

УДК 517.958:539.4: 629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. С. КРИВЦОВ, В. Б. МИНТЮК, Д. А. ТКАЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

В силу линейности краевой задачи функция Грина представлена в виде суммы фундаментального решения для бигармонического оператора и регулярной составляющей, учитывающей как геометрию области, так и краевые условия по границе. Работа посвящена построению именно регулярной составляющей функции Грина в прямоугольнике при краевых условиях типа Дирихле. Применение систем компьютерной алгебры позволило выписать компоненты регулярной части функции Грина в явном виде. Даны априорные и апостериорные оценки гладкости и точности функции Грина в области, вплоть до границы и её угловых точек.

Ключевые слова: бигармонический оператор, фундаментальное решение, регулярная часть функции Грина, двумерная δ -функция Дирака.

Введение

Знание функции Грина краевой задачи позволяет немедленно выписать её решение в явной интегральной форме. Функцию Грина краевой задачи типа Дирихле для бигармонического оператора в силу его линейности можно представить в виде суммы фундаментального решения и некоторой регулярной части. Поскольку рассматриваются однородные краевые условия, на границе прямоугольника функция Грина вместе со своей производной по нормали обращается в нуль; её регулярная часть призвана аннулировать на границе значения фундаментального решения и его нормальной производной, которые, как известно, представляет собой аналитические функции на каждом участке граничного контура. Наличие на границе угловых точек (в этих точках проводится две нормали) не является препятствием при отыскании регулярной части. Таким образом, последняя задача сводится к определению регулярной части функции Грина.

Задача построения регулярной части сведена к решению краевой задачи при заданных на границе прямоугольника функции и её нормальной производной, которая, в свою очередь, сводится к решению базовой краевой задачи при однородных краевых условиях и неоднородной правой части. С механической точки зрения это задача об изгибе жестко защемленной по границе прямоугольной пластины под нагрузкой, индуцированной фундаментальным решением для бигармонического оператора. Общая конструкция такого решения дана и исследована в работах [1, 2]. Ниже эта конструкция конкретизируется с учетом того, что граничные значения фундаментального решения и его нормальной про-

изводной являются уже функциями трех переменных, две из которых определяют произвольный носитель двумерной δ -функции Дирака. Эта особенность задачи приводит к значительному усложнению процедуры получения регулярной части как функции четырех переменных.

Свойства бигармонической функции Грина определяются, очевидно, свойствами обеих ее составляющих. Она является аналитической функцией в любой открытой области, целиком лежащей в заданной, так как фундаментальное решение аналитично во всей плоскости, а регулярная часть в силу сильной эллиптичности бигармонического оператора также аналитична в той же открытой области (положительное решение XIX и XX проблем Гильберта для двумерных областей, граница которых описывается аналитическими функциями). В случае нарушения свойств гладкости граничного контура и, тем более, при наличии угловых точек границы свойства аналитичности уже теряются. Пользуясь лишь априорно установленными свойствами гладкости функции Грина, Н. Ф. Морозов [3] свел нелинейную задачу Т. Кармана об изгибе пластин Кирхгофа к системе интегро-дифференциальных уравнений и, исходя из свойств функции Грина, получил и исследовал ряд результатов теоретического характера. Однако сама функция Грина не была построена, и потому механики-прикладники были лишены возможности воспользоваться ее достоинствами при решении конкретных инженерных задач, среди которых и задачи анализа тонкостенных пространственных систем любого летательного аппарата (фюзеляж, крыло и т.д.), с учетом сложного взаимодействия конструктивных элементов (стрингера, обшивка, нервюры, лонжероны и т.п.) между собой.

В настоящей работе впервые приведен регулярный метод построения функции Грина означенной выше краевой задачи.

1. Подход к построению функции Грина

Фундаментальным решением $E_0(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)$ бигармонического оператора

$$\nabla^2 \nabla^2 E_0 \equiv \frac{\partial^4 E_0}{\partial x_0^4} + 2 \frac{\partial^4 E_0}{\partial x_0^2 \partial y_0^2} + \frac{\partial^4 E_0}{\partial y_0^4} = \delta(x_0 - \xi_0) \delta(y_0 - \eta_0) \quad (1)$$

является функция $E_0 = \frac{1}{16\pi} r^2 \ln r^2$,

где $r^2 = (x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2$,

ξ_0, η_0 – координаты носителя двумерной дельта-функции Дирака $\delta(x_0 - \xi_0) \delta(y_0 - \eta_0)$.

В дальнейшем целесообразно перейти к безразмерным координатам: $x = x_0 / a, \xi = \xi_0 / a$ и $y = y_0 / b, \eta = \eta_0 / b$ и к безразмерным функциям: $E = E_0 / a^2$ и $\delta(x - \xi) \delta(y - \eta) = ab \delta(x_0 - \xi_0) \delta(y_0 - \eta_0)$. При этом исходная прямоугольная область преобразуется в квадрат $\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$; $\lambda = a / b$ – удлинение исходной пластины с размерами $2a \times 2b$.

Тогда исходное уравнение (1) в безразмерных координатах преобразуется так:

$$\Delta E \equiv \frac{\partial^4 E}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 E}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 E}{\partial y^4} = \lambda \delta(x - \xi) \delta(y - \eta), \quad (2)$$

а фундаментальное решение приобретает вид

$$E(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{16\pi} e(x, y, \xi, \eta) \ln e(x, y, \xi, \eta), \quad (3)$$

$$e(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 / \lambda^2.$$

Будем искать функцию Грина в виде суммы двух слагаемых

$$G(x, y, \xi, \eta) = E(x, y, \xi, \eta) + g(x, y, \xi, \eta), \quad (4)$$

где $E(x, y, \xi, \eta)$ – фундаментальное решение (3), а функция $g(x, y, \xi, \eta)$ является решением краевой задачи

$$\Delta g = 0 \text{ в } \Omega, \quad (5)$$

$$g = -E, \quad \frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\partial E}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \quad (6)$$

где $\partial / \partial n$ – производная по внешней нормали к границе Γ области Ω . Таким образом, построение функции Грина сводится к решению краевой задачи (5) – (6).

