

УДК 517.958: 539.4: 629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. В. КОПЫЧКО, В. С. КРИВЦОВ, В. Н. ПАВЛЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОСНОВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОБЩЕЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТКРЫТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ. ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ ЖЕСТКОМ ЗАЩЕМЛЕНИИ ГРАНИЧНОГО КОНТУРА

Проанализированы особенности деформирования жестко защемленной по контуру открытой цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления в зависимости от основных геометрических параметров, а именно: удлинения, относительной толщины и подъемистости. Рассмотрены достаточно широкие диапазоны их изменения. Особое внимание уделено возникающим в открытой оболочке простым и обобщенным краевым эффектам, и вытекающим из их наличия вопросам применимости приближенных теорий к расчетам открытых оболочек.

Авторы надеются, что работа будет полезна не только научным работникам и аспирантам, но и, в первую очередь, инженерам - проектировщикам при обосновании применения тех или иных приближенных теорий оболочек при анализе тонкостенных пространственных конструкций, особенно конструкций авиакосмической техники.

Ключевые слова: *открытая оболочка, простые краевые эффекты, обобщенные краевые эффекты, особенности деформирования, основные безразмерные геометрические параметры, удлинение, относительная толщина.*

Введение

Конструкция планера самолета, особенно большегрузного, представляет собой тонкостенную пространственную систему, являющуюся композицией подкрепленных открытых оболочек и пластин, сочлененных посредством балок (лонжеронов, стрингеров, бимсов) и иных промежуточных упругих звеньев, которые также могут представлять собой тонкостенные системы (нервюры, шпангоуты, стенки).

При восприятии и передаче внешних воздействий в таких системах наличие мощного подкрепления во многих случаях предопределяет эффективность конструкции с точки зрения прочности. Качество конструкции будет высоким тогда, когда напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки (пластины) безмоментно или близко к такому. Это означает, что моментные напряжения должны быть подавлены благодаря тем или иным конструктивным приемам. Степенью такого «подавления» и определяется эффективность конструкции с точки зрения прочности.

К сожалению, полностью избавиться от моментных напряжений никогда не удастся, и эти напряжения, носящие обычно локальный характер, могут оказаться определяющими при оценке прочности конструкции. Поэтому, несмотря на высокую

сложность математических моделей моментных оболочек, необходимо ставить и решать краевые задачи по общей (моментной) теории: весьма жесткие условия применимости безмоментной теории в конструкциях авиакосмической техники выполнить невозможно.

Точные решения краевых задач моментной теории оболочек (за редчайшим исключением, о чем будет сказано ниже) не построены по сей день. Поэтому особую значимость приобретает построение приближенных аналитических или аналитико-численных решений. Причем предпочтение следует отдавать последним, так как они могут быть получены с любой наперед заданной точностью, в то время как погрешности приближенных аналитических решений уменьшить невозможно.

Общий метод построения таких аналитико-численных решений неоднородных краевых задач типа Дирихле теории оболочек и пластин дан в работе [1]. Алгоритм этого метода не зависит ни от математических моделей оболочек и пластин (классические модели, модели типа Тимошенко, модели с полным учетом поперечных сдвигов и обжатия и др.), ни от структуры пакета по толщине, ни от характера действующей нагрузки и других входных данных.

Анализ подобных моделей сводится к решению неоднородных краевых задач для систем уравнений высокого порядка в частных производных с пере-

менными коэффициентами. Существенно только одно требование: главные части элементов матричного дифференциального оператора системы (ее диагональные компоненты) должны иметь либо второй, либо четвертый порядок и относиться к классу эллиптических, так что в общую систему дифференциальных уравнений входят K_1 и K_2 неизвестных, для которых определяющие уравнения имеют соответственно второй и четвертый порядки. При этом общее количество неизвестных $K = K_1 + K_2$, а порядок этой системы равен $2K_1 + 4K_2$ (например, в данной работе $K_1 = 2$, $K_2 = 1$ и общий порядок равен восьми, в то время как для общей неклассической модели, учитывающей как поперечные сдвиги, так и обжатие $K_1 = 4$, $K_2 = 2$, и в общую систему дифференциальных уравнений входят шесть неизвестных, а порядок ее равен шестнадцати).

В работе [2] был дан исчерпывающий анализ важных вопросов устойчивости, сходимости и точности искомого аналитико-численного решения базовой задачи. Основной вывод, вытекающий из этих исследований, можно сформулировать так: полученные решения отождествимы с неизвестными точными. В статье [3] приведена полная конструкция решения задачи для открытой цилиндрической оболочки в рамках метода [1], рассмотрены все необходимые этапы решения.

Выбор классической теории цилиндрической оболочки имеет как позитивную, так и негативную стороны. С одной стороны, при её относительной простоте в ней содержатся все нюансы теории тонких упругих оболочек, а при её алгебраизации отпадает необходимость исследования влияния погрешностей вычисления при составлении матрицы систем линейных алгебраических уравнений и векторов правых частей, поскольку эти вычисления выполняются точно. С другой стороны, открытая цилиндрическая оболочка представляет собой не самый удобный объект для исследования вследствие обращения в нуль гауссовой кривизны срединной поверхности и того, что её прямолинейные края являются асимптотическими линиями, на которых наблюдается искажение НДС: на этих краях появляются обобщенные или вырожденные обобщенные краевые эффекты (в замкнутой оболочке они появиться не могут). И, более того, цилиндрическая оболочка при увеличении её длины приближается к оболочкам с особой срединной поверхностью. Это означает, что такие модели, как безмоментная, полубезмоментная, краевые эффекты, становятся «размытыми».

Следует отметить, что особенности работы открытой оболочки в отличие от замкнутой мало изучены даже для цилиндрических оболочек. Это объ-

ясняется, прежде всего, тем, что получение решения краевых задач для открытых оболочек много сложнее, чем для замкнутых. Исключение составляет единственный «счастливый» случай, когда поперечные края оболочки наделены идеальными связями в виде диафрагм, абсолютно жестких при работе в своей плоскости и абсолютно податливых при работе из нее. Последняя задача явилась предметом исследований А. Л. Гольденвейзера [4, 5] при проведении асимптотического метода разделения напряженных состояний (НС). Его подход сводится, по сути, к исследованию корней некоторого характеристического (алгебраического) уравнения восьмой степени. Если подобные исследования и имели смысл в отсутствие эффективных вычислительных средств, то к настоящему времени для практики этот подход не представляет никакого интереса. Что же касается его теоретической значимости, то, как деликатно отметил академик В. В. Новожилов [6, с. 111], «...принятие быстроизменяющейся части решения в экспоненциальной форме не исчерпывает всех возможностей асимптотического метода». Подчеркнем, что А. Л. Гольденвейзер не является пионером асимптотического подхода, до него этому подходу были посвящены работы Гудьера, Фридрихса, Джонсона, Рейсса, Грина, Руттена и Новотнова [7].

В настоящее время ситуация кардинально изменилась благодаря значительному развитию вычислительной техники и мощному математическому обеспечению.

Возвращаясь к особенностям деформирования открытых оболочек, отметим только то, что хотя число работ, посвященных теории оболочек вообще ежегодно растет по экспоненте [8], работы, посвященные открытым оболочкам, можно пересчитать «по пальцам». Это объясняется, на наш взгляд, отмеченной сложностью краевых задач теории открытых оболочек и отсутствием эффективных аналитических методов их анализа. Что же касается практических результатов, то они «растворены» в «домашних» исследованиях (в основном по МКЭ при анализе конструкций, состоящих из таких оболочек, где особенности деформирования выявить затруднительно).

