УДК

С.П. Коваленко

# Новый взгляд на теорию матриц и не только

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

## Введение

Понятие определителя (детерминанта) квадратной матрицы возникло значительно раньше понятия матрицы. Около 1693 г. Г. Лейбниц (1646 – 1716) приступил к изучению системы трех линейных уравнений с двумя неизвестными. Он исключил неизвестные и получил выражение, впоследствии названное определителем, обращение которого в нуль было условием разрешимости системы. Позже К. Маклорен (1698 – 1746) предложил явные формулы для решения линейных систем двух и трех уравнений соответственно. С таким же количеством неизвестных Г. Крамер (1704 – 1752) установил и опубликовал в 1750 г. формулы решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, которые теперь называются правилом Крамера. Он заложил основы теории определителей, но при этом не пользовался еще удобными для них обозначениями. Наряду с Крамером Э. Безу (1739 – 1783) изучал системы линейных уравнений и содействовал возникновению теории определителей. Термин «определитель» в современном его значении ввел в 1815 г. О. Л. Коши (1789 –1857), хотя ранее (1801 г.) «детерминантом» К. Гаусс (1777 – 1855) назвал дискриминант квадратичной формы. Идея ввести определитель n-го порядка по индукции, разлагая его по строке или столбцу, появилась у А. Вандермонда (1735 –1796), а затем у П.С. Лапласа (1749 – 1827). Изложение теории определителей дано в 1812 г. почти одновременно французскими математиками Ж. Бине (1786 – 1856) и Коши. Тогда же они публикуют результат, доказанный в частных случаях и называемый теперь формулой Бине – Коши. В том же году эти математики изучали числовые функции от матриц, которые позднее в 1882 г. Т. Мюиром (1844 – 1934) были названы «перманентами» и теперь известны под этим названием.

Начиная с 40-х годов XVIII столетия определители стали универсальным инструментом в алгебре и анализе.

В 1826 г. Коши занялся задачей определения осей поверхности 2-го порядка (квадрики) с центром в начале координат. Он пришел к изучению характеристического уравнения матрицы симметричной квадратичной формы. Коши показал, что все корни этого уравнения, то есть все собственные значения этой матрицы, являются действительными. Затем он доказал, что характеристическое уравнение не изменяется при замене прямоугольной системы координат (на матричном языке это означает, что подобные матрицы имеют одни и те же собственные значения).

Дальнейшее изучение другими математиками форм, их классификации, преобразований и инвариантов существенно способствовало разделению понятий определителя и матрицы. Окончательное разделение этих понятий произошло благодаря английским математиками А. Кэли (1821 – 1895) и Дж. Сильвестру (1814 – 1897). Кэли стал рассматривать квадратные и прямоугольные таблицы чисел. До сих пор с 1841 г. используются его обозначения: для матриц – две вертикальные черты, для определителей – одна. Термин «матрица» был введен

Сильвестром в 1850 г. для обозначения прямоугольной таблицы чисел, которую он уже не мог называть определителем. Он же явно определил ранг матрицы, не давая ему наименования. Само слово «ранг» ввел лишь Г. Фробениус (1849 – 1917). Основной работой, в которой матрицы представлены абстрактно, как особые объекты, хотя они уже широко применялись, был труд Кэли 1858 г. «Мемуар о теории матриц». Под влиянием работ ирландского математика У.Р. Гамильтона (1805 – 1865) о кватернионах, в которых, кстати, были введены термины «вектор», «ассоциативный закон», Кэли исследует свойства операций над матрицами. Он проверяет ассоциативность умножения, его дистрибутивность по отношению к сложению и исследует условия коммутативности. Кэли рассматривает также прямоугольные матрицы и в тех случаях, когда возможно их умножение, вводит произведение как композицию преобразований, и тем самым создает матричное исчисление.

Знакомство с определителями и матрицами n-го порядка навело математиков на мысль о пространствах произвольного, но конечного числа измерений. Правда, наглядной интерпретации, какая существует на плоскости или трехмерном пространстве, в случае размерности больше трех нет.

Независимо друг от друга англичанин Кэли в 1843 г. и немец Г. Грассман (1809 –1877) в 1844 г. приходят к понятию n-мерного пространства. Для Кэли исходным пунктом была аналитическая геометрия двух,- и трехмерного пространства. Для него вектором в n-мерном пространстве является упорядоченный набор, состоящий из n действительных или комплексных чисел. Сложение двух векторов и умножение вектора на число определялось по аналогии с двух,- и трехмерными пространствами. В своем пространстве Кэли рассматривает только одномерные векторы.

Чтобы прийти к фундаментальному понятию векторного (линейного) пространства, надо было чётко определить понятие линейного пространства, его размерности, понятие линейной независимости системы векторов и т.д. К этому привёл более оригинальный подход Грассмана. Свои взгляды он публикует в 1844 г. в работе "Учение о линейной протяженности", в которой математика переплеталась с метафизикой, и читать её было очень трудно. В 1862 г. Грассман издаёт пересмотренный вариант своей монографии под тем же названием, но в более доступном виде. Исходной точкой его теории было геометрическое сложение ориентированных отрезков – операция, взятая из механики (сложение сил, скоростей и т.д.).

Грассман пользуется символизмом, в котором теперь можно узнать обозначение векторного и тензорного исчислений (его "внешние произведения" – это тензоры). Так, например, для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ он определил "внешнее произведение" двух векторов и записал [$\vec{a}$, $\vec{b}$]. Теперь так определяется векторное произведение.

Сочинение Грассмана, предшествовавшее по времени книге Гамильтона и созданное почти в полной духовной изоляции, долгое время оставалось малоизвестным из-за своей оригинальности, а также из-за философских неясностей. Движимый теми же целями, что и Гамильтон, но трактуя их с более широкой точки зрения (которая, как он скоро убедился, совпадала с воззрениями Лейбница), Грассман построил обширное алгебраически-геометрическое здание, в основе которого лежала геометрическая, или «внутренняя», концепция (уже почти аксиоматизированная) векторного пространства n измерений. К числу наиболее элементарных результатов, к которым он пришел, относятся, например, определение линейной независимости системы векторов и определение размерности пространства.

Любой вектор можно рассматривать как ориентированную величину, имеющую размерность, равную единице (размерность вектора – это его длина). Для ориентированных величин, имеющих размерность два, надо иметь ориентированную площадь. Простейшим типом площади является параллелограмм, построенный на двух векторах, или матрица, имеющая две строки (два столбца), составленные из координат этих векторов. Поэтому простейшую ориентированную величину произвольной, но конечной размерности можно рассматривать как прямоугольную матрицу с действительными или комплексными элементами. Обобщением этого понятия может быть блочная матрица, элементами которой есть прямоугольные матрицы.

Попытка Грассмана создать пространство ориентированных величин произвольной размерности по аналогии с евклидовым пространством векторов не удалась. Причина этого состоит в том, что для ориентированных величин размерности два и больше понятие линейной независимости, введенное им, непригодно. В данной работе построены пространства ориентированных величин, имеющих конечную размерность больше единицы. Эти пространства во многом напоминают евклидовы пространства.

Каждое из этих пространств имеет размерность и базис, а каждый элемент – координаты как упорядоченный набор действительных или комплексных чисел в фиксированном базисе. При этом при переходе к другому базису формулы, устанавливающие связь между координатами элемента в разных базисах, такие же, как и в линейных пространствах. Между неизотропными элементами можно определить углы и, как следствие этого, ввести понятие ортогональности, а поэтому могут существовать ортогональные и ортонормированные базисы. Но такие пространства обладают и существенными отличиями от евклидовых пространств, а именно: при сложении двух элементов их соответствующие координаты не суммируются. Кроме того, существуют пространства, в которых нет ортогональных базисов.