Более подробно краевые условия (6) запишем так:

$$g|_{x=-1} = -E|_{x=-1} \equiv \varphi_1(y, \xi, \eta),$$

$$g|_{x=+1} = -E|_{x=+1} \equiv \varphi_2(y, \xi, \eta),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=-1} = -\frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=-1} \equiv \varphi_3(y, \xi, \eta),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=+1} = -\frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=+1} \equiv \varphi_4(y, \xi, \eta),$$

$$g|_{y=-1} = -E|_{y=-1} \equiv f_1(x, \xi, \eta),$$

$$g|_{y=+1} = -E|_{y=+1} \equiv f_2(x, \xi, \eta),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=-1} = -\frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y=-1} \equiv f_3(x, \xi, \eta),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=+1} = -\frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y=+1} \equiv f_4(x, \xi, \eta). \quad (7)$$

Краевые функции $\varphi_k(y, \xi, \eta), f_k(x, \xi, \eta) (k = \overline{1, 4})$ в силу свойств фундаментального решения являются аналитическими функциями и, естественно, удовлетворяют условиям согласованности входных данных в угловых точках: 1. $(-1; +1)$, 2. $(+1; +1)$, 3. $(+1; -1)$, 4. $(-1; -1)$.

Функции, стоящие в правых частях равенств (7), представим в виде суммы двух компонент

$$\varphi_k(y, \xi, \eta) = \varphi_{k0}(y, \xi, \eta) + \varphi_{k1}(y, \xi, \eta), \quad (8)$$

$$f_k(x, \xi, \eta) = f_{k0}(x, \xi, \eta) + f_{k1}(x, \xi, \eta),$$

первые из которых выбирают так, чтобы вторые можно было бы разложить в равномерно сходящиеся вместе со своими производными до определенного порядка ряды по некоторой замкнутой на компакте $[-1; +1]$ системе функций. Для этого достаточно первые компоненты в представлении (8) выбрать в виде многочленов P_k некоторой степени k . От величины k зависит равномерная сходимости производных отмеченных рядов. Для наших целей достаточно ограничиться значением $k = 3$ [1, 2]. При этом замкнутой системой функций, о которой шла речь, является система функций $H_i(s)$ [4] (аргумент $s \in [-1; +1]$ принимает значение «х» или «у»).

Для однозначного построения полиномиальных компонент из (8) необходимо и достаточно ввести 16 узловых параметров $W_{nm} (n, m = \overline{1, 4})$, являющихся значениями в угловых точках с номерами «n»

функций $E(x, y, \xi, \eta) (m = 1), \frac{\partial E}{\partial x} (m = 2),$

$\frac{\partial E}{\partial y} (m = 3), \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} (m = 4)$ соответственно. Тогда

функции $\varphi_{k1}(y, \xi, \eta)$ и $f_{k1}(x, \xi, \eta)$ будут удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi_{k1}(\pm 1, \xi, \eta) = \varphi'_{k1}(\pm 1, \xi, \eta) = 0,$$

$$f_{k1}(\pm 1, \xi, \eta) = f'_{k1}(\pm 1, \xi, \eta) = 0, \quad (9)$$

которым и удовлетворяют функции $H_i(s)$.

В соответствии с представлением (8) краевых функций $\varphi_k(y, \xi, \eta), f_k(x, \xi, \eta)$ решение краевой зада-

чи (5) – (6) будем искать в виде суммы двух решений:

$$g(x, y, \xi, \eta) = g_0(x, y, \xi, \eta) + g_1(x, y, \xi, \eta). \quad (10)$$

Функция $g_0(x, y, \xi, \eta)$ представляет собой решение краевой задачи (5) – (6), если в краевых условиях (7) функции $\varphi_k(y, \xi, \eta)$, $f_k(x, \xi, \eta)$ заменить на функции $\varphi_{k0}(y, \xi, \eta)$ и $f_{k0}(x, \xi, \eta)$ соответственно. Решение $g_0(x, y, \xi, \eta)$ однозначно представим в форме следующего многочлена:

$$g_0(x, y, \xi, \eta) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy + A_4x^2 + A_5y^2 + A_6xy^2 + A_7x^2y + A_8x^3 + A_9y^3 + A_{10}xy^3 + A_{11}x^3y + A_{12}(r_{11} + h_1) + A_{13}(r_{12} + h_2) + A_{14}(r_{21} + h_3) + A_{15}(r_{22} + h_4), \quad (11)$$

здесь A_i – коэффициенты-функции переменных (ξ, η) , выраженные через 16 узловых параметров $W_{nm}(\xi, \eta)$;

$$r_{ij} \equiv r_{ij}(x, y) = \mu_i(x)\mu_j(y) - \text{известные функции:} \\ \mu_1(s) = \frac{(1-s-s^2+s^3)}{4}, \mu_2(s) = \frac{(-1-s+s^2+s^3)}{4}, \quad (12)$$

построенные так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} \mu_1(\pm 1) &= \mu_2(\pm 1) = 0, \\ \mu_1'(-1) &= \mu_2'(1) = 1, \\ \mu_1'(1) &= \mu_2'(-1) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Параметры $A_i(\xi, \eta)$ связаны с параметрами $W_{nm}(\xi, \eta)$ матричным равенством

$$[A] = \frac{1}{8}\{B\}[W], \quad (14)$$

где $[A]$ – вектор коэффициентов A_i ;

$[W] = \{W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}, \dots, W_{44}\}$ – вектор узловых параметров;

$\{B\}$ – квадратная матрица шестнадцатого порядка:

$$\{B\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 8 & 2 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & -2 & 4 & -4 & 8 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 2 & -4 & -4 & 8 & -2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Отдельно отметим, что функции $h_i = h_i(x, y)$ (назовем их бигармонизирующими добавками в том смысле, что стоящие при коэффициентах $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}$ в (11) функции были бы бигармоническими) определяются так [2]:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\lambda^2}{2}(-u_1 + 3u_2 + 3u_3 - 9u_4), \\ h_2 &= \frac{\lambda^2}{2}(u_1 - 3u_2 + 3u_3 - 9u_4), \\ h_3 &= \frac{\lambda^2}{2}(u_1 + 3u_2 - 3u_3 - 9u_4), \\ h_4 &= \frac{\lambda^2}{2}(-u_1 - 3u_2 - 3u_3 - 9u_4), \end{aligned} \quad (16)$$

где $u_i(x, y)$ – решения четырех базовых краевых задач:

$$Lu_i = P_i^* \text{ в } \Omega, \quad (17)$$

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (18)$$

при $P_1^* = 1, P_2^* = x, P_3^* = y, P_4^* = xy$.