Скажем несколько слов о приближенных аналитических методах анализа работы открытых оболочек. Таковыми являются: редко реализуемые на практике безмоментная и чисто моментная теории оболочек, теории простого и обобщенного (полубезмоментная теория В. З. Власова [9]) краевого эффекта, теория криволинейных пластин В. В. Новожилова [6], теория пологих оболочек Муштари – Доннелла – Власова, так называемые итерационные теории А. Л. Гольденвейзера и С. А. Амбарцумяна и

т. п. Они, если и применимы к открытым оболочкам, то весьма условно, так как в зависимости от конкретной геометрии оболочки и характера действующих нагрузок (как объемных, так и краевых) погрешности при вычислении отдельных компонент НДС могут быть сколь угодно большими [5]. Метод расчленения НДС на основное и краевые эффекты в настоящее время потерял свою значимость. Во-первых, такое расчленение не всегда возможно, а если это и удалось сделать в разрешающих уравнениях, то может оказаться неприменимым метод раздельного выполнения тангенциальных и нетангенциальных краевых условий.

Таким образом, для выяснения нюансов работы открытой оболочки как самостоятельного элемента конструкции в её составе и в силу того, что точные решения неизвестны, необходим подробный анализ влияния основных безразмерных параметров открытой оболочки на её НДС. В этом заключается **цель работы: конкретизировать особенности деформирования открытых оболочек, представления о которых по сей день остаются «размытыми».**

Выбор краевых условий в виде жесткого защемления предполагает наличие краевых подкреплений, абсолютно жестких при работе как в нормальных, так и в касательных к срединной поверхности плоскостях. Такая задача может быть определена как *базовая* или, выражаясь иначе, как предельный случай, когда реальные жесткости подкрепляющих краевых элементов устремлены к бесконечности. С этой точки зрения полученные решения можно назвать критериальными, поскольку они позволят в дальнейшем выполнить анализ рациональности тех или иных реальных бортовых подкреплений.

Основными безразмерными параметрами, определяющими геометрию оболочки, являются: удлинение $\lambda = l_1/l_2$, относительная толщина $\bar{h} = h/R$ и подъемистость $\bar{f} = f/2l_2$ (рис. 1). Последний параметр для замкнутых оболочек отсутствует.

Исследования устойчивости, сходимости и точности аналитико-численных решений, проведенные в работе [2], выполнялись для конкретной оболочки, у которой эти параметры в обозначениях данной работы имели следующие значения: $\lambda = 1/\pi$, $\bar{f} = 0,5$, $\bar{h} = 0,01$, т.е. была рассмотрена довольно короткая, подъемистая оболочка средней толщины. Ниже рассмотрены достаточно широкие диапазоны изменения указанных параметров. Материал оболочки принят изотропным с модулем упругости $E = 72$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Оболочка нагружена равномерным внутренним давлением $q_3 = 10^5$ Па.

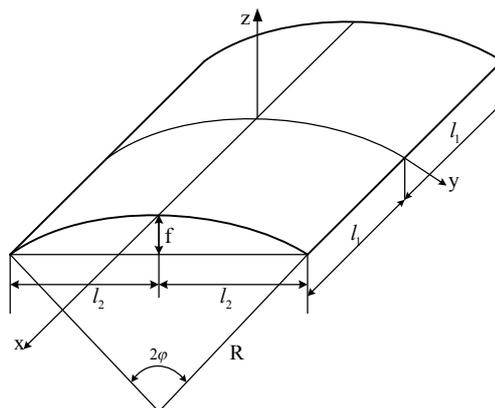


Рис. 1. Геометрия оболочки

При анализе влияния удлинения или относительной толщины значения других параметров фиксировались. Фиксированные значения таковы: $\lambda = 2$, $\bar{f} = 0,2$, $\bar{h} = 0,01$, что соответствует средним значениям этих величин в условной классификации оболочек по геометрическим признакам (оболочка средней длины, средней подъемистости и средней толщины). Анализ влияния подъемистости на НДС оболочки требует особого подхода, что обсуждено в соответствующем разделе.

Необходимо отметить, что срединная поверхность оболочки при варьировании \bar{h} (R фиксировано) и λ (l_2 фиксировано) не изменяется, чего нельзя сказать о подъемистости – различным её значениям соответствуют различные оболочки, т.е. сопоставляются различные классы оболочек. Кроме того, нужно иметь в виду следующие соотношения: $\bar{f} = (1 - \cos \varphi) / (2 \sin \varphi)$ или $\varphi = 2 \arctg 2\bar{f}$, $0 < \varphi \leq \pi / 2$; $R = l_2 / \sin \varphi$; $\bar{f} \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \pi$ при $\bar{f} \rightarrow 0$. Исходя из последних пределов при переходе к пластине ($R \rightarrow \infty$), как частному случаю оболочки, необходимо соблюдать определенную осторожность (l_2 может принимать любые значения): если вместо $\varphi = 0$ принять очень малую величину, то при этом R будет стремиться к бесконечности, а l_2 представится как произведение бесконечно малой и бесконечно большой величин, т.е. будет иметь место неопределенность типа $0 \cdot \infty$. К сказанному следует добавить, что три исследуемых безразмерных параметра, характеризующие особенности деформирования, связывают между собой пять геометрических величин: l_1 , l_2 , h , R , f или φ . Учетываемая зависимость между l_2 , R и φ , получим четыре уравнения с пятью неизвестными. Поэтому приводимый ниже анализ касается классов оболочек. Однако для оболочки известной геометрии полученные результаты точны в отмеченном выше смысле.

Поскольку применяемый метод расчета позволяет обеспечить заданную точность, то для сокращения времени вычислений была задана относительная точность по напряжениям – $\epsilon = 10^{-4}$

Геометрия оболочки приведена на рис. 1.

Необходимо отметить, что при анализе работы весьма частного случая открытой оболочки А. Л. Гольденвейзер вводил параметр, названный им приведенной относительной длиной – отношение длины полуволны синусоиды к радиусу оболочки, и в зависимости от пределов изменения этого параметра указал пять частных случаев, причем пятый случай он отнес к тонкостенному стержню и не рассматривал его. Здесь следует отметить, что приведенная относительная длина имеет смысл только при свободном опирании криволинейных краев, что связано со свойствами тригонометрических функций. Это, во-первых. Во-вторых, пятый случай можно отнести к тонкостенному стержню (и то с натяжкой) лишь только тогда, когда прямолинейные края оболочки свободны. Но поскольку указанный автор вовсе не рассматривает краевых условий на прямолинейных краях, то параметр подъемистости в его исследования никак не вошел. В широко известной монографии В. З. Власова [9, ч. III, §8, с. 358 – 398], напротив, для решения конкретных задач отведена значительная часть, но рассмотрено деформирование открытой цилиндрической оболочки различного удлинения и различной подъемистости при фиксированной относительной толщине ($h/R = 0,01$) под действием собственного веса, когда поперечные края свободно оперты, а продольные закреплены специфическим образом, и имеет место разложение в тригонометрические ряды. При этом автор утверждает: «Исследования, проделанные под руководством автора в ЦНИПСе, показывают, что для практических целей в случае расчета оболочек на нагрузки, распределенные равномерно вдоль образующей, вполне достаточно ограничиться одним первым членом тригонометрического ряда...» [9, с. 360]¹. Далее, тот же автор на странице 393 пишет, что расчеты были проведены по общей теории, однако при коэффициенте Пуассона $\nu = 0$, а «...погрешность, вытекающая из гипотез автора, для тонких оболочек практического значения не имеет»². Этот вопрос будет проанализирован нами далее.

В силу наличия двух плоскостей геометрической, жесткостной и грузовой симметрии и четности рассматриваемых функций по обеим переменным все приводимые в дальнейшем графики представ-

ляют собой совмещенные изображения: слева от оси ординат приведено распределение величин вдоль половины центральной образующей, а справа – та же величина изменяется вдоль половины центральной направляющей.