В данной работе предложен иной подход к изучению матриц. Известно, какое большое значение в линейной алгебре имеет понятие линейной независимости векторов. Однако для произвольных множеств оно непригодно. В данной работе предложено другое понятие, а именно независимость элементов относительно биформы. В евклидовом пространстве оба эти понятия совпадают. Более того, когда с помощью биформы на множестве устанавливаются координаты элементов как упорядоченный набор действительных или комплексных чисел, то число независимых элементов относительно биформы и число линейно независимых строк (столбцов) у матрицы, составленной из координат этих элементов, совпадают. Таким образом, понятие независимости элементов относительно биформы является более общим, чем линейная независимость, и позволяет использовать его при изучении произвольных множеств. Так, например, при исследовании n x m матриц удобно вводить понятие детерминантного или перманентного произведения матриц и с помощью их судить о числе независимых матриц.

С другой стороны, в линейной алгебре используется понятие билинейной формы, определяемой на линейных пространствах. Однако, если функция определяется на множествах, которые не следует рассматривать как линейные пространства, такой подход неприемлем. В данной работе будет показано, что вместо билинейных форм необходимо рассматривать биформы конечного ранга. Это позволяет существенно расширить число множеств, на которых можно вводить аналоги понятия длины, площади, объёма, (квазинормы) элементов, обобщенных неравенств Коши – Буняковского – Шварца, неравенств Бесселя и равенств Парсеваля. Применяя эти понятия к множеству матриц, в данной работе получены формулы, незначительными частными случаями которых являются известные в теории матриц формулы Бине – Коши и теоремы Лапласа как для определителей, так и для перманентов.

Показано, что такое понятие, как размерность множества, не является его неотъемлемой частью, а существенно зависит от выбора функции, определяемой на этом множестве.

Рассмотрены и другие вопросы.

## 1. Список обозначений

:= - равно по определению

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$ - множество (поле) действительных чисел

$\mathbb{C}$ - множество (поле) комплексных чисел

$\mathbb{R}^n$ - множество упорядоченных наборов из $n$ действительных чисел

$\mathbb{C}^n$ - множество упорядоченных наборов из $n$ комплексных чисел

$M_{n,m}(\mathbb{R})$ – множество n x m матриц с действительными элементами

$M_{n,m}:= M_{n,m}(\mathbb{C})$ – множество n x m матриц с комплексными элементами

$M_n(\mathbb{R})$ – множество квадратных матриц порядка n с действительными элементами

$M_n:= M_n(\mathbb{C})$ – квадратные матрицы порядка n с комплексными элементами

$I_n$ – единичная матрица порядка n

$M_{n,m}(M_{k,p}(\mathbb{R}))$ – n x m матрицы, элементами которых есть к x р матрицы с действительными элементами

$M_{n,m}(M_{k,p}):= M_{n,m}(M_{k,p}(\mathbb{C}))$ – n x m матрицы, элементами которых есть к x р матрицы с комплексными элементами

$A^{\mathrm{т}}$ – матрица, транспонированная по отношению к матрице А

$\overline{A} = \|\overline{a}_{ij}\|$ - комплексно сопряжённая матрица для $A = \|a_{ij}\|$

$A^* = \overline{A}^{\mathrm{т}}$ – матрица, сопряжённая по отношению к матрице А

diag A – диагональная матрица

$Q_{k,n}$ – совокупность всех строго возрастающих последовательностей из k элементов множества {1,2,…,n}

$G_{k,n}$ – совокупность всех неубывающих последовательностей из k элементов (с возможными повторениями) множества {1,2,…,n}

$S_{k,n}$ - совокупность всех последовательностей из $k$ элементов (с возможными повторениями) множества {1,2,…,n}

$rg$ A – ранг матрицы А

det A – детерминант (определитель) матрицы А

per A – перманент матрицы А

## 2. Независимые и зависимые элементы множества относительно биформы

Пусть $X$ и $Y$ - множества произвольной природы. Определим функцию двух переменных (биформу) на прямом произведении этих множеств:

$$(x,y): X \times Y \to \mathrm{K}, \tag{2.1}$$

где $\mathrm{K}$ - поле действительных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел.

<u>Определение</u>. Элементы системы $\{x_i\}_1^k$ из $X$ назовем <u>независимыми</u> относительно биформы $(2.1)$, если существует система элементов $\{y_i\}_1^k$ из $Y$ такая, что $\det\left\|(x_i, y_i)\right\|_1^k \neq 0$. Если же $\det\left\|(x_i, y_i)\right\|_1^k = 0$ для любой системы $\{y_i\}_1^k$ из $Y$, то элементы системы $\{x_i\}_1^k$, будем называть <u>зависимыми</u> относительно биформы $(2.1)$.

Аналогичным образом определяется понятие независимости или зависимости элементов $\{y_i\}_1^k$ из $Y$ относительно биформы $(2.1)$.

В том случае, когда $Y = X$, элементы системы $\{x_i\}_1^k$ из $X$ назовем независимыми относительно биформы $(2.1)$, если $\det\left\|(x_i, x_j)\right\|_1^k \neq 0$, и зависимыми, если $\det\left\|(x_i, x_j)\right\|_1^k = 0$.

Рассмотрим некоторые примеры.

<u>Пример 1.</u> Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ - элементы из $\mathbb{R}^2 = M_{1,2}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим биформу

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^k, \tag{2.2}$$

где $k$ - натуральное число, и систему элементов $\{e_i\}_1^4$, в которой $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,-1)$, $e_4 = (1,1)$. Нетрудно понять, что элементы системы $\{e_1, e_2\}$ линейно независимы в $\mathbb{R}^2$ и независимы относительно биформы $(2.2)$ при $k = 1$. Система элементов $\{e_1, e_2, e_3\}$ линейно зависима в $\mathbb{R}^2$, но состоит из независимых элементов относительно биформы $(2.2)$ при $k = 2$.

В самом деле, $\det\left\|(e_i, e_j)\right\|_1^3 = 2 \neq 0$.

Элементы системы $\{e_i\}_1^4$ независимы относительно биформы $(2.2)$ при $k = 3$, но зависимы относительно той же биформы при $k = 2$.

<u>Пример 2.</u> Пусть на множестве $M_{1,2}(\mathbb{R}) \times M_{1,2}(\mathbb{R})$ определена биформа

$$(x,y)=\det{}^k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

где $k\in\square$ , а система векторов $\{e_i\}_1^4$ взята из примера 1. Элементы системы $\{e_i\}_1^2$ независимы относительно биформы $(2.3)$ при $k=1$. Действительно, $\det\left\|\left(e_i,e_j\right)\right\|_1^2=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Элементы системы $\{e_i\}_1^3$ зависимы относительно биформы $(2.3)$ при $k=1$, но независимы при $k=2$. В самом деле, при $k=1$ $\det\left\|\left(e_i,e_j\right)\right\|_1^3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$, но при $k=2$ $\det\left\|\left(e_i,e_j\right)\right\|_1^3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$.

<u>Пример 3.</u> Пусть $x$ и $y$ - произвольные матрицы из $M_{2,3}(\square)$. Определим биформу следующим образом:

$$M_{2,3}(\square)\times M_{2,3}(\square)\to\square:(x,y)=\det{}^k xy^*, \tag{2.4}$$

где $k$ - натуральное число , а $y^*$ - матрица, сопряженная матрице $y$. Рассмотрим систему матриц $\{e_i\}_1^4$ из $M_{2,3}(\square)$, где $e_1=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$; $e_4=\begin{pmatrix} i & 1 & 1-i \\ 2 & -i & 1 \end{pmatrix}$.