Решения u_i можно получить различными методами:

- методом Ритца или Бубнова-Галеркина (что в данном случае одно и то же в силу положительной определенности краевых задач), аппроксимируя искомую функцию по линейно независимой и полной в $L_2(\Omega)$ системе координатных функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям (18);

- по собственным функциям оператора L краевых задач (17) – (18);

- методом Ритца или Бубнова-Галеркина, когда в качестве координатных функций принимаются ортонормированные функции в энергетическом пространстве $H_1(\Omega)$ оператора краевых задач (17) – (18);

- любым другим корректным методом.

Обсудим некоторые особенности предлагаемых трёх первых методов для решения краевых задач (17) – (18). Каждый из них является аналитико-численным методом. Это позволяет получить искомые решения с любой наперед заданной точностью в виде аналитических выражений, содержащих конечное или счетное множество параметров, подлежащих определению.

Первый метод подробно исследован для пяти систем координатных функций в работе [5], в которой показано, что наилучшими свойствами в смысле требований, предъявляемых к ним [6], обладают фундаментальные балочные функции А. Н. Крылова, функции С. А. Халилова и функции В. Б. Минтюка. Однако фундаментальные балочные функции весьма неудобны при вычислениях в силу их неустойчивости. Сравнение чисел обусловленности матрицы Грама в энергетическом пространстве бигармонического оператора для двух последних систем функций показало, что лучшими свойствами обладают функции С.А. Халилова, хотя окончательные результаты, полученные по этим системам, сов-

падают полностью до любого знака. Это объясняется тем, что обе системы являются многочленами, хотя и обладают различными аппроксимативными свойствами. Недостатком такого похода является то, что он требует решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) достаточно высокого порядка.

Метод разложения искомого решения по системе собственных функций [7] краевой задачи (17) – (18) позволяет выписать аналитическое решение в замкнутой форме, при этом отпадает необходимость в решении СЛАУ высокого порядка. Недостаток этого метода заключается в необходимости предварительного определения собственных значений и соответствующих им собственных функций. Такая процедура для обеспечения заданной точности требует немалых вычислительных ресурсов.

Третий метод [8] обладает теми же достоинствами, что и второй. Но неустойчивость, связанная с рекурсивностью процедуры получения ортонормированного базиса, до настоящего времени являлась одним из основных его недостатков.

Однако наличие современных программных средств, систем компьютерной алгебры позволяет свести к минимуму недостатки этих методов, а возможность представления числа в виде радикалов и дробей дает возможность получить замкнутые аналитические выражения искомых функций. Говоря иначе, неустойчивости процедуры построения как собственных элементов краевой задачи, так и ортонормированного по энергии базиса можно избежать, что и показано в работах [7, 8]. Отметим, что трудоемкость вычислений вторым и третьим методами имеет одинаковый порядок, но алгоритмическая замкнутость третьего метода преобладает над вторым, поэтому решения четырех базовых задач (17) – (18) отыскиваются последним методом.

Пользуясь ортонормированной по энергии бигармонического оператора системой функции $\omega_k(x, y)$, решения обсуждаемых базовых задач можно выписать в явном виде

$$u_i(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{ik} \omega_k(x, y), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} U_{1k} &= \int_{\Omega} 1 \cdot \omega_k^{++} d\Omega, & U_{2k} &= \int_{\Omega} x \cdot \omega_k^{++} d\Omega, \\ U_{3k} &= \int_{\Omega} y \cdot \omega_k^{+-} d\Omega, & U_{4k} &= \int_{\Omega} xy \cdot \omega_k^{--} d\Omega, \end{aligned} \quad (20)$$

здесь верхние знаки у функций $\omega_k(x, y)$ указывают на четность (+) или нечетность (–) соответствующей функции по своим аргументам [8].

Ссылаясь на результаты работ [5, 8 – 10], трудно показать, что коэффициенты U_{ik} в рядах (19) допускают асимптотическую оценку:

$U_{ik} = O(k^{-17/2}), \quad k \rightarrow \infty \quad \forall i (\overline{1, 4})$. Отсюда следует более высокая сходимость, чем сходимость по энергии бигармонического оператора.

Таким образом, компонента $g_0(x, y, \xi, \eta)$ регулярной части функции Грина краевой задачи (5) – (6) полностью построена.

Переходя к построению второй компоненты $g_1(x, y, \xi, \eta)$ регулярной части функции Грина, отметим, что эта функция является решением краевой задачи типа (5) – (6), когда краевые условия (6) в развернутом виде конкретизируются так:

$$\begin{aligned} g_1|_{x=-1} &= -(g_0 + E)|_{x=-1} \equiv \varphi_{11}(y, \xi, \eta), \\ g_1|_{x=+1} &= -(g_0 + E)|_{x=+1} \equiv \varphi_{21}(y, \xi, \eta), \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}|_{x=-1} &= -\frac{\partial(g_0 + E)}{\partial x}|_{x=-1} \equiv \varphi_{31}(y, \xi, \eta), \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}|_{x=+1} &= -\frac{\partial(g_0 + E)}{\partial x}|_{x=+1} \equiv \varphi_{41}(y, \xi, \eta), \\ g_1|_{y=-1} &= -(g_0 + E)|_{y=-1} \equiv f_{11}(x, \xi, \eta), \\ g_1|_{y=+1} &= -(g_0 + E)|_{y=+1} \equiv f_{21}(x, \xi, \eta), \\ \frac{\partial g_1}{\partial y}|_{y=-1} &= -\frac{\partial(g_0 + E)}{\partial y}|_{y=-1} \equiv f_{31}(x, \xi, \eta), \\ \frac{\partial g_1}{\partial y}|_{y=+1} &= -\frac{\partial(g_0 + E)}{\partial y}|_{y=+1} \equiv f_{41}(x, \xi, \eta). \end{aligned} \quad (21)$$

Функции $\varphi_{k1}(y, \xi, \eta)$ и $f_{k1}(x, \xi, \eta)$ с учетом условий (9) представим в виде разложений в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды по ортонормированной системе функций $H_n(s)$ [4]:

$$\begin{aligned} f_{k1}(x, \xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn}(\xi, \eta) H_n(x), \\ \varphi_{k1}(y, \xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{kn}(\xi, \eta) H_n(y), \end{aligned} \quad (22)$$

где $A_{kn}(\xi, \eta) = \int_{-1}^1 f_{k1}(x, \xi, \eta) H_n(x) dx,$

$B_{kn}(\xi, \eta) = \int_{-1}^1 \varphi_{k1}(y, \xi, \eta) H_n(y) dy.$

Левые части в равенствах (21) являются бесконечно дифференцируемыми функциями в интервале (-1; +1). Отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость не только самих рядов (22), но и их производных.