Известно [4, 5], что при НС типа простого краевого эффекта преобладающими являются момент M_1 и усилие T_2 , и имеют место следующие оценки:

$$M_2 \approx \nu M_1 \text{ и } |T_2| \gg T_1, \quad (1)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Для случая обобщенного краевого эффекта (в том числе и вырожденного), а также полубезмоментной теории В. З. Власова преобладающими являются момент M_2 и усилие T_1 и известны следующие оценки:

$$|T_1| \gg T_2 \text{ и } M_1 \approx \nu M_2. \quad (2)$$

Приведенные оценки справедливы, если НС удастся разделить на основное и краевые эффекты. Такое разделение в случае открытых оболочек невозможно, но в дальнейшем мы все же будем иметь эти оценки в виду.

1. Особенности деформирования оболочек различного удлинения

В данном разделе при фиксированных значениях подъемистости и относительной толщины (указанных во введении) исследуются оболочки от весьма коротких до достаточно длинных: $\lambda = 0,2$ (точка); $\lambda = 0,4$ (пунктир); $\lambda = 1$ (пунктир с точкой); $\lambda = 2$ (длинный пунктир); $\lambda = 5$ (пунктир с пробелом); $\lambda = 10$ (сплошная линия).

Графики прогиба оболочки, усилий T_1 , T_2 и моментов M_1 , M_2 в зависимости от удлинения изображены на рис. 2 – 6 соответственно.

На основании рис. 2 можно сделать следующие выводы. Работа весьма короткой оболочки ($\lambda = 0,2$) в продольном направлении качественно близка к работе жестко защемленной балки-полоски. С увеличением λ до 0,4 форма кривой прогибов сохраняется, однако область оболочки, охваченная интенсивными прогибами, расширяется. С изменением λ от 0,4 до 1 характер кривых изменяется: точки максимальных прогибов смещаются от центра к краям, а сама кривая изменяет кривизну: появляется достаточно широкая зона кривой с выпуклостью вниз, что, по-видимому, связано с влиянием краевых эффектов вблизи криволинейных краев оболочки (см. рис. 5). С дальнейшим ростом удлинения (здесь

¹ Что весьма сомнительно.

² Это утверждение требует «ревизии» полубезмоментной теории на современном уровне; как известно, в этой теории полностью игнорируются простые краевые эффекты.

до $\lambda = 10$) точка максимального прогиба смещается обратно к центру, а интенсивные прогибы охватывают всё больший участок оболочки, на графике появляются участки, близкие к плато, т.е. в этой области НДС близко к безмоментному.

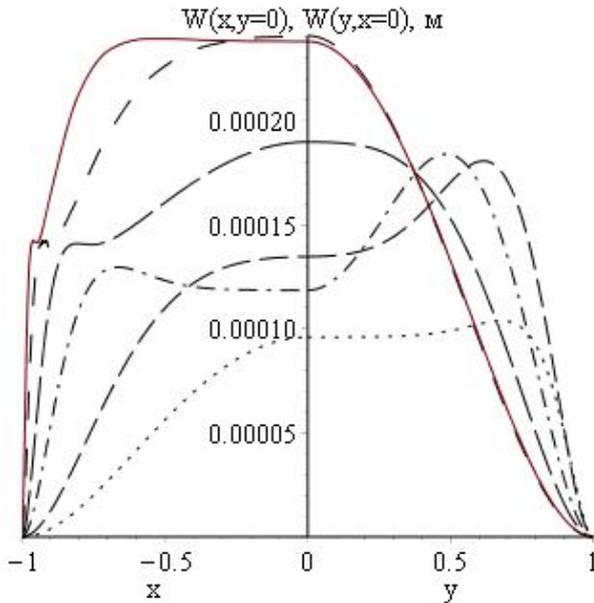


Рис. 2. Влияние удлинения на прогиб оболочки

Распределение прогибов в поперечном направлении (правая половина рисунка) заметно отличается от распределения в продольном. При очень малых удлинениях ($\lambda = 0,2$) прогибы в точках, близких к граничной направляющей, мало отличаются от прогибов в центре. С дальнейшим увеличением λ характер распределения прогибов качественно изменяется: точки максимальных прогибов смещаются к краю, а поверхность прогибов изменяет кривизну. При дальнейшем росте λ кривизна кривой вновь изменяется и наблюдается монотонный рост прогибов от периферии к центру, оболочка работает как арка. Изменение характера деформирования оболочки в зависимости от удлинения весьма существенно, поскольку за степень неоднородности распределения прогибов ответственны краевые эффекты в обоих направлениях.

Усилие T_1 (рис. 3) для коротких оболочек является практически константой в продольном направлении. С ростом λ (примерно до $\lambda = 1$) интенсивность усилия T_1 возрастает, однако само усилие все равно остается близким к постоянной величине вдоль образующей. При достижении $\lambda = 2$ характер распределения изменяется: появляется выраженный пик в центре. С дальнейшим ростом удлинения зона высокой интенсивности расширяется, образуя слабо выраженные пики ближе к краям оболочки. Что касается распределения по направляющей, то для весьма короткой оболочки ($\lambda = 0,2$) в центральной

зоне усилие T_1 также является константой. На краю наблюдается резкий провал значения с последующим ростом почти до исходного. Это явление связано, по-видимому, с обобщенным краевым эффектом у асимптотического края, переходящим в вырожденный обобщенный краевой эффект. С дальнейшим ростом λ до $\lambda = 1$ зона постоянного значения исчезает, всплески уменьшаются, однако охватывают практически всю оболочку. При достижении $\lambda = 10$ распределение T_1 вдоль направляющей практически является постоянным.

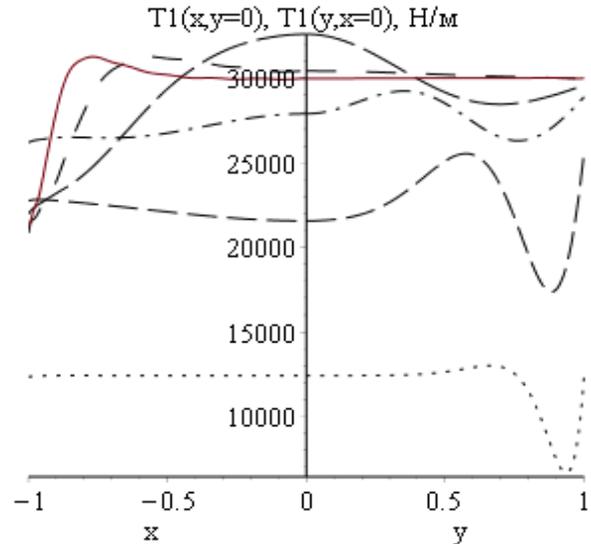


Рис. 3. Влияние удлинения на усилие T_1

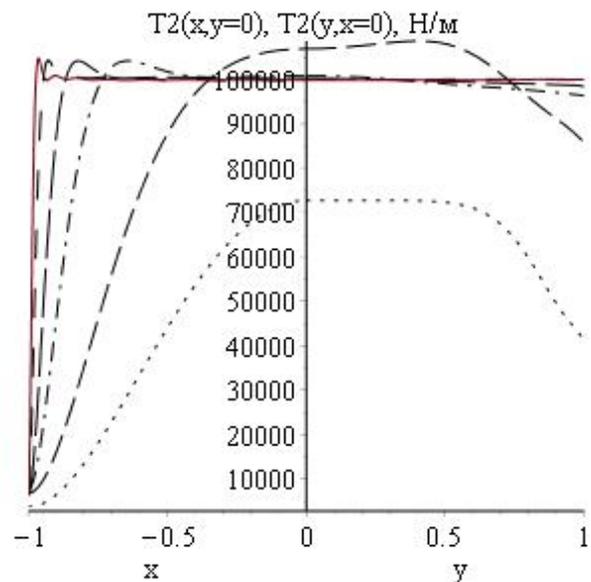


Рис. 4. Влияние удлинения на усилие T_2

На рис. 4 видно, что при $\lambda = 0,2$ распределение усилия $T_2(x)$ имеет один явно выраженный пик. С дальнейшим ростом удлинения зона высокой интен-

сивности T_2 расширяется, охватывая все больший участок оболочки. Для длинных оболочек распределение $T_2(x)$ близко к константе, однако у поперечных краев наблюдается явно выраженный краевой эффект. На правой половине рис. 4 следует отметить достаточно резкий рост значения усилия T_2 при переходе от $\lambda = 0,2$ до $\lambda = 0,4$. Характер распределения при этом приближается к константе.

