою оцінної функції, як це робиться в деяких алгоритмах кругової інтерполяції. Алгоритм забезпечує точність інтерполяції в межах однієї дискрети.

Ключеві слова: еліпс, крок інтерполяції, коррекція радіуса

Algorithm of elliptic interpolation

The algorithm of elliptic interpolation is resulted for CNC. An algorithm is used by the method of digital integration for the calculation of increases of coordinates with the subsequent correction of points of curve by means of criterion function, as it is done in some algorithms of circular interpolation. An algorithm is provided by exactness of interpolation within the limits of one discreet.

Keywords: ellipse, interpolation step, radius correction.