Принимая во внимание свойства функций $H_n(s)$ [5, 7 – 9], будем искать функции $g_1(x, y, \xi, \eta)$ в виде суперпозиции одинарных рядов

$$g_1(x, y, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n(x, \xi, \eta) H_n(y) + \Phi_n(y, \xi, \eta) H_n(x)), \quad (23)$$

где $F_n(x, \xi, \eta), \Phi_n(y, \xi, \eta)$ – гиперболо-тригонометри-

ческие функции. Подробная процедура построения таких решений и исследование их точности проведены в работе [11]. Отметим только основные моменты: функции $F_n(x, \xi, \eta)$ и $\Phi_n(y, \xi, \eta)$ имеют следующий вид:

$$F_n(x, \xi, \eta) = C_{1n}(\xi, \eta) \operatorname{sh}(\theta_{1n} x) \sin(\varpi_{1n} x) + C_{2n}(\xi, \eta) \operatorname{ch}(\theta_{1n} x) \sin(\varpi_{1n} x) + C_{3n}(\xi, \eta) \operatorname{sh}(\theta_{1n} x) \cos(\varpi_{1n} x) + C_{4n}(\xi, \eta) \operatorname{ch}(\theta_{1n} x) \cos(\varpi_{1n} x), \quad (24)$$

$$\Phi_n(y, \xi, \eta) = D_{1n}(\xi, \eta) \operatorname{sh}(\theta_{2n} y) \sin(\varpi_{2n} y) + D_{2n}(\xi, \eta) \operatorname{ch}(\theta_{2n} y) \sin(\varpi_{2n} y) + D_{3n}(\xi, \eta) \operatorname{sh}(\theta_{2n} y) \cos(\varpi_{2n} y) + D_{4n}(\xi, \eta) \operatorname{ch}(\theta_{2n} y) \cos(\varpi_{2n} y), \quad (25)$$

$$\text{где } \varpi_{1n} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\|H_n''(y)\|^2} - \|H_n'(y)\|^2},$$

$$\varpi_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \sqrt{\sqrt{\|H_n''(x)\|^2} - \|H_n'(x)\|^2},$$

$$\theta_{1n} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\|H_n''(y)\|^2} + \|H_n'(y)\|^2},$$

$$\theta_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \sqrt{\sqrt{\|H_n''(x)\|^2} + \|H_n'(x)\|^2};$$

$\| \|$ – обозначение нормы функции в пространстве $L_2(-1; 1)$;

$C_{kn}(\xi, \eta)$ ($k = \overline{1, 4}$) – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $x = \pm 1$:

$$F_n|_{x=-1} = B_{1n}(\xi, \eta), \quad \left. \frac{\partial F_n}{\partial x} \right|_{x=-1} = B_{3n}(\xi, \eta), \quad (26)$$

$$F_n|_{x=+1} = B_{2n}(\xi, \eta), \quad \left. \frac{\partial F_n}{\partial x} \right|_{x=+1} = B_{4n}(\xi, \eta);$$

$D_{kn}(\xi, \eta)$ ($k = \overline{1, 4}$) – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $y = \pm 1$:

$$\Phi_n|_{y=-1} = A_{1n}(\xi, \eta), \quad \left. \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right|_{y=-1} = A_{3n}(\xi, \eta), \quad (27)$$

$$\Phi_n|_{y=+1} = A_{2n}(\xi, \eta), \quad \left. \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right|_{y=+1} = A_{4n}(\xi, \eta).$$

Из результатов работ [1, 2, 10, 11] следует, что для функций $F_n(x, \xi, \eta)$, $\Phi_n(y, \xi, \eta)$ имеют место одинаковые асимптотические оценки

$$F_n(\Phi_n) = O\left(n^{-17/2}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{и}$$

$\forall (\xi, \eta) \in \Omega$. Учитывая ограниченность по модулю в совокупности (независимо от n) функций $H_n(s)$ и их

производных, можно утверждать о равномерной и абсолютной сходимости не только рядов (23), но и их производных до любого порядка в любой произвольной замкнутой области Ω' , целиком лежащей в Ω . Что же касается гладкости решений вплоть до границы и её угловых точек, то этот вопрос требует особого рассмотрения.

Поскольку функция Грина аналитическая, за исключением точки-носителя двумерной δ -функции, то ее граничные значения и значения ее нормальной производной на границе являются функциями аналитическими на каждом из четырех прямолинейных участков границы. Однако отсюда не следует её аналитичность вплоть до угловых точек, иными словами, гладкость функции Грина определяется гладкостью ее регулярной части, которая, в свою очередь, зависит только от гладкости границы. В рассматриваемом случае граница является лишь границей класса Липшица. Априори известно (в силу конечности энергии деформирования), что при такой границе независимо от гладкости правых частей дифференциального уравнения и краевых функций можно утверждать только о принадлежности решения к классу $W_2^2(\Omega) \equiv H^2(\Omega)$ функций, которые вместе со своими вторыми производными включительно являются элементами гильбертова пространства $L_2(\Omega)$. В таком случае сходимость в пространстве $H^2(\Omega)$ означает сходимость по метрике (энергии) бигармонического оператора $H_L(\Omega)$. Но наличие угловых (сингулярных) точек границы, в которых нормаль (касательная) терпит разрыв, допускает однородные (сингулярные) решения, оставляющие энергию **конечной**, хотя сами они или их производные стремятся к бесконечности при приближении к угловой точке изнутри области, что в результате понижает степень гладкости ожидаемого решения. При использовании прямых методов к решению подобных задач эти сингулярности должны быть учтены заранее, ибо если этого не сделать, то скорость сходимости приближенных решений к точному будет значительно меньше не только в малой окрестности угловой точки, но и практически во всей области.

В связи с этим возникает вопрос: «Можно ли расширить установленную априори гладкость класса $H^2(\Omega)$ до некоторой гладкости решения из класса $H^k(\Omega)$ при $k > 2$?». Ответ зависит от значения внутреннего угла α между двумя касательными, проведенными в угловой точке к частям криволинейной границы выпуклой плоской области¹. Этот результат является содержанием теоремы, касающейся регу-

¹ Приводимый ниже результат принадлежит С. А. Халилову и анонсирован в научно-техническом отчете [12].