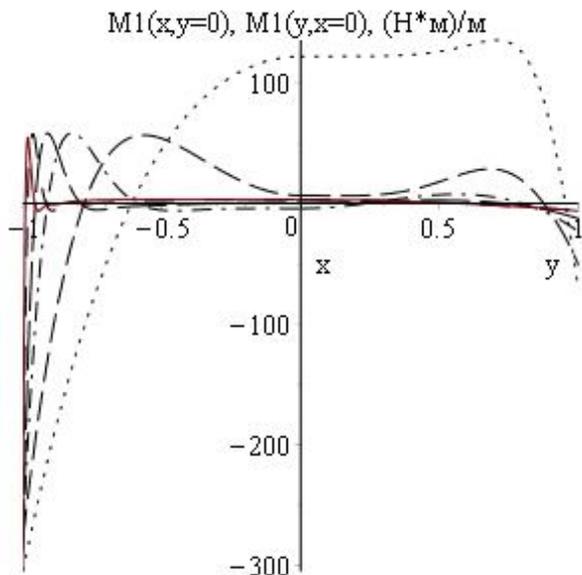


Рис. 5. Влияние удлинения на момент M_1

Короткие оболочки ($\lambda = 0,2$) в зоне, примыкающей к центральной образующей, работают как балка-полоска, с ростом удлинения зона, охватываемая моментными напряжениями, смещается к краям, а их распределение носит характер краевого эффекта, как и для замкнутых оболочек. При этом значение момента у края мало изменяется, а при удалении от поперечных краев НС оказывается практически безмоментным, что подтверждает предварительный вывод, сделанный на основании рис. 2. По данным правой половины рис. 5 можно заключить, что моменты M_1 существенны лишь для коротких оболочек.

Выводы, сделанные на основании рис. 6 прак-

тически аналогичны выводам, сделанным по рис. 5. Можно отметить лишь не столь значительное падение величины M_2 с ростом удлинения, а также резко выраженные краевые эффекты, в особенности для коротких оболочек.

В заключение данного пункта следует отметить справедливость оценок (1) и (2), хотя здесь общее НДС не удастся разделить на основное и краевые эффекты.

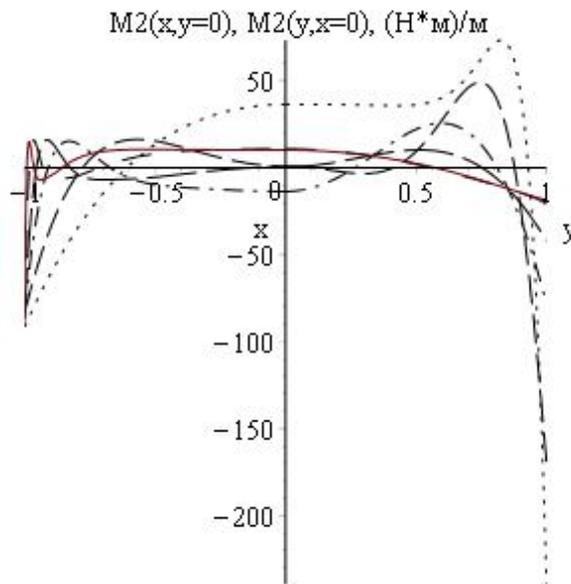


Рис. 6. Влияние удлинения на момент M_2

Поскольку при $x=\pm 1$ и $y=\pm 1$ графики не позволяют точно установить значения приведенных величин, в данном пункте и далее приводятся таблицы значений в этих точках в зависимости от соответствующего исследуемого параметра (табл. 1 – 3).

Данные табл. 1 требуют некоторого анализа, а именно – анализа монотонности изменения компонент НДС в зависимости от исследуемого параметра. Усилия T_1 и T_2 в точках $(x = 0, y = \pm 1)$ монотонно растут, а в точках $(x = \pm 1, y = 0)$ они ведут себя нелинейно – растут, падают и вновь растут, причем максимальное значение достигается в обоих случаях при $\lambda = 1$.

Таблица 1

Значения усилий и моментов в точках $(x = \pm 1, y = 0)$ и $(x = 0, y = \pm 1)$ в зависимости от удлинения

λ	T_1		T_2		M_1		M_2	
	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$
0,2	12386,7944	12395,3383	3716,0383	41317,7943	-304,9775	-71,8540	-91,4932	-239,5132
0,4	22828,0078	25740,1215	6848,4023	85800,4051	-277,6566	-51,0664	-83,2970	-170,2214
1	26199,9419	28902,6122	7859,9826	96342,0406	-277,8480	-23,5290	-83,3544	-78,4301
2	22040,7409	29565,5188	6612,2223	98551,7293	-286,0334	-12,6408	-85,8100	-42,1362
5	21103,4464	29971,0362	6331,0339	99903,4539	-286,1987	-5,5782	-85,8596	-18,5940
10	21358,8859	30005,2635	6407,6658	100017,5451	-302,6328	-6,2663	-90,7898	-20,8878

Таблица 2

Значения усилий и моментов в точках ($x = \pm 1, y = 0$) и ($x = 0, y = \pm 1$) в зависимости от относительной толщины

\bar{h}	T_1		T_2		M_1		M_2	
	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$
1/1000	29923,4322	29907,8521	8977,0297	99692,8403	-27,8106	-0,5429	-8,3432	-1,8096
1/500	30374,0494	29882,8771	9112,2148	99609,5902	-54,8558	-1,4333	-16,4567	-4,7776
1/250	28710,8602	29798,7760	8613,2581	99329,2534	-110,5178	-4,0744	-33,1553	-13,5812
1/100	22040,7409	29565,5188	6612,2223	98551,7293	-286,0334	-12,6408	-85,8100	-42,1362
1/50	15624,2208	29563,3684	4687,2662	98544,5613	-620,0540	-28,6642	-186,0162	-95,5474
1/20	9592,0425	29204,3781	2877,6127	97347,9269	-1796,0609	-148,3090	-538,8183	-494,3633

Таблица 3

Значения усилий и моментов в точках ($x = \pm 1, y = 0$) и ($x = 0, y = \pm 1$) в зависимости от подъемистости

\bar{f}	T_1		T_2		M_1		M_2	
	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=\pm 1$	$x=\pm 1$	$y=1$
0,015	188,6365	975,3072	56,5909	3251,0240	-80,5705	-34,6943	-24,1712	-115,6477
0,025	1288,5565	6127,2349	386,5670	20424,1163	-200,7687	-79,8500	-60,2306	-266,1668
0,1	11215,6443	29422,5224	3364,6933	98075,0748	-343,5091	-23,5643	-103,0527	-78,5477
0,2	22040,7409	29565,5188	6612,2223	98551,7293	-286,0334	-12,6408	-85,8100	-42,1362
0,35	29583,6025	29773,4441	8875,0807	99244,8135	-275,0531	-10,8257	-82,5159	-36,0857
0,5	30305,9541	29785,4678	9091,7862	99284,8927	-274,3552	-9,9955	-82,3066	-33,3183

Для моментов M_1 и M_2 , наоборот, наблюдается монотонное падение величины до некоторого значения λ , а далее – рост. Это свидетельствует о том, что с дальнейшим ростом λ свойство монотонности может изменяться, так как сделанные выводы справедливы лишь в пределах рассматриваемых величин параметра λ . Такому поведению есть объяснение – параметр λ входит в компоненты матричного дифференциального оператора в различных степенях.

однако характер их распределения вдоль средней образующей и средней направляющей различен.