При $k=1$ любые три матрицы этой системы - независимые относительно биформы $(2.4)$, а все четыре - зависимые, так как

$$\det\left\|\left(e_i,e_j\right)\right\|_1^4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2+3i \\ 0 & 0 & 1 & 2-i \\ -1 & 2-3i & 2+i & 19 \end{vmatrix}=0.$$

При $k=2$ элементы системы $\{e_i\}_1^4$ - независимые относительно указанной биформы. Действительно, в этом случае

$$\det\left\|\left(e_i,e_j\right)\right\|_1^4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5+12i \\ 0 & 0 & 1 & 3-4i \\ 1 & -5-12i & 3+4i & 361 \end{vmatrix}=166\neq 0.$$

## 3. Координатные пространства

Будем предполагать, что $X$ и $Y$ - множества произвольной природы, на прямом произведении которых задана функция (биформа) двух переменных $(x,y)$ вида $(2.1)$.

<u>Теорема 1</u> (основная). Если существуют системы элементов $\{e_i\}_1^n$ из $X$ и $\{f_i\}_1^n$ из $Y$, такие, что $\det\left\|(e_i, f_j)\right\|_1^n \neq 0$, а для производных систем $\{e_i\}_1^{n+1}$ и $\{f_i\}_1^{n+1}$ из $X$ и $Y$ соответственно $\det\left\|(e_i, f_j)\right\|_1^{n+1} = 0$, то для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место формула

$$(x,y) = x_f \cdot E_f^{-1} \cdot {}_e y^T, \tag{3.1}$$

где $x_f = \left[(x, f_1),...,(x, f_n)\right]$, ${}_e y = \left[(e_1, y),...,(e_n, y)\right]$ - строки, построенные для элементов $x$ и $y$ на системах $\{f_i\}_1^n$, $\{e_i\}_1^n$, а $E_f = \left\|(e_i, f_j)\right\|_1^n$.

<u>Доказательство</u>. Для произвольных $x$ и $y$, из $X$ и $Y$ соответственно, справедливо тождество

$$\det\left\|\begin{matrix}(x,y) & (x, f_j) \\ (e_i, y) & (e_i, f_j)\end{matrix}\right\|_1^n = 0. \tag{3.2}$$

Раскрыв этот определитель по первой строке, получим

$$(x,y)\det E_f + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j (x, f_j) M_j(y) = 0, \tag{3.3}$$

где $M_j(y)$ - дополнительный минор элемента $(x, f_j)$ в определителе $(3.2)$. Если теперь раскрыть каждый определитель $M_j(y)$ по первому столбцу, то будем иметь

$$M_j(y) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}(e_i, y) M_{ij}, \tag{3.4}$$

где $M_{ij}$ - дополнительный минор элемента $(e_i, y)$ в определителе $M_j(y)$. Пусть $\left(E_f\right)_{ij}$ - алгебраическое дополнение элемента $(e_i, f_i)$ в $\det E_f$, тогда

$$\left(E_f\right)_{ij}^T = (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{3.5}$$

и, следовательно, формула (3.3) с учетом соотношений $(3.4)$ и $(3.5)$ станет такой:

$$(x,y)=\frac{1}{\det E_f}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(E_f\right)_{ij}^{T}\left(x,f_j\right)\left(e_i,y\right).$$

Последнее тождество в матричной форме имеет вид $(3.1)$.

Если биформа $(3.1)$ удовлетворяет теореме 1, то будем говорить, что она имеет ранг, равный $n$, а множества $X$ и $Y$ относительно указанной биформы имеют размерность, равную $n$, и обозначать это символами $rg(x,y)=n$ и $\dim X=\dim Y=n$.

Если для произвольного натурального числа $n$ существуют системы $\{e_i\}_1^n$ из $X$ и $\{f_i\}_1^n$ из $Y$ такие, что $\det E_f\neq 0$, то будем считать, что $rg(x,y)=\dim X=\dim Y=\infty$.

Произвольная система элементов $\{e_i\}_1^n$ из $X$ образует <u>базис</u> в $X$, если она состоит из независимых элементов относительно биформы $(2.1)$ и $rg(x,y)=n$. Аналогичным образом определяется базис в $Y$. Матрицу $E_f$ будем называть матрицей биформы $(x,y)$ в базисах $\{e_i\}_1^n$ и $\{f_i\}_1^n$ из $X$ и $Y$ соответственно.

<u>Следствие 1.</u> Если системы элементов $\{e_i\}_1^n$ из $X$ и $\{f_i\}_1^n$ из $Y$ - базисы в этих множествах, а $\{g_i\}_1^n$ и $\{r_i\}_1^n$ - произвольные системы из $X$ и $Y$ соответственно, то

$$G_r=G_f E_f^{-1}E_r, \tag{3.6}$$

где $G_r=\left\|\left(g_i,r_j\right)\right\|_1^n$; $G_f=\left\|\left(g_i,f_j\right)\right\|_1^n$, $E_r=\left\|\left(e_i,r_j\right)\right\|_1^n$.

<u>Доказательство</u>.

$$G_r=\left\|\left(g_i,r_j\right)\right\|_1^n=\left\|\left(g_i\right)_f\cdot E_f^{-1}\cdot\left({}_e r_j\right)^T\right\|_1^n=\left\|\left(g_i,f_j\right)\right\|_1^n\cdot E_f^{-1}\cdot\left\|\left(e_i,r_j\right)\right\|_1^n=G_f E_f^{-1}E_r.$$

<u>Следствие 2.</u> Если $\{e_i\}_1^n$ и $\{f_i\}_1^n$ - базисы в $X$ и $Y$ соответственно, то $\det E_f\neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Из определения базиса $\{e_i\}_1^n$ в $X$ следует, что в $Y$ существует система $\{r_i\}_1^n$ такая, что $\det E_r\neq 0$. Аналогично, так как $\{f_i\}_1^n$ - базис в $Y$, то существует система $\{g_i\}_1^n$ такая, что $\det G_f\neq 0$. На основании

предыдущего следствия справедливо равенство $G_f = G_r E_r^{-1} E_f$. Следовательно, $\det G_f = \det G_r \cdot \det E_r^{-1} \det E_f$, откуда вытекает, что $\det E_f \neq 0$.

Следствие 3. Если системы элементов $\{e_i\}_1^n$ и $\{g_i\}_1^n$ - базисы в $X$, а $\{f_i\}_1^n$ и $\{r_i\}_1^n$ - базисы в $Y$, то строка $x_{(e)} := x_f E_f^{-1}$ не зависит от выбора базиса $\{f_i\}_1^n$ в $Y$, а столбец ${}_{(f)}y^T := E_f^{-1} \cdot {}_e y^T$ - от базиса $\{e_i\}_1^n$ в $X$. При этом имеют место формулы

$$x_{(e)} = x_{(g)} G_r E_r^{-1}, \tag{3.7}$$

$${}_{(f)}y^T = G_f^{-1} G_{r_{(r)}} \cdot {}_{(r)}y^T, \tag{3.8}$$

где матрица $G_r E_r^{-1}$ не зависит от базиса $\{r_i\}_1^n$, а матрица $G_f^{-1} G_r$ от базиса $\{g_i\}_1^n$.