лярности решения основной бигармонической проблемы в многоугольной криволинейной области, участки которой m -регулярны, где $m \geq 2$.

Теорема. Если угол раствора α клиновидной области K отвечает условию $\alpha_0 < 126,2837099741076^\circ$, то решение основной бигармонической проблемы, принадлежащее пространству С. Л. Соболева $H^2(\Omega)$, является решением из $H^4(\Omega)$. Если же $\alpha_0 < \alpha < 2\pi$, то это же решение принадлежит классу $H^3(\Omega)$.

В нашем случае $\alpha = \pi/2 < \alpha_0$ и, согласно теореме, регулярная часть функции Грина принадлежит классу $H^4(\Omega)$. Отсюда и из теорем вложения [13, 14] следует, что регулярная часть функции Грина принадлежит классу $C^2(\bar{\Omega})$. На самом же деле эта гладкость еще выше, что следует из приведенных оценок. Такое заключение выводится на основании теоремы А. А. Маркова [15, с. 336] об оценке производной многочлена через оценку максимума модуля значения самого многочлена. Отсюда немедленно следует, что регулярная часть функции Грина принадлежит $C^4(\Omega)$.

Таким образом, обе компоненты регулярной части функции Грина (10) построены.

Полученные здесь решения для двух компонент регулярной части g функции Грина являются аналитико-численными в указанном ранее смысле. Поэтому они содержат некоторые погрешности. Природа этих погрешностей для каждой компоненты различна.

Погрешности первой компоненты g_0 обусловлены погрешностями решений базовых задач, при этом краевые условия (18) удовлетворяются точно, а исходные уравнения (17) – приближенно. Эти погрешности определяются конечностью величины K в представлениях (19), при стремлении $k \rightarrow \infty$ указанная погрешность стремится к нулю. При конечном k возникает невязка, которая, как показано в работах [5, 7, 9], стремится к нулю равномерно в любой открытой области Ω' , целиком лежащей в заданной области Ω .

Погрешность компоненты g_1 регулярной части функции Грина имеет несколько другую природу. Во-первых, дифференциальное уравнение задачи нарушено из-за предположения о квазиортогональности в области первых и вторых частных производных от функций координатной системы $H_n(s)$ [4]. При этом в решение вводится неустранимая погрешность, однако, как показано в работе [11], такая погрешность весьма мала даже при определении вторых производных от функции прогиба (изгибающих моментов). Во-вторых, дополнительная погрешность (устраиваемая) возникает из-за неточности представления краевых условий (21). Эта при-

ближенность обусловлена тем, что при конкретных вычислениях ряды в решении (23), а следовательно, и в равенствах (24), (25) заменяются конечными суммами, верхние пределы которых выбираются из условий достижения заданной точности по моментам. И последнее, погрешность в определении g_0 в области Ω сказывается на точности построения g_1 как в области при выполнении дифференциального уравнения, так и на границе при выполнении краевых условий.

2. Некоторые численные результаты

С механической точки зрения построенная функция Грина является решением задачи об изгибе жестко зашпеленной по контуру прямоугольной пластины Кирхгофа под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной внутренней точке с координатами (ξ, η) . Как следует из метода построения регулярной части функции Грина, решение отмеченной задачи является аналитико-численным в указанном ранее смысле, то есть в регулярной части такой функции содержатся определенные погрешности. При этом первая компонента регулярной части g_0 определяется автономно, независимо от g_1 , тогда как погрешность в определении второй компоненты зависит от погрешности определения *первой*. Исследование этой зависимости является первой задачей, решаемой в данном разделе.

Исходя из физических соображений нетрудно заключить, что при приближении носителя двумерной δ -функции к границе свойства устойчивости, сходимости и точности регулярной части функции Грина могут «портиться». Рассмотрение этого вопроса является содержанием *второй* задачи данного раздела. В этом исследовании особое внимание уделено случаю, когда сосредоточенная сила приложена вблизи границы, а именно в точке $\xi = 0,95$ и $\eta = 0$ (то есть точка приложения силы находится на расстоянии от границы, составляющем 2,5% длины стороны квадратной пластины).

И, наконец, *третья* задача вызвана вполне естественным желанием сопоставить результаты, получаемые с помощью функции Грина, при действии сосредоточенной силы с данными, доставляемыми методом конечного элемента (МКЭ).

При действии сосредоточенной силы P , приложенной в произвольной внутренней точке (ξ, η) прямоугольника, функция Грина с точностью до мультипликативной константы совпадает с самой функцией прогиба $w(x, y, \xi, \eta)$:

$$w(x, y, \xi, \eta) = \frac{Pa^2}{D} G(x, y, \xi, \eta) \equiv \frac{Pa^2}{D} \bar{w}(x, y, \xi, \eta), (28)$$

где $\bar{w}(x, y, \xi, \eta)$ – функция безразмерного прогиба,

D – цилиндрическая жесткость пластины.

В теории пластин Кирхгофа нормальные напряжения определяются изгибающими моментами, для которых в принятой здесь безразмерной системе координат имеют место равенства:

$$M_x(x, y, \xi, \eta) = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (29)$$

$$M_y(x, y, \xi, \eta) = -\frac{D}{a^2} \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (30)$$

где ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

При действии сосредоточенной силы в точке (ξ, η) формулы (29) приобретают вид:

$$M_x(x, y, \xi, \eta) = -P \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) = P \bar{M}_x, \quad (31)$$

$$M_y(x, y, \xi, \eta) = -P \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) = P \bar{M}_y, \quad (32)$$

где $\bar{M}_x(x, y, \xi, \eta)$ и $\bar{M}_y(x, y, \xi, \eta)$ – безразмерные функции изгибающих моментов.

Погрешность в определении первой компоненты регулярной составляющей функции Грина при решении базовых задач $u_i(x, y)$ зависит от величины верхних пределов K_i , которыми заменяются пределы бесконечные в представлении (19). Каждому верхнему пределу K_i соответствуют верхние пределы N_1 и N_2 в представлении (23) второй компоненты регулярной части функции Грина. Величины $K_i \equiv K$, а следовательно, $N_1(K)$ и $N_2(K)$ зависят от требуемой точности: $\varepsilon_w(\%)$ – погрешность определения прогибов и $\varepsilon_M(\%)$ – погрешность определения изгибающих моментов. Если обеспечена погрешность ε_M , то погрешность $\varepsilon_w \ll \varepsilon_M$, поэтому достаточно задавать лишь погрешность ε_M как ведущую величину в определении погрешности, однако здесь мы вводим обе погрешности, не исключая «экзотических» случаев (например, задача определения жесткости конструкции).