2. Особенности деформирования оболочек различной относительной толщины

Как было сказано во введении, здесь рассматривается оболочка с неизменной геометрией срединной поверхности, изменяется лишь толщина, к которой и относятся все обсуждения. Рассмотрены такие значения: $h/R = 1/1000$ (точка); $h/R = 1/500$ (пунктир); $h/R = 1/250$ (пунктир с точкой); $h/R = 1/100$ (длинный пунктир); $h/R = 1/50$ (пунктир с пробелом); $h/R = 1/20$ (сплошная линия).

Графики прогиба оболочки, усилий T_1, T_2 и моментов M_1, M_2 в зависимости от относительной толщины показаны на рис. 7, 8, 10, 12, 14 соответственно, а графики вызываемых ими напряжений соответственно на рис. 9, 11, 13, 15.

Данные рис. 7 весьма прозрачны: с падением относительной толщины происходит рост прогибов,

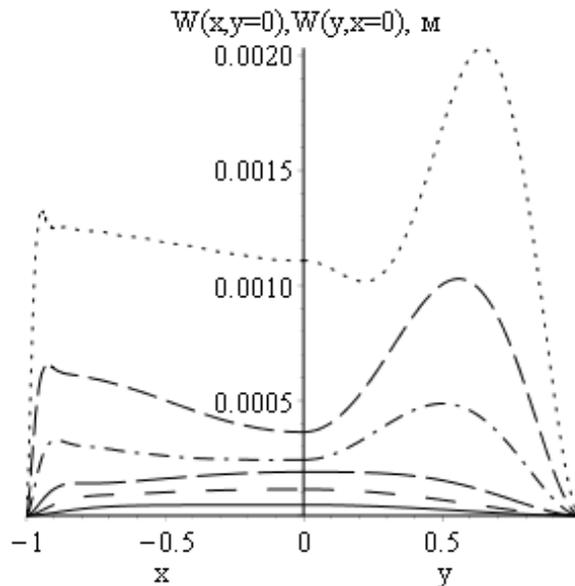


Рис. 7. Влияние относительной толщины на прогиб оболочки

Следует ожидать краевые эффекты на поперечных краях при $\bar{h} \leq 1/100$, при этом чем меньше толщина, тем ярче выражен краевой эффект (см. рис. 12). Характер изменения прогибов по центральной направляющей весьма неоднороден до $h/R = 1/100$. При $h/R < 1/100$ зона максимальных прогибов сме-

щена к продольным краям оболочки, а в её центральной зоне с уменьшением толщины происходит изменение характера распределения прогибов, достаточно сравнить три верхние кривые (происходит неоднократное изменение знака кривизны).

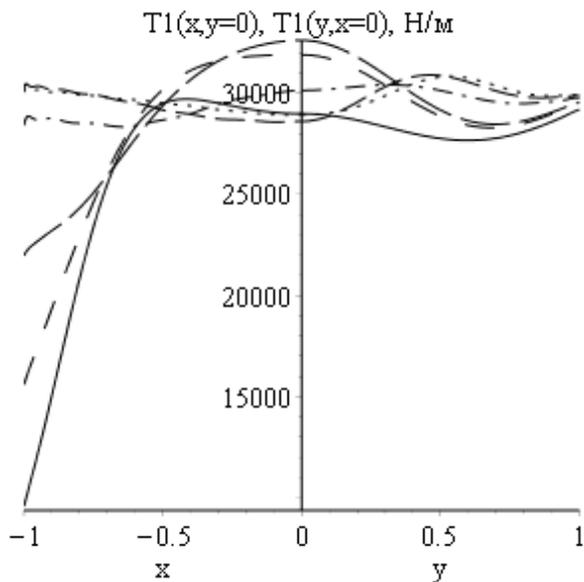


Рис. 8. Влияние относительной толщины на усилие T_1

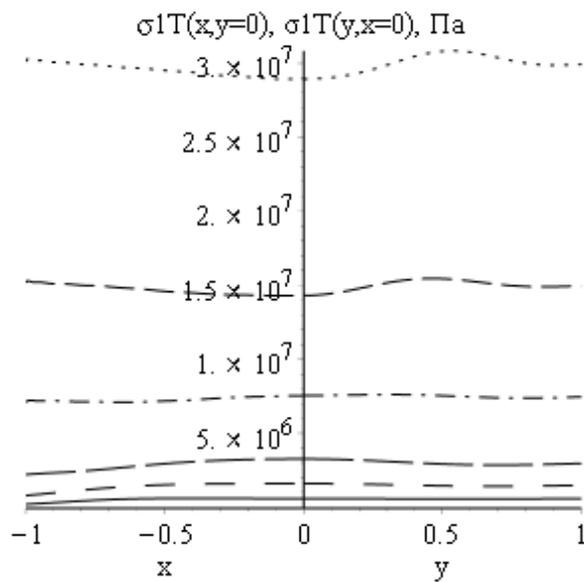


Рис. 9. Напряжения σ_1 от усилия T_1

Здесь можно отметить: для тонких оболочек ($h/R \leq 1/250$) распределение $T_1(x)$ близко к константе. С дальнейшим увеличением относительной толщины наблюдается рост значения в центре, а значение у поперечных краев существенно падает.

График $T_1(y)$ свидетельствует о достаточно слабом влиянии относительной толщины на усилие

T_1 , хотя характер этих кривых и изменяется, но эти изменения происходят в окрестности некоторой средней постоянной. Однако следует отметить, что учет этих изменений все же важен, особенно при разработке методов расчета, претендующих на высокую точность. Если значения усилий в зависимости от относительной толщины изменяются незначительно, то нормальные напряжения, обратно пропорциональные толщине оболочки, изменяются существенно, что и продемонстрировано на рис. 9.

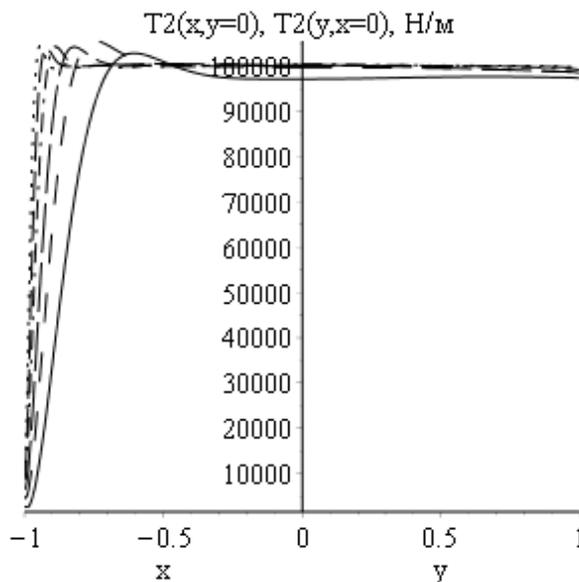


Рис. 10. Влияние относительной толщины на усилие T_2

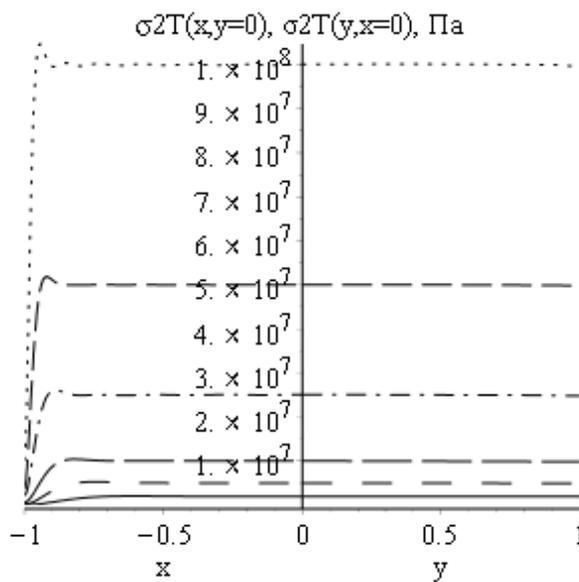


Рис. 11. Напряжения σ_2 от усилия T_2

Рис. 10 свидетельствует о том, что распределение T_2 практически не зависит от относительной

толщины, наблюдаются лишь краевые эффекты у поперечных краев, которые не играют существенной роли в оценке прочности оболочки.

