

Траектория движения фрезы при формообразовании контура, образованного эвольвентным сплайном

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

Построена траектория движения центра фрезы к контуру, описанному эвольвентным сплайном. Показано, что траекторию движения центра фрезы к контуру, описанному эвольвентным сплайном, можно описать аналитически.

Ключевые слова: эвольвентный сплайн, эквидистантный контур, траектория обрабатываемого инструмента, коррекция по диаметру фрезы.

Построение траектории движения центра фрезы на оборудовании с ЧПУ связано с необходимостью построения контура, эквидистантного к контуру детали. Однако эквидистантный контур в зависимости от удаления от исходного может иметь петли самопересечения (рис. 1).

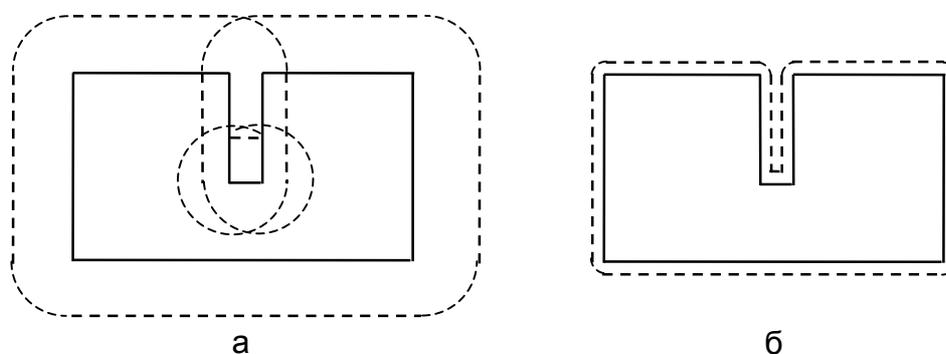


Рис.1. Эквидистанты к контуру детали: а – эквидистанта с петлями самопересечения; б – эквидистанта без петель самопересечения

След фрезы, полученный при обходе центром фрезы по эквидистантному контуру, содержащему петли самопересечения (рис.1,а), пересечет внутренность контура детали. В случае пересечения следа фрезы и внутренности контура детали произойдет событие, которое в механообработке называется «зарезом» детали. Следовательно, для получения траектории движения фрезы необходимо построить эквидистанту к контуру детали и исключить петли самопересечения, возникающие при пересечении эквидистантных дуг.

В работах [1, 2] описано построение траектории движения центра фрезы, используя алгоритм линейной и круговой интерполяции: с заданной точностью кривая разбивается на участки; в начальной и конечной точке каждого участка кривой строится нормаль длины h ; конечные точки нормалей соединяют между собой дугами окружностей или отрезками прямых. Однако полученную эквидистанту нельзя использовать в качестве траектории движения центра фрезы, так как существуют петли самопересечения и разрывы. Задачу исключения петель самопересечения решают методом обкатки, а в местах разрыва эквидистанты применяют различные стратегии обхода данной узловой точки (рис.2). Данный метод неудобен тем, что при увеличении точности изготовления детали увеличивается число узлов интерполяции. В результате существенно увеличивается объем программы, и устройство с ЧПУ не всегда успевает ее обрабатывать, что ведет к снижению производительности процесса формообразования.

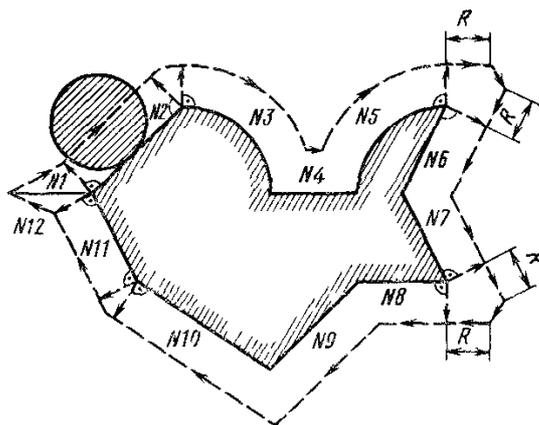


Рис.2. Контур детали с построенной траекторией движения центра фрезы
 Аналитическое построение эквидистанты позволяет решить подобную задачу, но не во всех классах функций.

Поскольку построение траектории движения центра фрезы связано с операцией построения эквидистанты, то для описания контура детали необходимо применять такую геометрию, в которой эквидистанты к базовым функциям и сами базовые функции принадлежат одному и тому же семейству функций. Таким свойством обладает эвольвентная сплайновая геометрия, описанная в работах [3, 4].