После этих предварительных замечаний рассмотрим квадратную пластину ($\lambda = 1$) под действием единичной силы, приложенной в её центре ($\xi = \eta = 0$); коэффициент Пуассона ν здесь и далее полагается равным 0,3. Поскольку данная задача полностью симметрична, должно принять $N_1 = N_2 = N$. Определим необходимое число координатных функций, обеспечивающее требуемую точность по прогибам в центре пластины ($\varepsilon_w = 10^{-5}\%$) и значений изгибающих моментов в середине одной из сторон ($\varepsilon_M = 10^{-2}\%$). Результаты расчетов представлены в табл. 1. Следует обратить внимание и на то, что для получения результатов с гарантирован-

ной с точки зрения арифметических вычислений точностью необходимо все расчеты проводить не менее чем с 16-значной мантиссой чисел. Это требование аргументировано видом регулярной части функции Грина, которая состоит не только из полиномиальных функций, но и гиперболических, логарифмических и всевозможных их комбинаций.

Таблица 1

К сходимости и точности функций Грина

G(0, 0, 0, 0) $\equiv \bar{w}(0, 0, 0, 0)$				$\bar{M}_x(1, 0, 0, 0) = \bar{M}_y(0, 1, 0, 0)$			
K	N = 9	N	K = 21	K	N = 9	N	K = 21
1	0,022762050	0	0,022688207	1	-0,111359969	0	-0,118725344
3	0,022677294	1	0,022688207	3	-0,111359969	1	-0,121776558
6	0,022680847	3	0,022680753	6	-0,119974683	3	-0,121565402
10	0,022680832	5	0,022680762	10	-0,121253317	5	-0,121560290
15	0,022680568	7	0,022680762	15	-0,121470325	7	-0,121527734
21	0,022680762	9	0,022680762	21	-0,121508852	9	-0,121508852
$\varepsilon_w \approx 3,968 \cdot 10^{-5}\%$				$\varepsilon_M \approx 1,55 \cdot 10^{-2}\%$			

Представленные результаты показывают достаточно быструю сходимость как самих значений функции Грина, так и ее вторых производных (безразмерных изгибающих моментов). Напомним, что на сходимость и точность значений функции $G(x, y, \xi, \eta)$ в любой открытой области пластины $\Omega' \subset \Omega$ существенное влияние оказывает выбор параметра K при построении регулярной составляющей $g_0(x, y, \xi, \eta)$; а на точность удовлетворения однородным краевым условиям на участках $(-1; +1)$ границы влияние оказывает выбор верхних пределов N_1 и N_2 при построении регулярной составляющей $g_1(x, y, \xi, \eta)$. Из приведенных данных табл. 1 следует, что для получения значений безразмерного прогиба и изгибающих моментов с наперед заданной точностью при построении функции Грина в случае квадратной пластины можно ограничиться верхними пределами: $K^* = 21$ и $N^* = 9$. Для остальных удлинений пластины в оговоренных ранее суммах следует удерживать большее число аппроксимирующих функций вдоль длинной стороны.

Переходя к рассмотрению второй поставленной в данном пункте задачи, зададимся вопросами: «Какая точность выполнения краевых условий жесткого защемления обеспечивается, сохраняя значения параметров $K = K^*$ и $N = N^*$? Как на невязку выполнения краевых условий влияет расположение сосредоточенной силы?»

Для получения ответа на эти вопросы было проведено следующее исследование: точка-носитель двумерной δ -функции с некоторым шагом смещалась от центра квадратной пластины по линии $y = 0$ к защемленному краю. Рассмотрены восемь вариантов расположения единичного возмущения ($\eta = 0$ во всех случаях): 1. $\xi = 0$; 2. $\xi = 0,15$; 3. $\xi = 0,3$;

4. $\xi = 0,45$; 5. $\xi = 0,6$; 6. $\xi = 0,75$; 7. $\xi = 0,9$; 8. $\xi = 0,95$. В каждом случае исследуется поведение функции Грина $G(x, y, \xi, \eta)$ и ее первой производной $\frac{\partial G}{\partial x}$ на стороне $x = 1$. Таким образом, можно проследить за распределением погрешностей при выполнении краевых условий (6) не только из-за недостатка числа аппроксимирующих функций в решении $g_1(x, y, \xi, \eta)$, но и от влияния расположения точки носителя двумерной δ -функции. Результаты этого исследования представлены в виде серии графиков самой функции Грина (рис. 1) и ее нормальной производной (рис. 2).

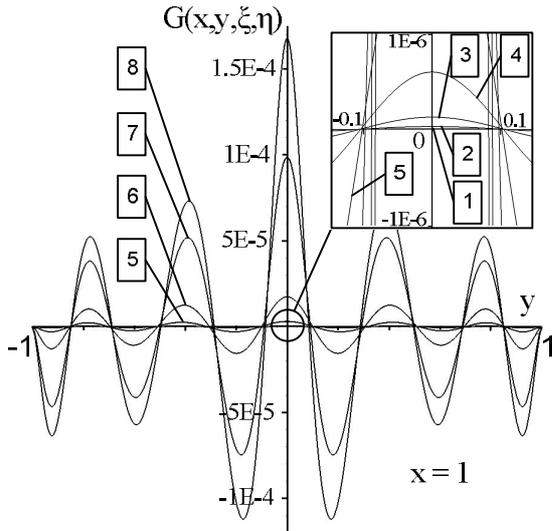


Рис. 1. Функция Грина $G(x, y, \xi, \eta)$ на границе $x = 1$ для восьми вариантов приложения единичного возмущения