ность большего участка оболочки интенсивными моментами.

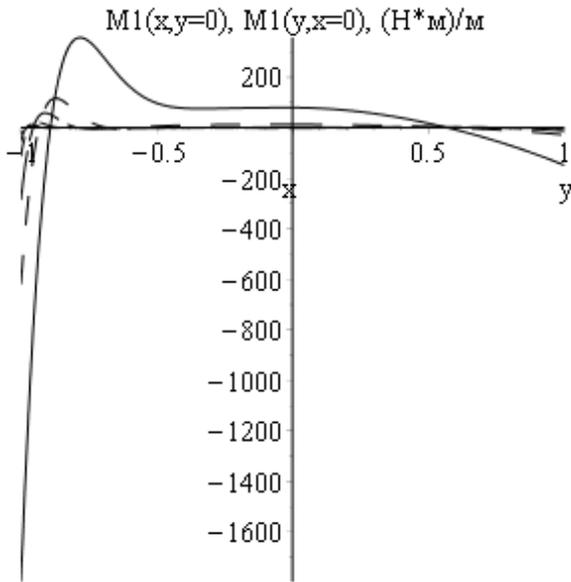


Рис. 12. Влияние относительной толщины на момент M_1

На рис. 12 видно, что с увеличением относительной толщины момент M_1 растет. Распределение M_1 имеет ярко выраженный краевой эффект у криволинейного края, где достигается его максимальное значение по модулю. При этом моменты у криволинейных краев преобладают над моментами у прямолинейных краев. Хотя максимальное по модулю значение момента достигается при относительной толщине $1/20$, максимальные напряжения соответствуют значению толщины $1/1000$, что идет вразрез с принятым представлением о работе тонких оболочек, согласно которому чем тоньше оболочка, тем ближе её напряженное состояние к безмоментному.

Существенно подчеркнуть, что это обстоятельство имеет особое значение при анализе силовых конструкций аэрокосмической техники, состоящих из весьма тонких оболочек и подкрепляющих ребер, удельные жесткости которых на все виды деформирования значительно выше мембранных и изгибных жесткостей оболочек. Последние в обсуждаемых конструкциях хотя и малы, но конечны.

Прежде всего отметим, что максимальные по модулю значения M_1 и M_2 имеют одинаковые порядки, поэтому напряжения, вызванные этими моментами при оценке прочности должны, конечно же, приниматься во внимание. Здесь выводы аналогичны выводам по рис. 12, однако на рис. 14 следует отметить наличие краевых эффектов, и охвачен-

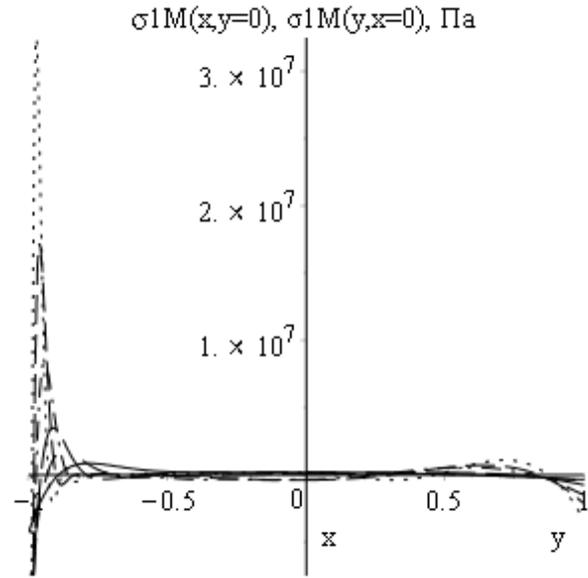


Рис. 13. Напряжения σ_1 от момента M_1

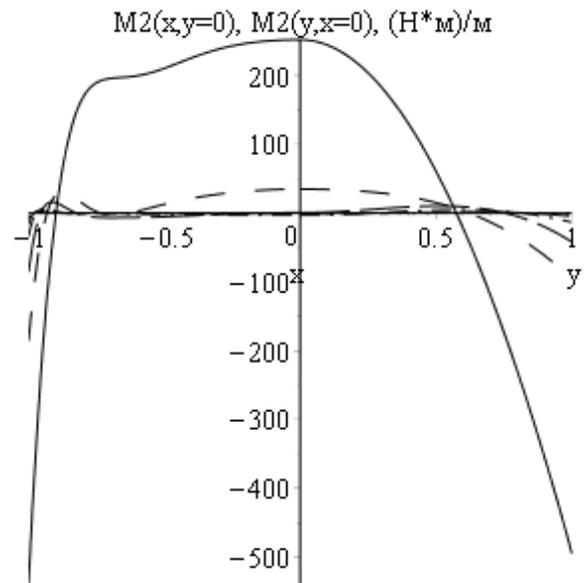


Рис. 14. Влияние относительной толщины на момент M_2

Свойства монотонности изменения компонентов НДС в указанных точках в зависимости от относительной толщины таковы: значения усилий T_1 и T_2 в точках $(x = \pm 1, y = 0)$ монотонно растут до некоторого значения относительной толщины, а затем монотонно падают. В точках $(x = 0, y = \pm 1)$ значения этих усилий монотонно падают. Что касается моментов M_1 и M_2 , то их значения монотонно растут

(по модулю) во всех рассматриваемых точках.

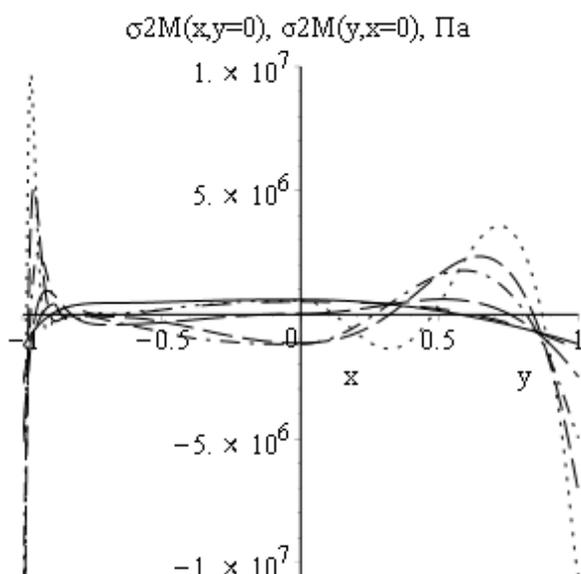


Рис. 15. Напряжения σ_2 от момента M_2

3. Особенности деформирования оболочек различной подъемности

Как было сказано во введении, при изменении подъемности поперечное сечение оболочки изменяется, поэтому такой анализ можно считать в некотором смысле условным. Однако каждую из получаемых оболочек можно рассматривать как представителя некоторого класса по критерию подъемности. В этом и заключается условность проводимого анализа.

Рассмотрены следующие значения: $\bar{f} = 0,015$ ($\varphi = 3,44^\circ$) (точка); $\bar{f} = 0,025$ ($\varphi = 5,72^\circ$) (пунктир); $\bar{f} = 0,1$ ($\varphi = 22,62^\circ$) (пунктир с точкой); $\bar{f} = 0,2$ ($\varphi = 43,6^\circ$) (длинный пунктир); $\bar{f} = 0,35$ ($\varphi = 69,98^\circ$) (пунктир с пробелом); $\bar{f} = 0,5$ ($\varphi = 90^\circ$) (сплошная линия).