Доказательство. Используя формулы $(3.1)$ и $(3.6)$, будем иметь

$$\begin{aligned}(x,y) &= x_f E_f^{-1} {}_e y^T = x_r \cdot \left(G_f E_f^{-1} E_r\right)^{-1} \cdot {}_g y^T = x_r E_r^{-1} E_f G_f^{-1} {}_g y^T = \\ &= \left(x_r E_r^{-1} E_f\right) E_f^{-1} \left(E_f G_f^{-1} {}_g y^T\right)\end{aligned}.$$

Отсюда вытекает, что $x_f = x_r E_r^{-1} E_f$, ${}_e y^T = E_f G_f^{-1} \cdot {}_g y^T$. Таким образом, $x_{(e)} = x_f E_f^{-1} = x_r E_r^{-1}$, а ${}_{(f)}y^T = E_f^{-1} \cdot {}_e y^T = G_f^{-1} \cdot {}_g y^T$. Последние равенства доказывают первую часть следствия 3.

Используя соотношение $(3.6)$, убедимся в справедливости формулы (3.7):

$$x_{(e)} = x_f E_f^{-1} = x_f \left(E_r G_r^{-1} G_f\right)^{-1} = x_f G_f^{-1} \left(G_r E_r^{-1}\right) = G_{(g)} G_r E_r^{-1}.$$

Аналогичным образом доказывается формула (3.8).

Умножив обе части равенства (3.6) справа на $E_r^{-1}$, будем иметь $G_r E_r^{-1} = G_f E_f^{-1}$. Это и доказывает тот факт, что матрица $G_r E_r^{-1}$ не зависит от базиса $\{r_i\}_1^n$. Подобным образом, умножая обе части равенства (3.6) слева на $G_f^{-1}$, убедимся в том, что матрица $G_f^{-1} G_r$ не зависит от базиса $\{g_i\}_1^n$.

Определение. Упорядоченный набор действительных или комплексных чисел $x_{(e)}$, расположенных в строку, назовем координатами (компонентами) элемента $x \in X$ в базисе $\{e_i\}_1^n$ из $X$, а столбец ${}_{(f)}y^T$ действительных или комплексных чисел – координатами (компонентами) элемента $y \in Y$ в базисе

$\{f_i\}_1^n$ из $Y$. При этом множества $X$ и $Y$ будем называть действительными или комплексными <u>координатными пространствами</u>, порожденными действительной или комплексной биформой (2.1).

Формулы (3.7) и (3.8) устанавливают связь между координатами элементов $x \in X$ и $y \in Y$ в разных базисах координатных пространств $X$ и $Y$. Заметим, что строки матрицы $G_r E_r^{-1}$ - это координаты элементов $\{g_i\}_1^n$ в базисе $\{e_i\}_1^n$, а столбцы матрицы $G_f^{-1} G_r$ - координаты элементов $\{r_i\}_1^n$ в базисе $\{f_i\}_1^n$. Следовательно, формулы (3.7) и (3.8), осуществляющие преобразование координат при переходе к иному базису в координатных пространствах, аналогичны формулам изменения координат при переходе к другому базису в линейных пространствах.

Заметим, что координаты произвольного элемента $e_i$ из базиса $\{e_i\}_1^n \subset X$ в этом базисе имеют вид $e_{i_{(e)}} = (0,...,1,...0)$, где 1 стоит на $i$-м месте. Это следует из того, что строки матрицы $E_e E_e^{-1} = I_n$ - это координаты векторов $e_i$ в базисе $\{e_i\}_1^n$ из $X$.

Если система элементов $\{x_i\}_1^k$ $(k \le n)$ из $X$ независима относительно биформы $(2.1)$, а $\{e_i\}_1^n$ и $\{f_i\}_1^n$ - базисы в $X$ и $Y$ соответственно, то ранг матрицы $\left\|(x_i, f_j)\right\| \in M_{k,n}(\square)$ равен $k$. Действительно, из независимости элементов системы $\{x_i\}_1^k$ следует, что в $Y$ существует система $\{r_i\}_1^k$ такая, что $\det\left\|(x_i, r_j)\right\|_1^k \ne 0$. Учитывая формулу $(3.1)$, будем иметь равенство $\left\|(x_i, r_j)\right\|_1^k = \left\|(x_i, f_j)\right\| \cdot E_f^{-1} \cdot \left\|(e_i, r_j)\right\|^T$, откуда и вытекает, что $rg\left\|(x_i, f_j)\right\| = k$. Так как строки матрицы $\left\|(x_i, f_j)\right\| \cdot E_f^{-1}$ - это координаты элементов $\{x_i\}_1^k$ в базисе $\{e_i\}_1^n$ из $X$, то число линейно независимых строк этой матрицы равно числу независимых элементов системы $\{x_i\}_1^k$. Итак, существует тесная связь между понятиями независимости системы элементов и линейной независимости координат этих элементов, но эта связь проявляется только тогда, когда с помощью понятия независимости элементов установлены координаты элементов множества.

<u>Следствие 4.</u> Если $\{e_i\}_1^n$ и $\{f_i\}_1^n$ - базисы в $X$ и $Y$ соответственно, то для произвольных $x$ из $X$ и $y$ из $Y$ справедлива формула

$$\left(x,y\right)=x_{(e)}\cdot E_f\cdot{}_{(f)}y^T \qquad (3.9)$$

Действительно,

$$(x,y)=x_f\cdot E_f^{-1}\cdot{}_e y^T=\left(x_f E_f^{-1}\right)E_f\left(E_f^{-1}\cdot{}_e y^T\right)=x_{(e)}\cdot E_f\cdot{}_{(f)}y^T.$$

<u>Теорема 2.</u> Если $X$ - действительное или комплексное линейное пространство размерности $n<\infty$, биформа $(2.1)$ линейна по первому аргументу и $rg\left(x,y\right)=n$, а $\left(x_i\right)_1^n$ - строка координат вектора $x\in X$ в базисе $\left\{e_i\right\}_1^n$ линейного пространства $X$, то $x_{(e)}=\left(x_i\right)_1^n$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\left\{f_i\right\}_1^n$ - базис в $Y$ относительно биформы $(x,y)$, тогда существует система элементов $\left\{g_i\right\}_1^n$ в $X$ такая, что $\det G_f\neq 0$. Если $\left\{e_i\right\}_1^n$ - базис линейного пространства $X$, то справедливы разложения векторов $g_k\left(k=1,...,n\right)$ по базису $g_k=\sum\limits_{i=1}^n g_{ki}e_i$ и, следовательно,

$$G_f=\left\|\left(g_k,f_j\right)\right\|_1^n=\left\|\sum_{i=1}^n g_{ki}\left(e_i,f_j\right)\right\|_1^n=\left\|g_{ki}\right\|_1^n\cdot E_f.$$

Отсюда вытекает, что $\det E_f\neq 0$.

Если $x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$ - произвольный элемент из $X$, а $y$ - произвольный элемент из $Y$, то $\left(x,y\right)=\sum\limits_{i=1}^n x_i\left(e_i,y\right)$. Используя формулу $(3.1)$, будем иметь $\left(x,y\right)=x_fE_f^{-1}\cdot{}_e y^T=x_{(e)}\cdot{}_e y^T$. Сравнивая две последние формулы и учитывая, что ${}_e y=\left[\left(e_1,y\right),...,\left(e_n,y\right)\right]$ - строка, приходим к равенству $x_{(e)}=\left(x_i\right)_1^n$.

<u>Замечание 1</u>. Аналогичное утверждение можно сформулировать и доказать для линейного пространства $Y$ и линейности биформы $\left(x,y\right)$ по второму аргументу.