В случае, когда контур детали описан эвольвентным сплайном, эквидистанта строится аналитически. Алгоритм аналитического построения эквидистанты в общем виде к контуру, описанному эвольвентным сплайном, описан в работе [5]. Однако, в работе [5] не учтены случаи возникновения петель самопересечения, которые возникают при пересечении эквидистантных дуг (рис.1.а). Следовательно, эквидистантный контур, содержащий петли самопересечения, нельзя использовать в качестве траектории движения фрезы.

Для получения траектории фрезы необходимо исключить петли самопересечения эквидистанты. В результате исключения петель самопересечения получаем контур, который можно использовать в качестве траектории движения центра фрезы (рис. 3.а)

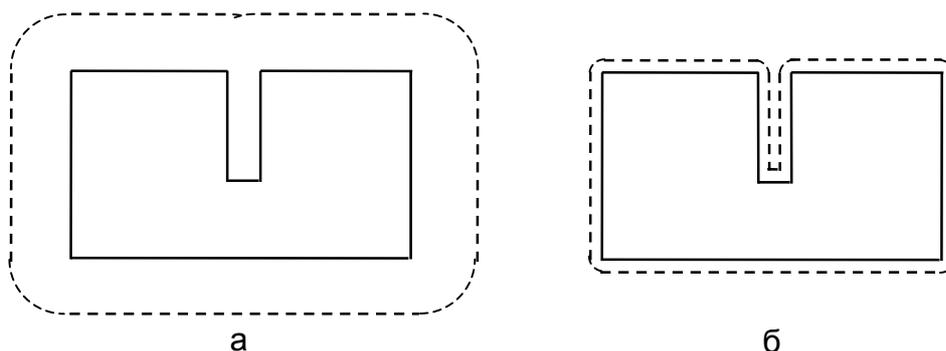


Рис.3. Траектории движения центра фрезы

Целью данной работы является аналитическое построение траектории движения центра фрезы к контуру, описанному эвольвентным сплайном.

Рассмотрим контур детали, описанный эвольвентным сплайном. Построим эквидистанту к контуру детали в общем виде. Для получения траектории движения центра фрезы необходимо исключить петли самопересечения эквидистанты к контуру детали. Существование петель самопересечения будем определять, ис-

пользуя компьютерную графику.

Дуга эвольвентного сплайна определяется семейством шести параметров:

| Длина дуги | Начальная точка и угол | | | Радиус кривизны дуги | |
|------------|------------------------|-------|-------------|----------------------|-------|
| | | | | начала | конца |
| L | x_0 | y_0 | φ_0 | R_n | R_k |

Уравнение дуги эвольвентной имеет натуральную параметризацию. Следовательно, координаты пикселей экрана будем находить в зависимости от параметров $x_0, y_0, \varphi_0, R_n, R_k$ и длины дуги $l \in [0, L]$.

Для определения существования пересечения необходимо отобразить на экране одну из дуг определенным цветом, а при выводе другой выполнять проверку цвета пикселя. В случае, когда цвет пикселя одной дуги соответствует цвету пикселя другой дуги, происходит пересечение дуг (алгоритм 1).

Алгоритм 1

Проверка пересечения эвольвентных дуг

1. Определяем разбиение дуг ds_1, ds_2 в зависимости от их длин. Если длина дуги $L_1 > \max[H_s, W_s]$, то $ds_1 = L_1 / \max[H_s, W_s]$, иначе $ds_1 = 1$. Если длина дуги $L_2 > \max[H_s, W_s]$, то $ds_2 = L_2 / \max[H_s, W_s]$, иначе $ds_2 = 1$.
2. Задаем текущую длину первой дуги $df = ds_1$.
3. Если $df \leq L_1$, изменить цвет пикселя с координатами $x = x(df), y = y(df)$,
4. $df = df + ds_1$, перейти к шагу 3.
5. Задаем текущую длину второй дуги $df = ds_2$
6. Если $df \leq L_2$ находим координаты пикселя второй дуги $x = x(df), y = y(df)$,
7. Если пиксель с координатами имеет тот же цвет, что и цвет пикселя первой дуги, то дуги пересекаются. Выход из программы.
8. $df = df + ds_2$, перейти к шагу 6.
9. Дуги не пересекаются. Выход из программы.