Прежде чем переходить к обсуждению данного вопроса, отметим, что оболочки с различной подъемностью можно получать, по крайней мере, двумя способами. В первом, желая сохранить основной параметр тонкостенности \bar{h} , необходимо зафиксировать R и h и изменять угол φ . При этом, естественно, будет изменяться ширина перекрываемого плана, а, следовательно, и другой основной параметр оболочки – удлинение λ .

Во втором способе, желая сохранить удлинение оболочки, необходимо зафиксировать размеры l_1 и l_2 , изменять радиус и угол φ оболочки, что повлечет

за собой изменение \bar{h} . В дальнейшем использован первый способ, а размер l_1 подбирается автоматически так, чтобы сохранить фиксированное значение λ .

Графики прогиба оболочки, усилий T_1 , T_2 и моментов M_1 , M_2 в зависимости от подъемности представлены на рис. 16 – 20 соответственно.

Изменение прогиба по центральной образующей неоднородно. Работа оболочек с малой подъемностью по характеру близка к работе пластины. С увеличением подъемности до 0,1 прогиб в центре оболочки монотонно растет, однако характер его распределения вдоль образующей уже сильно отличается от наблюдающегося в пластине (область, охваченная интенсивными прогибами, расширяется из центра на периферию).

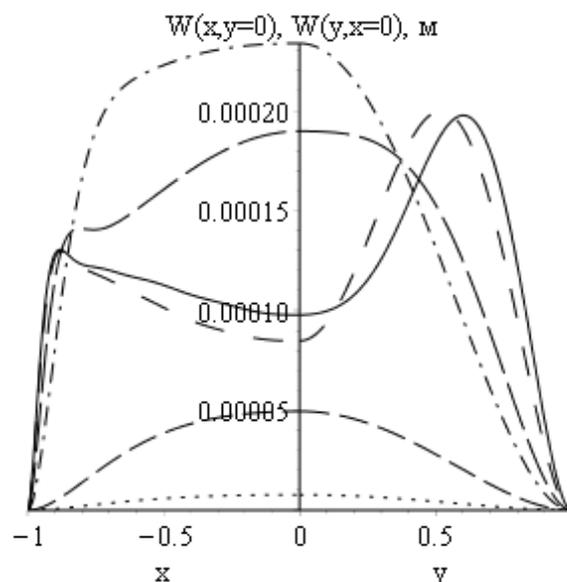


Рис. 16. Влияние подъемности на прогиб оболочки

По характеру кривой 3 можно предугадать отсутствие краевых эффектов на криволинейных краях оболочки. Картина качественно изменяется при подъемности, большей 0,1, прогиб в центре в окрестности значения подъемности 0,2 хотя и продолжает расти, но ближе к опоре изменяет свою кривизну, что свидетельствует о наличии выраженного краевого эффекта у криволинейного края. С дальнейшим ростом подъемности до 0,5 характер распределения резко изменяется. После достижения прогибом максимального значения у криволинейного края наблюдается его уменьшение от периферии к центру. Краевые эффекты становятся более выраженными (см. рис. 18 и 19). Что касается распределения прогибов по центральной дуге, то для малых подъемностей в окрестности этой дуги оболочка рабо-

тает как арка. С дальнейшим ростом подъемистости до 0,35 прогибы в центре падают, а затем вновь растут, хотя и незначительно. Однако характер распределения прогибов при приближении к продольным краям качественно изменяется: зона их максимальных значений перемещается ближе к краю, причем, неравномерно по \bar{f} . Наличие обобщенных краевых эффектов вдоль прямолинейных краев не предугадывается (это же относится и к полубезмоментной теории В. З. Власова), что подтверждается графиками на рис. 20

чески постоянно как вдоль образующей, так и вдоль направляющей, хотя имеется незначительная тенденция к возрастанию к центру по образующей. С ростом подъемистости до 0,2 усилие T_1 по образующей возрастает практически в 6-7 раз по сравнению со значением при $\bar{f} = 0,025$ как в центре, так и на периферии. При изменении подъемистости от 0,35 до 0,5 усилие T_1 практически не изменяется. Распределение T_1 по центральной направляющей практически постоянно при малых подъемистостях (кривые 1 и 2) и претерпевает небольшие изменения до $\bar{f} = 0,5$, хотя их величина тоже возрастает в 6-7 раз по сравнению со случаем, когда $\bar{f} = 0,025$.

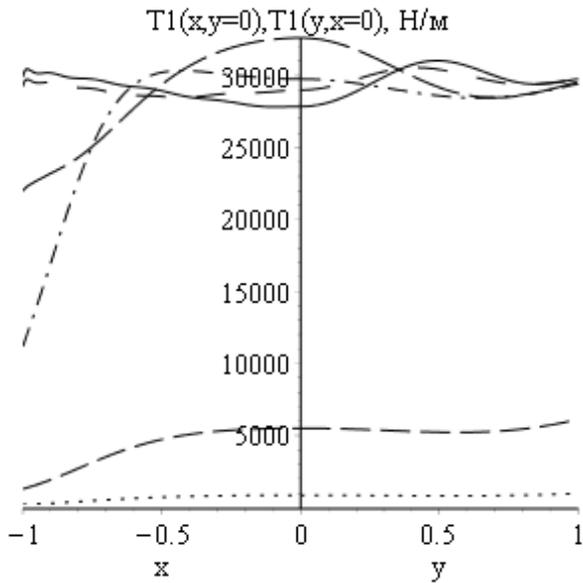


Рис. 17. Влияние подъемистости на усилие T_1

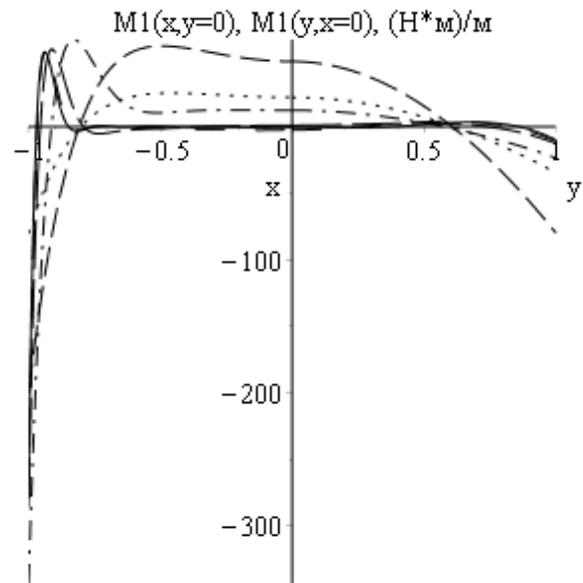


Рис. 19. Влияние подъемистости на момент M_1

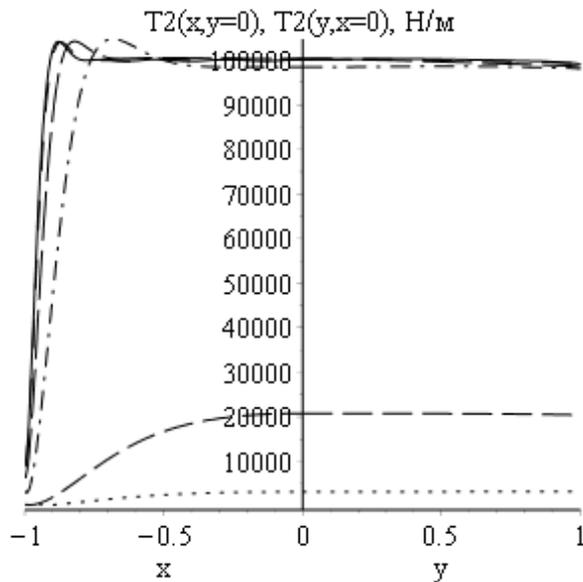


Рис. 18. Влияние подъемистости на усилие T_2

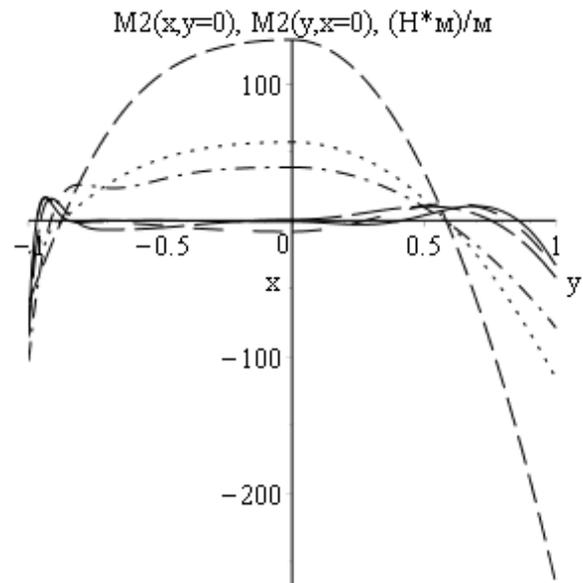


Рис. 20. Влияние подъемистости на момент M_2

При малых значениях подъемистости в окрестности $\bar{f} = 0,015$ (кривая 1) усилие T_1 мало и практи-