В том случае, когда $rg\left(x,y\right)=n<\infty$, будем говорить, что:

1) элемент $x\in X$ <u>изотропный</u> (вырожденный или нуль элемент), если в произвольном базисе $\left\{e_i\right\}_1^n$ из $X$ все его координаты равны нулю, т.е. $x_{(e)}=\left(0,...,0\right)\in M_{1n}\left(\Box\right)$, и неизотропный в противном случае. Аналогично определяются изотропные и неизотропные элементы в $Y$. Всякий изотропный элемент будем обозначать $\theta$;

2) элемент $x$ из действительного координатного пространства $X$ <u>коллинеарен</u> неизотропному элементу $y \in X$, если в произвольном базисе $\{e_i\}_1^n$ из $X$ существует ненулевое действительное число $\lambda$ такое, что справедливо равенство $x_{(e)} = \lambda y_{(e)}$, и этот факт обозначать символом $x \square y$;
3) элемент $x \in X$ сонаправлен с неизотропным элементом $y \in Y$, если $\exists \lambda > 0 : x_{(e)} = \lambda y_{(e)}$, и это обозначать $x \uparrow\uparrow y$;
4) элемент $x \in X$ противоположно направлен к неизотропному элементу $y \in Y$, если $\exists \lambda < 0$: $x_{(e)} = \lambda y_{(e)}$, и обозначать это символом $x \uparrow\downarrow y$;
5) базисы $\{e_i\}_1^n$ из $X$ и $\{f_i\}_1^n$ из $Y$ - <u>дуальные</u>, если $E_f = diag\left[(e_1, f_1),...,(e_n, f_n)\right]$, и $(e_i, f_i) \neq 0$ при $i = 1,..,n$;
6) базисы $\{e_i\}_1^n$ из $X$ и $\{f_i\}_1^n$ из $Y$ - <u>биортогональные</u>, если они дуальные, и $(e_i, f_i) > 0$ при $i = 1,..,n$;
7) элементы $x$ и $y$ из координатных пространств $X$ и $Y$ <u>унимодуально эквивалентны</u>, если в фиксированном базисе $X$ или $Y$ они имеют одинаковые координаты.

Нетрудно понять, что справедливы следующие утверждения:

1. Если в систему $\{x_i\}_1^k$ $(k \leq n)$ входит изотропный элемент, то элементы этой системы зависимы.
2. Два неизотропных элемента из координатного пространства зависимые тогда и только тогда, когда они коллинеарные.
3. Если некоторые из элементов, входящих в систему, сами образуют зависимую систему, то вся система зависимая.
4. Каждая подсистема независимых элементов координатного пространства сама независимая.

<u>Теорема 3</u>. Для того, чтобы $rg(x, y) = n < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовала система линейно независимых функционалов $\varphi_i : X \to \mathrm{K}$ и $\psi_i : Y \to \kappa$ $(i = 1,...,n)$ таких, что для произвольных $x$ из $X$ и $y$ из $Y$ выполняется соотношение

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \psi_i(y). \qquad (3.10)$$

<u>Доказательство</u>. Если ранг биформы (2.1) равен конечному числу $n$, то формулу (3.1) можно записать в виде $(x, y) = x_{(e)} \cdot {}_e y^T$, т.е. (3.10), где $(\varphi_i(x))_1^n = x_f E_f^{-1} = x_{(e)}$, а $\psi_i(y) = (e_i, y)$ при $i = 1,...,n$.

Если справедливо равенство (3.10), то в $X$ существует система $\{e_i\}_1^n$, а в $Y$ - система $\{f_i\}_1^n$ такая, что $\det\left\|\varphi_i\left(e_j\right)\right\|_1^n \neq 0$ и $\det\left\|\psi_i(f_j)\right\|_1^n \neq 0$.

Пусть $\{x_i\}_1^{n+1}$ и $\{y_i\}_1^{n+1}$ - произвольные системы элементов из $X$ и $Y$ соответственно, тогда

$$\det\left\|(x_i, y_i)\right\|_1^{n+1} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n+1}) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(y_1) & & \psi_1(y_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(y_1) & \dots & \psi_n(y_{n+1}) \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим теперь биформу

$$(x, y): X \times X \to K, \tag{3.11}$$

порождающую в $X$ действительное или комплексное координатное пространство размерностью $n < \infty$.

Элементы $x \neq \theta$ и $y \neq \theta$ назовем <u>ортогональными</u>, если $(x, y) = 0$, и для обозначения этого факта введем символ $x \perp y$. Систему элементов $\{e_i\}_1^k$ $(k \leq n)$ из $X$ назовем <u>ортогональной</u>, если $e_i \perp e_j\left(i \neq j\right)$ и $(e_i, e_i) > 0$ при $i = 1, \dots, n$, и ортонормированной, если она ортогональная и $(e_i, e_i) = 1$ для всех $i$.

Пусть биформа (3.11) <u>симметричная</u> в действительном координатном пространстве $X$, т.е. $(x, y) = (y, x)$ для любых $x$ и $y$ из $X$, а $\{e_i\}_1^n$ - базис в $X$ относительно указанной биформы. Тогда ${}_e y = y_e$ и $E_e^T = E_e$. Формула (3.1) в этом случае будет иметь вид

$$(x, y) = x_e \cdot E_e^{-1} \cdot y_e^T. \tag{3.12}$$

Если базис $\{e_i\}_1^n$ в $X$ ортогональный, формула (3.12) становится такой:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)(y, e_i)}{(e_i, e_i)}. \tag{3.13}$$

Если базис $\{e_i\}_1^n$ ортонормированный, то формула (3.13) принимает более простой вид:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)(y, e_i). \tag{3.14}$$

При $x = y$ формулы (3.13) и (3.14) соответственно таковы:

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)^2}{(e_i, e_i)}, \tag{3.15}$$

$$\left(x,x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x,e_i\right)^2 \qquad (3.16)$$

Последние две формулы есть не что иное, как обобщенные равенства Парсеваля.

В том случае, когда $\{e_i\}_1^k$ - произвольная ортогональная или ортонормированная система элементов в $X$, то справедливы обобщенные неравенства Бесселя

$$\left(x,x\right)\geq\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(x,e_i\right)^2}{\left(e_i,e_i\right)}, \qquad (3.17)$$

$$\left(x,x\right)\geq\sum_{i=1}^{k}\left(x,e_i\right)^2. \qquad (3.18)$$

Пусть биформа (3.11), порождающая комплексное координатное пространство в $X$, <u>эрмитова</u>, т.е для любых $x$ и $y$ из $X$ выполняется равенство $\left(x,y\right)=\left(\overline{y,x}\right)$. Так как $\left(x,x\right)=\left(\overline{x,x}\right)$ - действительное число , то понятие ортогональной или ортонормированной системы элементов в $X$ определяется так же, как и в действительном координатном пространстве. Заметим, что в этом случае матрица биформы (3.11) в произвольном базисе $\{e_i\}_1^n$ будет <u>эрмитовой</u>, т.е. $E_e^*=E_e$. Если же базис $\{e_i\}_1^n$ ортогональный, то $E_e=diag\left[\left(e_i,e_i\right),...,\left(e_n,e_n\right)\right]$, где $\left(e_i,e_i\right)>0$ при $i=1,...,n$. В этом случае ${}_e y^T=\overline{y}_e^T=y_e^*$. Поэтому формула (3.1) для любых $x$ и $y$ из $X$ примет вид

$$\left(x,y\right)=x_e E_e^{-1}\cdot y_e^*=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x,e_i\right)\left(\overline{y,e_i}\right)}{\left(e_i,e_i\right)}, \qquad (3.19)$$

Если же базис $\{e_i\}_1^n$ - ортонормированный, то она упрощается:

$$\left(x,y\right)==\sum_{i=1}^{n}\left(x,e_i\right)\left(\overline{y,e_i}\right) \qquad (3.20)$$

При $y=x$ формулы (3.19) и (3.20) соответственно таковы:

$$\left(x,x\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x,e_i\right)\left(\overline{x,e_i}\right)}{\left(e_i,e_i\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\left(x,e_i\right)\right|^2}{\left(e_i,e_i\right)}, \qquad (3.21)$$

$$\left(x,x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x,e_i\right)\left(\overline{x,e_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\left(x,e_i\right)\right|^2. \qquad (3.22)$$

Формулы (3.21) и (3.22) являются обобщенными равенствами Парсеваля в комплексном координатном пространстве.