Петля самопересечения эквидистантного контура исключается следующим образом: определяются номера пересекающихся дуг; вычисляются координаты точки пересечения; по таб. 1, 2 находим параметры, определяющие дуги в точке пересечения; дуги, номера которых находятся между пересекающимися дугами, удаляем. Алгоритм исключения петель самопересечения эквидистантного контура приведен в алгоритме 2.

Алгоритм 2

Исключение петли самопересечения эквидистантного контура

1. $i = 1$.
2. Считываем i -ю дугу контура.
3. Если $i \leq m - 2$ перейти к шагу 4, иначе отсутствует петля самопересечения у данного контура.
4. $j = i + 2$.
5. Если $j \leq m$, то перейти к шагу 6, иначе $i++$, перейти к шагу 3.
6. Выполнить проверку пересечения i -ой и j -ой дуг контура (алгоритм 1)
7. Если дуги пересекаются, то перейти к шагу 8, иначе $j++$, перейти к шагу 5.
8. Найти координаты точки пересечения дуг.

9. Определить параметры пересекающихся дуг по таб. 1,2.
10. Удалить дуги контура с номерами от $i+1$ до $j-1$.
11. Выполнить проверку выполнения условий сшивки в точке пересечения дуг.
12. Если условия выполняются, то $m = m+i-j$, перейти к шагу 4, иначе между i -й и j -й дугой контура вставить прямую, $m = m+i-j+1$, $i++$, перейти к шагу 4

Таблица 1

Параметры первой дуги эквидистантного контура

| Вид дуги | Длина дуги | Начальная точка и угол | | | Радиус кривизны дуги | |
|------------|--|------------------------|-------|-------------|----------------------|------------------|
| | | | | | начала | конца |
| Прямая | L_{tpr} | x_0 | y_0 | φ_0 | ∞ | ∞ |
| Окружность | $R \arccos \left(1 - \frac{L_{\text{tpr}}}{2R^2} \right)$ | x_0 | y_0 | φ_0 | R | R |
| Эвольвента | $\frac{L_0 \left((R_k + h)^2 - (R_{\text{tpr}} + h)^2 \right)}{R_{\text{tpr}}^2 - R_n^2}$ | x_0 | y_0 | φ_0 | R_n | R_{tpr} |

Здесь R_{tpr} - радиус дуги эвольвенты в точке пересечения эквидистантных

$$\text{дуг, } L_{\text{tpr}} = \sqrt{(x_0 - x_{\text{tpr}})^2 + (y_0 - y_{\text{tpr}})^2}$$

Таблица 2

Параметры второй дуги эквидистантного контура.

| Вид дуги | Длина дуги | Начальная точка и угол | | | Радиус кривизны дуги | |
|------------|--|------------------------|------------------|------------------------|----------------------|----------|
| | | | | | начала | конца |
| Прямая | $L - L_{\text{tpr}}$ | x_{tpr} | y_{tpr} | φ_{tpr} | ∞ | ∞ |
| Окружность | $L - R \arccos \left(1 - \frac{L_{\text{tpr}}}{2R^2} \right)$ | x_{tpr} | y_{tpr} | φ_{tpr} | R | R |
| Эвольвента | $\frac{L_0 \left((R_{\text{tpr}} + h)^2 - (R_k + h)^2 \right)}{R_n^2 - R_{\text{tpr}}^2}$ | x_{tpr} | y_{tpr} | φ_{tpr} | R_{tpr} | R_k |

Здесь φ_{tpr} – угол касательной к дуге контура в точке пересечения. x_{tpr} , y_{tpr} – координаты точки пересечения эвольвентных дуг.

Поскольку эквидистантный контур имеет то же базовое сплайновое представление, что и контур детали, то в точке пересечения эквидистантных дуг должны выполняться условия сшивки в узлах контура.

Условия сшивки в узлах контура

Рассмотрим контур как сплайновую кривую на сетке узлов $\Delta = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$. Сплайновая кривая принадлежит пространству $C^2[l_1, l_n]$ – непрерывных дважды дифференцируемых функций.

Одним из условий является непрерывность:

$$\begin{cases} x_i^+ - x_{i+1}^- = 0, \\ y_i^+ - y_{i+1}^- = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Где x_i^+, y_i^+ – координаты конечной точки i -ой дуги; x_{i+1}^-, y_{i+1}^- – координаты $i+1$ -ой дуги;

Условие сшивки по первой производной представляет собой условие сшивки касательных слева и справа. Однако узел контура может быть не гладким, а угловым, т.е. значение первой производной в узле контура меняется резко. В данном случае условие имеет вид

$$|\varphi_i^+ - \varphi_{i+1}^- - \alpha_i| = 0 \quad (2)$$

где α_i – внешний угол при i -й вершине.