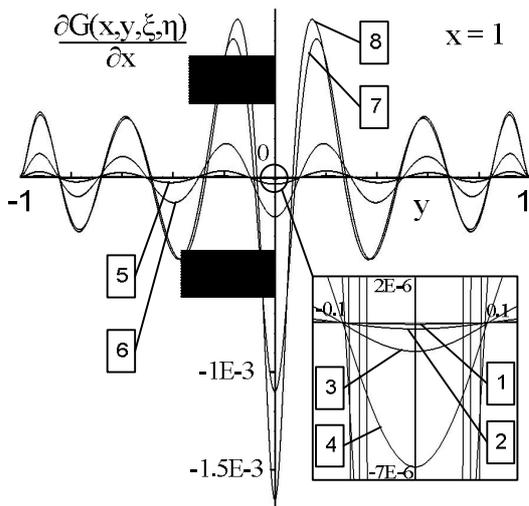


Рис. 2. Производная функции Грина $\frac{\partial G}{\partial x}$ на границе $x = 1$ для восьми вариантов приложения единичного возмущения

Как видно из приведенных рисунков, максимальная погрешность при аннулировании значений

фундаментального решения и его нормальной производной на границе со смещением точки приложения силы к заземленной стороне пластины существенно возрастает. Отсюда следует очевидный вывод, что, несмотря на высокую точность выполнения краевых условий жесткого защемления с центрально расположенной сосредоточенной силой, оказывается недостаточным полагать $N = 9$ при построении второго слагаемого регулярной части функции Грина, особенно в случае близкого расположения к границе действующей нагрузки. Конечно же, при рассмотрении задач с произвольным видом нагружения необходимо быть уверенным в точности выполнения краевых условий.

При произвольном расположении носителя $(\xi, \eta) \in \Omega$ двумерной δ -функции краевые условия всегда можно выполнить с любой наперед заданной точностью, для чего необходимо лишь удержать большее число аппроксимирующих функций в суммах (22), (23). Для пояснения сказанного обсудим результаты решения краевой задачи для квадратной пластины ($\lambda = 1$) под действием сосредоточенной силы, приложенной в точке $\eta = 0$ и $\xi = 0,95$. Следует отметить, что на точность выполнения условий жесткого защемления сторон значение параметра K влияет в меньшей степени, чем значения верхних пределов в указанных выше суммах, поэтому здесь достаточно ограничиться $K = 21$.

Представление о сходимости и точности функции Грина и ее нормальной производной по линии $x = 1$ при различных значениях верхнего предела N можно получить из рис. 3 и 4. Номера графиков на рисунках соответствуют значениям верхнего предела N : 1. $N = 1$; 2. $N = 3$; 3. $N = 5$; 4. $N = 7$; 5. $N = 9$; 6. $N = 14$; 7. $N = 19$; 8. $N = 21$; 9. $N = 23$; 10. $N = 25$.

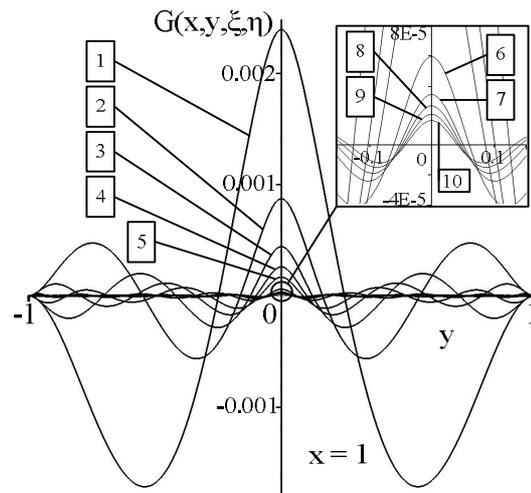


Рис. 3. Сходимость и точность функции Грина по линии $x = 1$ в случае приложения сосредоточенной силы в точке $\eta = 0$ и $\xi = 0,95$

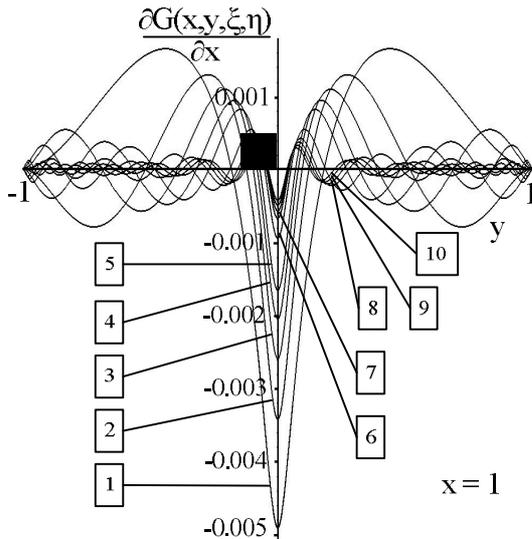


Рис. 4. Сходимость и точность производной функции Грина $\frac{\partial G}{\partial x}$ по линии $x = 1$ в случае приложения сосредоточенной силы в точке $\eta = 0$ и $\xi = 0,95$

Как видно из рис. 3 и 4, с удержанием все большего и большего числа координатных функций при построении регулярной части $g_1(x, y, \xi, \eta)$ число нулей функций прогиба и углов поворота на границе растет, а значение максимума модуля невязки (экстремумов) стремительно уменьшаются до нуля. Отсюда следует, что обе функции $G(x, y, \xi, \eta)$ и $\frac{\partial G}{\partial x}$ на любой стороне прямоугольника можно заключить в полосу высотой 2ε , $\varepsilon \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, что, в свою очередь, означает равномерное стремление к

нулю погрешности выполнения краевых условий. Таким образом, можно обеспечить любую наперед заданную точность на каждом этапе построения функции Грина.

Переходя к обсуждению означенного выше третьего вопроса, приведем сравнительный анализ результатов решения краевой задачи о деформировании жестко защемленной прямоугольной пластины с центрально расположенной сосредоточенной нагрузкой двумя разными методами: численным методом МКЭ и с использованием построенной здесь функции Грина.

Результаты расчетов для двух удлинений пластины сведены в табл. 2. В колонках $\bar{w}_{МКЭ}(0,0,0,0)$, $\bar{M}_x^{МКЭ}(1,0,0,0)$ и $\bar{M}_y^{МКЭ}(0,1,0,0)$ приведены значения обезразмеренных по формулам (28), (31) и (32) максимальных прогибов в центре пластины и максимальных изгибающих моментов в серединах защемленных сторон в зависимости от числа неизвестных узловых параметров $N_{МКЭ}$. В трех последних колонках таблицы приведены значения означенных величин, определенных методом данной работы. Безразмерные значения прогиба и изгибающих моментов, полученные с помощью функции Грина, определяли с параметрами $K = 21$ и $N_1 = N_2 = 9$ в случае квадратной пластины и $K = 66$ и $N_1 = 9, N_2 = 19$ – при $\lambda = 2$. Выбор приведенных значений верхних пределов для обеспечения заданной точности ($\varepsilon_w \approx 10^{-5}\%$, $\varepsilon_M \approx 10^{-2}\%$) проводили программным путем, все цифры чисел в последних трех колонках верны.