Если $\{e_i\}_1^k$ - произвольная ортогональная или ортонормированная система элементов в комплексном координатном пространстве $X$, то вместо равенств $(3.21)$ и $(3.22)$ имеем обобщенные неравенства Бесселя

$$(x,x) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{(x,e_i)\left(\overline{x,e_i}\right)}{(e_i,e_i)}, \tag{3.23}$$

$$(x,x) \geq \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)\left(\overline{x,e_i}\right). \tag{3.24}$$

Теорема 3. Если ранг биформы (3.11) равен $n<\infty$, то для всякого натурального $k$ ранг биформы $(x,y)^k$ равен $\alpha \in \square$, где $n \leq \alpha$.

Справедливость этой теоремы вытекает из того факта, что $\alpha$ равно количеству различных слагаемых в выражении $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k$, где $x_i \neq x_j$. Например, при $k=2$ число $\alpha = \frac{1}{2}n(n+1)$, при $k=3$ $\alpha = \sum_{i=0}^{2i\leq n}(n-2i)^2$, а при $n=2$ $\alpha = k+1$.

Пример. Рассмотрим множество $\square^2 = M_{1,2}(\square)$, которое превращается в комплексное координатное пространство размерности три с помощью эрмитовой биформы

$$(x,y) = (x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2)^2, \tag{3.25}$$

где $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$ - произвольные элементы из $\square^2$.

В качестве базиса в $M_{1,2}=(\square)$ выберем систему элементов $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $e_3=(1,-1)$. Тогда $E_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $E_e^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Для произвольных $x$ и $y$ из $\square^2$ имеет место формула

$$(x,y) = x_e E_e^{-1} y_e^* = \frac{1}{2}\left(x_1^2, x_2^2, (x_1-x_2)^2\right)\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y}_1^2 \\ \overline{y}_2^2 \\ (\overline{y}_1-\overline{y}_2)^2 \end{pmatrix} = (x_1\overline{y}_1)^2 + 2x_1x_2\overline{y}_1\overline{y}_2 + (x_2\overline{y}_2)^2$$

Замечание 2. Как видно из приведенных выше рассуждений, многие понятия и утверждения, известные в линейной алгебре, получены с помощью требования, чтобы пространства $X$ и $Y$ были линейными, а биформа (2.1) - билинейной. На самом деле в таких ограничениях не нуждаются. Основное и единственное требование состоит в том, чтобы ранг биформы (2.1), определенной на множествах $X$ и $Y$ произвольной природы, был равен конечному натуральному числу.

Возвращаясь к биформе $(2.1)$, видно, что в координатной форме её матричное представление имеет вид $(3.9)$, точно такой же, как и матричное представление билинейной формы, заданной на двух различных или одном и том же действительных линейных пространствах.

Пусть система элементов $\{e_i\}_1^n$ и $\{g_i\}_1^n$ образует базисы в $X$, а $\{f_i\}_1^n$ и $\{r_i\}_1^n$ - базисы в $Y$. Формула $(3.9)$ позволяет представить разложение биформы $(2.1)$ в матричном виде по новым базисам пространств $X$ и $Y$:

$$(x,y) = x_{(g)} \cdot G_r \cdot {}_{(r)}y^T .$$

Используя формулы (3.7) и (3.8), получаем

$$(x,y) = x_{(g)} G_r E_r^{-1} E_f G_f^{-1} G_r \cdot {}_{(r)}y^T .$$

Сравнивая два последних равенства, видим, что

$$G_r = G_r E_r^{-1} E_f G_f^{-1} G_r . \tag{3.26}$$

Пусть $G_{(e)} = G_r E_r^{-1}$ - квадратная матрица $n$ – го порядка, строки которой – координаты элементов $\{g_i\}_1^n$ в базисе $\{e_i\}_1^n$ из $X$, а ${}_{(f)}R = G_f^{-1} G_r$ - квадратная матрица $n$-го порядка, столбцы которой – координаты элементов $\{r_i\}_1^n$ в базисе $\{f_i\}_1^n$ из $Y$. Тогда равенство (3.26) имеет вид

$$G_r = G_{(e)} \cdot E_f \cdot {}_{(f)}R . \tag{3.27}$$

Точно такой же является формула, связывающая матрицы билинейной формы в разных базисах.

Пусть симметричная биформа (3.11) порождает на множестве $X$ действительное координатное пространство. Если $\{e_i\}_1^n$ - базис в $X$, то при $y = x$ матричная запись этой биформы имеет вид (см. 3.12)

$$(x,x) = x_e \cdot E_e^{-1} \cdot x_e^T = x_{(e)} \cdot E_e \cdot x_{(e)}^T . \tag{3.28}$$

Такой же является матричная запись квадратичной формы, заданной на действительном линейном пространстве. Поэтому в дальнейшем такую функцию естественно называть квадратичной формой, порождаемой биформой.

Пусть в $X$ выбран другой базис $\{f_i\}_1^n$, тогда формула $(3.28)$ будет иметь вид

$$(x,x) = x_{(f)} \cdot F_f \cdot x_{(f)}^T . \tag{3.29}$$

При этом связь между матрицами квадратичной формы в разных базисах осуществляется по формуле

$$F_f = F_{(e)} E_e F_{(e)}^T, \qquad (3.30)$$

где строки матрицы $F_{(e)} = F_f E_f^{-1}$ - координаты элементов $\{f_i\}_1^n$ в базисе $\{e_i\}_1^n$.

Известно [3], что для квадратичной формы, полученной из билинейной формы, существует ортогональное преобразование, приводящее матрицу этой формы к диагональному виду. Рассматриваемая здесь квадратичная форма в общем случае таким свойством не обладает. В самом деле, биформа (2.2) превращает $\mathbb{R}^2$ в трехмерное действительное координатное пространство в котором нет ортогонального базиса.

Пусть эрмитова биформа (3.11) порождает на множестве X комплексное координатное пространство, в котором система элементов $\{e_i\}_1^n$ является базисом, тогда матричная запись квадратичной формы имеет вид

$$(x,x) = x_e E_e^{-1} x_e^x = x_{(e)} E_e x_{(e)}^* . \qquad (3.31)$$

В ином базисе $\{f_i\}_1^n$ из X справедливо равенство

$$(x,x) = x_f F_f^{-1} x_f^* = x_{(f)} F_f \cdot x_{(f)}^* . \qquad (3.32)$$

Связь между матрицами квадратичной формы в разных базисах осуществляется по формуле

$$F_f = F_{(e)} E_c F_{(e)}^* , \qquad (3.33)$$

где строки матрицы $F_{(e)}$, как и раньше, - координаты элементов $\{f_i\}_1^n$ в базисе $\{e_i\}_1^n$.

Будем говорить, что квадратичная форма (x,x), порождённая либо симметричной, либо эрмитовой биформой (3.11), положительно определённая, если (x,x)>0 $\forall x \neq \theta$, и отрицательно определённая, если (x,x)<0 $\forall x \neq \theta$.

Теорема 4. Для того, чтобы квадратичная форма (x,x) была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного базиса $\{e_i\}_1^n$ в X имели место неравенства $\Delta_k := \det\left\| e_i, e_j \right\|_i^k > 0$ для k=1,…,n.