Условие сшивки по второй производной представляет собой условие сшивки по кривизне. Знаки конечного радиуса i -й и начального радиуса $(i+1)$ -й дуги противоположны, то есть нарушается следующее условие:

$$|R_n^{i+1} - R_k^i - \rho_i| = 0 \quad (3)$$

где ρ_i – величина скачка значения радиуса кривизны в i -м узле.

В случае нарушения условий сшивки при исключении петли самопересечения между пересекающимися дугами необходимо вставить отрезок прямой (таблица 3).

Таблица 3

Параметры отрезка прямой.

| Длина дуги | Начальная точка и угол | | | Радиус кривизны дуги | |
|-------------------|------------------------|----------|----------------|----------------------|----------|
| | | | | начала | конца |
| $L = \varepsilon$ | x_{ik} | y_{ik} | φ_{ik} | ∞ | ∞ |

Здесь x_{ik}, y_{ik} – координаты конечной точки i -ой дуги; φ_{ik} – угол в конечной точке i -й дуги.

В результате исключения петель самопересечения эквидистантного контура получаем контур, который можно использовать в качестве траектории движения центра фрезы. Этот контур является частью эквидистанты, следовательно, описан тем же классом функций, что и контур модели детали.

При обходе по траектории обработки центром фрезы получаем следовой контур, который приближен к контуру модели детали (рис.6).

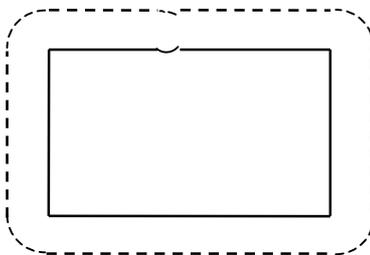


Рис.6. Следовой контур с траекторией движения центра фрезы

Следовой контур, полученный в результате построения эквидистанты к траектории движения центра фрезы, в силу замкнутости операции построения эк-

видистанты описан тем же классом функций, что и контур модели детали. Следовательно, применение эвольвентной сплайновой геометрии позволяет описать аналитически контур детали, траекторию движения центра фрезы, а также контур, полученный в результате механообработки.

Список литературы

1. Байков В. Д. Решение траекторных задач в микропроцессорных системах ЧПУ / В. Д. Байков, С. Н. Вашкевич; Под ред. В.Б.Смолова. – Л.: Машиностроение Ленингр. отдел, 1986.– С.106 – 112.
2. Сосонкин В. Л. Микропроцессорные системы числового программирования станков ЧПУ / В. Л. Сосонкин. – М.: Машиностроение, 1985. – С. 30 – 41.
3. Бут Е.Н. Компьютерная сплайновая планиметрия. Определения и проблемы / Е.Н. Бут // Авиационно–космическая техника и технология. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2001. – Вып. 24. – С. 236 – 246.
4. Бут Е.Н. Математическая модель фигуры в эвольвентной сплайновой геометрии / Е.Н. Бут // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2002. – Вып. 14. – С. 25 – 31.
5. Шапошников А.К. Построение эквидистантного контура к контуру, описанному эвольвентным сплайном. / А. К. Шапошников // Авиационно–космическая техника и технология. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2009. – Вып. 42. – С. 152 – 158.

Рецензент: д-р техн. наук, ст. науч. сотр., гл. науч. сотр. Бут Е. Н.,
ИПмаш НАН Украины, Харьков.

Поступила в редакцию 23. 03.10

Траєкторія руху фрези при формоутворенні контуру, утвореного евольвентним сплайном

Побудовано траєкторію руху центру фрези до контуру, описаного евольвентним сплайном. Показано, що траєкторію руху центру фрези до контуру, описаного евольвентним сплайном, можна описати аналітично.

Ключові слова: евольвентний сплайн, еквідистантний контур, траєкторія оброблювального інструменту, корекція по діаметру фрези.

Trajectory of motion of milling cutter at shape formation of contour, formed by evolventny spline

The trajectory of motion of milling cutter is built to the contour is described by evolventy spline. It is routine that the trajectories of motion of milling cutter is possible to describe analytically.

Keywords: evolventy spline, ekvidistan contour, trajectory of processing instrument, correction on the diameter of milling cutter.