При малых значениях подъемности усилие T_2 вдоль центральной образующей монотонно растет к центру от 0 до конечных значений. С ростом подъемности от 0,1 до 0,5 наблюдается явно выраженный краевой эффект у криволинейного края. В достаточно протяженной зоне у середины оболочки усилие T_2 практически постоянно, а по направляющей оно постоянно вдоль всей её длины.

Кривые рис. 15 подтверждают сказанное о краевых эффектах на криволинейных краях при обсуждении распределения погибов. Причем зона распространения краевых эффектов, как и следовало ожидать, сужается с ростом подъемности. Вблизи прямолинейных краев краевые эффекты не наблюдаются, а характер распределения моментов M_1 такой же, как в арке.

Сказанное ранее о распределении моментов M_1 можно повторить и здесь, однако существенно то, что интенсивность краевых эффектов вдоль криволинейных краев значительно меньше, чем у момента M_1 , а значение момента у прямолинейных краев значительно больше значения у криволинейных.

Здесь значения усилий T_1 и T_2 монотонно растут, а значения моментов M_1 и M_2 растут (по модулю) до некоторого значения подъемности, а затем монотонно падают.

По приведенным таблицам читатель может самостоятельно вычислить нормальные моментные и безмоментные напряжения по формулам $\sigma_i = 6M_i/h^2$ и $\sigma_i = T_i/h$, $i = 1, 2$ соответственно.

Заключение

Открытая оболочка является сложным объектом в смысле анализа её работы. Это объясняется не только требованием выполнения краевых условий на отдельных частях границы, не только невозможностью разделения НС на основное и краевые эффекты, но и особенностью срединной поверхности цилиндрической оболочки: наличием асимптотических линий, совпадающих с граничным контуром и невозможностью приложения приближенных теорий для достаточно длинных оболочек. Отсюда следует, что анализ цилиндрических оболочек (впрочем, как и всех оболочек нулевой гауссовой кривизны) должен быть выполнен по общей (моментной) теории оболочек. Данный вывод полностью и окончательно подтвержден результатами настоящей работы и согласуется с предварительными выводами работы [2].

В качестве предостережения. Пользователи современных коммерческих программных пакетов метода конечного элемента при рассмотрении любой **оболочки** под нагрузкой, не говоря уже о сис-

темах из них, должны соблюдать особую осторожность. Прежде чем применять те или иные приближенные теории и численные методы, можно порекомендовать выполнить эксклюзивный анализ модели характерного элемента в смысле её точности, особенно в зонах искажения НДС конструкции.

Литература

1. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (заключ.), т. 2 ; рук. С. А. Халилов ; исполн. В. Б. Минтюк [и др.]. – Х., 2014. – 160 с. – № ГР 0112U002135. – Инв. № 0215U006163.
2. Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Решение базовой задачи [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, В. В. Копычко, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – № 3(120). – С. 24-32.
3. Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Конструкция решения [Текст] / В. С. Кривцов, В. Н. Павленко, В. В. Копычко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – № 6(123). – С. 5-11.
4. Гольденвейзер, А. Л. Теория тонких упругих оболочек [Текст] / А. Л. Гольденвейзер. – М. : Гостехтеориздат, 1953. – 544 с.
5. Гольденвейзер, А. Л. Теория тонких упругих оболочек [Текст] / А. Л. Гольденвейзер. – изд. 2-е. – М. : Наука, 1976. – 512 с.
6. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – изд. 2-е. – Л. : Гос. союз. изд-во судостр. промышленности, 1962. – 431 с.
7. Reissner, E. On consistent first approximations in the general theory of thin elastic shells [Text] / E. Reissner // *Ingenieur-Archive*. – Springer-Verlag, 1971. – № 40. – С. 402 – 419.
8. Тонкостенные оболочечные конструкции [Текст] : пер. с англ. / А. Арбош, Г. В. Бабель [и др.] ; под ред. Э. И. Григолюка. – М. : Машиностроение, 1980. – 607 с.
9. Власов, В. З. Общая теория оболочек и её приложения в технике [Текст] / В. З. Власов. – М. Л. : Гостехтеориздат, 1949. – 784 с.

Поступила в редакцию 02.02.2016, рассмотрена на редколлегии 15.02.2016

ОСНОВНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ЗАГАЛЬНОЇ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ВІДКРИТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ. КОНСТРУКЦІЯ РІШЕННЯ

С. А. Халілов, В. В. Копичко, В. С. Кривцов, В. М. Павленко

Проаналізовано особливості деформування жорстко затисненої по контуру відкритої циліндричної оболонки під дією внутрішнього тиску в залежності від основних геометричних параметрів, а саме: подовження, відносної товщини і підйомистості. Розглянуто достатньо широкі діапазони їх зміни. Особливу увагу приділено виникаючим у відкритій оболонці простим і узагальненим крайовим ефектам, і витікаючим з їх наявності питанням застосовності наближених теорій до розрахунків відкритих оболонок.

Автори сподіваються, що робота буде корисна не тільки науковцям і аспірантам, але і, в першу чергу, інженерам - проєктувальникам при обґрунтуванні застосування тих чи інших наближених теорій оболонок при аналізі тонкостінних просторових конструкцій, особливо конструкцій авіакосмічної техніки.

Ключові слова: відкрита оболонка, прості крайові ефекти, узагальнені крайові ефекти, особливості деформування, основні безрозмірні геометричні параметри, подовження, відносна товщина.

MAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF GENERAL CLASSICAL THEORY OF OPEN CYLINDRICAL SHELL. SOLUTION CONSTRUCTION

S. A. Khalilov, V. V. Kopychko, V. S. Kryvtsov, V. N. Pavlenko

The paper analyzes the features of deformation of open cylindrical shell rigidly clamped along the contour under internal pressure depending on the basic geometrical parameters, namely the extension, the relative thickness and camber of arch to overlapped plan ratio. Wide-range variation of named parameters was considered. Special attention is paid to simple and generalized boundary effects that emerge in open shell, and questions on the applicability of approximate theories to open shells calculations that arise from presence of boundary effects.

The authors hope that the work will be useful not only for researchers and graduate students, but in the first place the designers in the justification of the use of certain approximations-conjugated theory of shells in the analysis of thin-walled spatial structures, especially aerospace engineering constructions.

Key words: open shell, simple edge effects, generalized edge effects, features of the deformation, the basic dimensionless geometrical parameters, elongation, relative thickness.

Халілов Сявзуш Ахмедович – ст. науч. сотр. научного отдела каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

Копычко Виктор Владимирович – асп. каф. технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: viktor_kopychko@mail.ru.

Кривцов Владимир Станиславович – д-р техн. наук, проф., ректор, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: v.kryvtsov@khai.edu.

Павленко Виталий Николаевич – д-р техн. наук, проф., проректор по науч.-пед. работе, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: v.pavlenko@khai.edu.