Для того чтобы квадратичная форма (x,x) была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$.

Справедливость этой теоремы следует из матричных представлений (3.28) и (3.31) квадратичной формы и критерия Сильвестра.

В том случае, когда биформа (3.11) порождает положительно определённую квадратичную форму, то для любых неизотропных элементов x и y из X выполняется неравенство Коши – Буняковского – Шварца, т.е.

$$\left|(x,y)\right|^2 \leq (x,x)(y,y), \qquad (3.34)$$

причём знак равенства возможен только в том случае, когда y∥x.

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что для любых неизотропных элементов x и y из X справедливо неравенство

$$\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix} \geq 0 .$$

Равенство нулю возможно только в том случае, когда x и y зависимы относительно биформы (x,y).

Величину $|x| := +\sqrt{(x,x)}$ будем называть <u>квазинормой</u> элемента x из X.

В действительном координатном пространстве логично ввести понятие угла $(\widehat{x,y})$ между неизотропными элементами x и y по формуле

$$\cos(\widehat{x,y}) := \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} . \tag{3.35}$$

Ясно, что $0 \leq (\widehat{x,y}) \leq \pi$ .

## 4. Канонические базы на множестве матриц

Пусть $S_{n,m}$ - множество последовательностей, состоящих из $n$ элементов множества $\{1,2,...,m\}$, например,

$$S_{3,2} = \{(1,1,1),(2,2,2),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}.$$

Ясно, что $S_{n,m}$ содержит $m^n$ последовательностей. $Q_{n,m}(n \leq m)$ - совокупность строго возрастающих последовательностей, состоящих из $n$ элементов множества $\{1,2,...,m\}$, например, $Q_{2,3} = \{(1,3),(1,2),(2,3)\}$. Общее число последовательностей множества $Q_{n,m}$ равно числу $\varepsilon := C_m^n = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

Множество $G_{n,m}$ - это совокупность неубывающих последовательностей из $n$ элементов множества $\{1,2,...,m\}$. Например, $G_{3,2} = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,2),(2,2,2)\}$, а $G_{2,3} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}$. Общее число последовательностей множества $G_{n,m}$ равно числу $\sigma := C_{n+m-1}^n = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ n \end{pmatrix}$.

Наиболее признанным способом упорядочивания элементов перечисленных выше множеств является <u>лексикографическое упорядочение</u>, определяемое следующим образом: если $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ - последовательности из $S_{n,m}$, то $\alpha$ предшествует $\beta$ только в том случае, когда $\alpha_1 = \beta_1,...,\alpha_k = \beta_k$, но $\alpha_{k+1} < \beta_{k+1}$. Так, $(2,4,7)$ предшествует $(2,5,6)$ в $Q_{3,7}$, а $(2,2,3)$ предшествует $(2,3,3)$ в $G_{3,4}$.

Пусть $e_\omega$ - $(0,1)$ - матрица из $M_{n,m}$, где $\omega \in Q_{n,m}$, у которой единицы расположены на местах $(i,\omega_i)$ $i = 1,...,n$. Систему матриц $\{e_\omega : \omega \in Q_{n,m}\}$, упорядоченную лексикографически по $\omega$, будем называть первым каноническим базисом на множестве действительных или комплексных n×m матриц. Канонические базисы в дальнейшем будем записывать в естественном виде $\{e_1,...,e_\varepsilon\}$. Так, например, первый канонический базис на множестве 2×3 матриц имеет вид

$$\left\{e_1 = \begin{pmatrix}100\\010\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}100\\001\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}010\\001\end{pmatrix}\right\}. \tag{4.1}$$

Первым каноническим базисом на множестве блочных к×1 матриц с элементами из множества действительных или комплексных n×m матриц будем называть набор матриц $M_{k,1}(M_{n,m})$, составленных из матриц $e_i$ первого канонического базиса в $M_{n,m}$ и расположенных в строках с номерами $\omega$ из $Q_{k,\varepsilon}$, которые лексикографически упорядочены. Например, в $M_{2,1}(M_{2,3})$ первый канонический базис имеет вид

$$\left\{E_1 = \begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}e_1\\e_3\end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix}e_2\\e_3\end{pmatrix}\right\}. \tag{4.2}$$

Первым каноническим базисом на множестве блочных к×р матриц с элементами из множества n×m матриц с действительными или комплексными элементами будем называть набор матриц из $M_{k,p}(M_{n,m})$, столбцы которых – это матрицы $E_i$, расположенные в столбцах на местах $\omega \in Q_{p,\tau}$, где $\tau := C_\varepsilon^p$, которые лексикографически упорядоченные. Например, на множестве $M_{2,2}(M_{2,3})$ первый канонический базис состоит из матриц

$$\{F_1 = (E_1, E_2), F_2 = (E_1, E_3), F_3 = (E_2, E_3)\}. \tag{4.3}$$

Пусть теперь $e_\omega$ - $(0,1)$ - матрица из $M_{n,m}$, где $\omega \in G_{n,m}$, у которой единицы расположены на местах $(i, \omega_i)$ $i = 1,...,n$. Систему матриц $\{e_\omega : \omega \in G_{n,m}\}$, упорядоченную лексикографически по $\omega$, будем называть вторым каноническим базисом на множестве действительных или комплексных n×m матриц. Этот базис также будем записывать в естественном виде $\{e_1,...,e_\sigma\}$. Например, второй канонический базис на множестве 3×2 матриц имеет вид

$$\left\{e_1 = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}10\\10\\01\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}10\\01\\01\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}01\\01\\01\end{pmatrix}\right\}, \tag{4.4}$$

а на множестве 2×3 матриц –

$$\left\{e_1 = \begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}100\\010\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}100\\001\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}010\\010\end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix}010\\001\end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix}001\\001\end{pmatrix}\right\}. \tag{4.5}$$

Вторым каноническим базисом на множестве блочных к×1 матриц с элементами из множества действительных или комплексных n×m матриц будем называть набор матриц из $M_{k,1}(M_{n,m})$, составленных из матриц $e_i$ второго канонического базиса в $M_{n,m}$ и расположенных в строках с номерами $\omega$ из $G_{k,\sigma}$, которые упорядочены лексикографически. Например, в $M_{2,1}(M_{3,2})$ второй канонический имеет вид

$$\{E_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_4 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_2 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$
$$E_7 = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_4 \end{pmatrix}, E_8 = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_3 \end{pmatrix}, E_9 = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} E_{10} = \begin{pmatrix} e_4 \\ e_4 \end{pmatrix}\}. \quad (4.6)$$

Вторым каноническим базисом на множестве блочных к×р матриц с элементами из множества n×m матриц с действительными или комплексными элементами будем называть набор матриц из $M_{k,p}(M_{n,m})$, столбцы которых – это матрицы $E_i$ второго канонического базиса в $M_{k,1}(M_{n,m})$, расположенные в столбцах на местах $\omega \in G_{p,\mu}$, где $\mu = C^{p}_{\sigma+n-1}$, и упорядоченные лексикографически. Например, на множестве $M_{2,3}(M_{3,2})$ второй канонический базис состоит из матриц

$$\{F_1 = (E_1, E_1, E_1), F_2 = (E_1, E_1, E_2), ..., F_{220} = (E_{10}, E_{10}, E_{10})\}. \quad (4.7)$$

Ясно, что процесс определения первых и вторых канонических базисов можно продолжить и распространить на матрицы, элементами которых являются блочные матрицы, и т.д.

В дальнейшем первые канонические базисы будут использоваться при изучении определителей, а вторые – при исследовании перманентов.

## 5. О формуле Бине – Коши для определителей

В 1812 г. на одном из заседаний французские математики Бине (Binet) и Коши (Cauchy) сделали доклады, и выяснилось, что каждый из них самостоятельно вывел формулу для определителя произведения двух прямоугольных матриц, которая позже получила название формулы Бине – Коши. С тех пор почти двести лет эта формула приводится почти в каждом учебнике по теории матриц (см., например, [1-5]). Рассмотрим ее более подробно и покажем, что она является частным случаем более общего результата, который, в свою очередь, допускает различные обобщения.

Определитель к - го порядка, состоящий из элементов матрицы А, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, ..., j_k$, принято называть минором к–го порядка матрицы А и обозначать $A\begin{pmatrix} i_1, i_2, ... i_k \\ j_1, j_2, ... j_k \end{pmatrix}$.

Если $A \in M_{n,m}(\mathrm{C})$, $B \in M_{n,m}(\mathrm{C})$, $n \le m$ и $C = AB$, то формула Бине – Коши имеет вид

$$\det C = \sum_{1\le k_1<\ldots<k_n\le m} A\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots n \\ k_1,k_2\ldots k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1,k_2\ldots k_n \\ 1 & 2\ldots n \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $n=2$, а $m=3$.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1,a_2,a_3 \\ b_1,b_2,b_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} c_1,d_1 \\ c_2,d_2 \\ c_3,d_3 \end{pmatrix}$, тогда формула (5.1) принимает вид

$$\det C = \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_1d_1 \\ c_2d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1a_3 \\ b_1b_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_1d_1 \\ c_3d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_2d_2 \\ c_3d_3 \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

Запишем формулы (5.1) и (5.2) в более естественном виде. Для этого на множестве $M_{n,m}(\mathrm{C})$, где $n\le m$, для произвольных матриц x и y введем биформу

$$M_{n,m}(\mathrm{C})\times M_{n,m}(\mathrm{C})\to \mathrm{C} : (\mathrm{x},\mathrm{y}) := \det \mathrm{xy}^{*}. \tag{5.3}$$

Нетрудно понять, что первый канонический базис на множестве $n\times m$ матриц относительно биформы (5.3) является ортонормированным. Кроме того, если $x\in M_{2,3}(\mathrm{C})$, то $(x_1e_1)=\begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix}, (x_1e_2)=\begin{vmatrix} a_1a_3 \\ b_1b_3 \end{vmatrix}, (x_1e_3)=\begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix}$, где $\{e_i\}_1^3$ - первый канонический базис на множестве $2\times 3$ матриц, формула (5.2) принимает вид

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{3}(x,e_i)(e_i,y), \tag{5.4}$$

а формула (5.1) будет выглядеть так:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\varepsilon}(x,e_i)(e_i,y), \tag{5.5}$$

где $\{e_i\}_1^{\varepsilon}$ - первый канонический базис на множестве $n\times m$ матриц.

Из последней формулы ясно, что ранг биформы (5.3) равен числу $\varepsilon = C_m^n$. Поэтому любая упорядоченная совокупность матриц, состоящая из $\varepsilon$ независимых относительно биформы (5.3) элементов, образует базис на множестве $n\times m$ матриц. Таким образом, для биформы (5.3) справедлива формула (3.1), где $\{e_i\}_1^{\varepsilon}$ - произвольный базис на множестве $M_{n,m}(\mathrm{C})$.

**Пример 1.** Пусть $x=\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1+2i & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} 0 & -2 & i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}$, тогда $(x,y)=\det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1+2i & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}=2+4i$. На множестве $M_{2,3}(\mathrm{C})$ выберем систему матриц $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Для этой системы матрица биформы (5.3) имеет вид $E_e = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, для которой $\det E_e = 9 \neq 0$. Следовательно, система матриц $\{e_i\}_1^3$ составлена из независимых элементов относительно биформы (5.3) и поэтому образует базис на множестве комплексных $2\times3$ матриц.

Поскольку $E_e^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 18 & -24 \\ 4 & -24 & 35 \end{bmatrix}$, то

$$(x,y) = x_e \cdot E_e^{-1} \cdot e^{y^T} = \frac{1}{9}(1+i, -3+1, -2+i)\cdot\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 18 & -24 \\ 4 & -24 & 35 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -i \\ 1-2i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = 2+4i.$$

Так как для биформы (5.3) справедлива формула (3.1), то для любой ортонормированной системы $\{f_i\}_1^\varepsilon$ матриц из $M_{n,m}(\mathrm{C})$ справедлива формула

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\varepsilon}(x,t_i)\cdot(y,f_i)^{*}. \qquad (5.6)$$

Так, например, если каждую матрицу первого канонического базиса $\{e_i\}_1^\varepsilon$ из $M_{n,m}(\mathrm{C})$ умножить слева на квадратную матрицу n-го порядка, определитель которой равен единице, то получим новый ортонормированный базис $\{f_i\}_1^\varepsilon$.

**Пример 2.** Пусть $\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}, \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{Vmatrix}, \alpha_3 = \begin{Vmatrix} 3i & -2 \\ -1 & -i \end{Vmatrix}$.

Тогда $f_1 = \alpha_1 e_1 = \begin{pmatrix} 310 \\ 210 \end{pmatrix}$, $f_2 = \alpha_2 e_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \alpha_3 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3i-2 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$.

Если матрицы $x$ и $y$ те же, что и в примере 1, то, применяя формулу (5.6), будем иметь

$$(x,y) = \begin{vmatrix} 3+i & 2+i \\ -1+6i & -1+4i \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3-i \\ -2 & 2-i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2-i \\ 5i & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -1 & i \\ 2-i & -1-i \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & -i \\ -2+3i & 1+i \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4i & 1 \\ 5-2i \end{vmatrix} = 2+4i.$$

Биформа (5.3) порождает на множестве $n \times m$ матриц координатное пространство. Заметим, что две $n \times m$ матрицы $x$ и $y$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они связаны соотношением $y = \alpha x$, где $\alpha$ - квадратная матрица n-го порядка. При этом если $\det \alpha > 0$, то $y \uparrow\uparrow x$, а если $\det \alpha < 0$, то $y \uparrow\downarrow x$, если же $\det \alpha = 1$, то матрицы $x$ и $y$ унимодулярно эквивалентны, т.е. в фиксированном базисе имеют одинаковые координаты. Квазинорма – это объем параллелепипеда, построенного на векторах, образующих строки $n \times m$ матрицы. Ясно, что между матрицами, имеющими квазинорму, не равную нулю, можно определить угол по формуле (3.35), где биформа $(x, y) = \det xy^*$, а $|x| = +\sqrt{(x, x)}$.

Квазинорма на множестве $M_{1,m}(\mathrm{C})$ совпадает с понятием нормы элемента, но на множестве $M_{n,m}(\mathrm{C})$ при $n \geq 2$ существенно отличается от нормы. В этом случае возможно, что сумма двух элементов, квазинорма которых равна нулю, дает элемент, квазинорма которого отлична от нуля, а сумма элементов, квазинорма которых отлична от нуля, дает элемент, квазинорма которого равна нулю.

**Список литературы**


1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
2. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон.– М.: Мир, 1989. – 655 с.
3. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1982 – 272 с.
4. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. Маркус М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
6. Абгарян К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К.А. Абгарян – М.: Наука, 1973. – 432 с.
7. Коваленко С.П. Родство теоремы Лапласа и формулы Бине – Коши для определителей и перманентов / С.П. Коваленко // Докл. АН УССР, Сер. А. 1989. №11. – С. 9 – 12.
8. Коваленко С.П. Координатные пространства / С.П. Коваленко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» – Вып. 6. Х., 2000. – С. 139 – 145.