Таблица 2

К сходимости и точности значений прогибов и изгибающих моментов жестко защемленной прямоугольной пластины под действием приложенной в центре сосредоточенной силы

λ	$N_{МКЭ}$	$\bar{w}_{МКЭ}(0,0,0,0)$	$\bar{M}_x^{МКЭ}(1,0,0,0)$	$\bar{M}_y^{МКЭ}(0,1,0,0)$	$\bar{w}_G(0,0,0,0)$	$\bar{M}_x^G(1,0,0,0)$	$\bar{M}_y^G(0,1,0,0)$
1	639	0,023073260	-0,09554	-0,09554	0,0226807	-0,12151	-0,12151
	4159	0,022630037	-0,11184	-0,11184			
	15199	0,022510989	-0,11819	-0,11819			
	34959	0,022479853	-0,12070	-0,12070			
	60399	0,022467033	-0,12189	-0,12189			
	135599	0,022457875	-0,12316	-0,12316			
2	1259	0,007346154	-0,012265	-0,128850	0,0073997	-0,01867	-0,18005
	7951	0,007268132	-0,014029	-0,150790			
	30299	0,007243773	-0,014719	-0,158550			
	68851	0,007237179	-0,014946	-0,161560			
	120599	0,007234615	-0,015057	-0,162970			
	270899	0,007232601	-0,015167	-0,164470			

Результаты табл. 2 говорят сами за себя. Акцентируем внимание лишь на одном, но главном моменте.

Для получения более или менее достоверных результатов по МКЭ (хотя они не так уж близки к точному решению) требуется при $\lambda = 1$ решать систему уравнений порядка 135600, а при $\lambda = 2$ порядок

уравнений практически удваивается и равен 270900. Максимально необходимый порядок систем линейных алгебраических уравнений при решении промежуточных задач (определение g_0 и g_1) для обеспечения наперед заданной точности составлял не более тридцати при $\lambda = 1$ и не более семидесяти при $\lambda = 2$. Комментарии здесь излишни, но можно доба-

вить только то, что быстрота сходимости результатов по МКЭ (табл. 2) и по данному методу (табл. 1) несопоставима. О точности получаемых результатов заинтересованный читатель сам сделает выводы, анализируя данные табл. 1 и 2.

Следует отметить, что, несмотря на сложность процедуры построения функции Грина и громоздкость окончательных формул, любой исследователь получает возможность приблизиться к точному решению (существующему, но неизвестному) с любой наперед заданной точностью, вплоть до производных любого порядка. Более того, присутствие в функции Грина фундаментального решения в явном виде позволяет априори установить поведение искомого решения в иррегулярных точках и линиях области, определяемых характером входных данных (нагрузок). Если бы была возможность представить компоненты регулярной части функции Грина в рамках данной работы в аналитической форме, она потребовала бы не одного десятка страниц. Однако это не является принципиальной проблемой, так как современные вычислительные средства (следует надеяться на их усовершенствование в будущем) позволяют хранить информацию и оперировать ею не только в численном, но и символьном (аналитическом) виде.

Заключение

1. Впервые построена аналитико-численная функция Грина основной краевой задачи для бигармонического оператора в прямоугольной области, состоящая из суммы фундаментального и регулярного решений. Наличие в явном виде фундаментального решения в функции Грина позволяет априори установить поведение искомого решения в особых точках области (например, в точках действия сосредоточенных нагрузок), а построенное регулярное решение обеспечивает выполнение краевых условий, вплоть до сингулярных (угловых) точек границы.

2. Полученные оценки позволяют улучшить априорно известные оценки гладкости решений данного класса задач не только во внутренней области, но и вплоть до границы и ее угловых точек.

3. Указанные выше априорные оценки гладкости функции Грина подтверждены конструктивно (апостериорно) путем анализа сходимости и точности результатов решения ряда конкретных задач. Показано, что неизбежные погрешности, возникающие при решении промежуточных задач, стремятся к нулю равномерно. Это означает, что приближенные аналитико-численные решения стремятся к точным вместе со своими производными до некоторого порядка.

4. Сравнение точности и трудоемкости получаемых результатов по данному методу и по МКЭ при действии локальных нагрузок показало их несопоставимость: МКЭ требует введения примерно в 10^4 раз большего числа неизвестных, чем при использовании функции Грина. При этом получаемая точность результатов по МКЭ оставляет желать лучшего.

Литература

1. Халилов, С. А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях [Текст] / С. А. Халилов // Вопросы проектирования самолетных конструкций : темат. сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 3. – X., 1982. – С. 120 – 127.
2. Халилов, С. А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях [Текст] / С. А. Халилов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьковского авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – X., 1987. – С. 31 – 39.
3. Морозов, Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости [Текст] / Н. Ф. Морозов. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 181 с.
4. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьковского авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 5. – X., 1978. – С. 46 – 56.
5. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жестко защемленной прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – 2011. – Вып. 49. – С. 81 – 94.
6. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.
7. Собственный спектр бигармонического оператора в прямоугольнике при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 5 (112). – С. 70 – 78.
8. Ткаченко, Д. А. Ортонормированный в энергетическом пространстве бигармонического оператора базис в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях по границе [Текст] / Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 3 (110). – С. 41 – 51.
9. Халилов, С. А. Построение и исследование приближенного аналитического решения бигармо-

нической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 2 (99). – С. 40 – 49.

10. Халилов, С. А. Вычисление некоторых определённых интегралов, содержащих присоединённые функции Лежандра второго и четвёртого порядков [Текст] / С. А. Халилов // *Прочность конструкций летательных аппаратов: Темат. сб. науч. тр.* – Х. : ХАИ, 1984. – Вып. 7. – С. 158 – 165.

11. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях – на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.

12. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Т. 2. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (заключ.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – Х., 2014. – 160 с. – № ГР 0112U002135. – Инв. № 0215U006163.

13. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 333 с.

14. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения [Текст] / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

15. Математический энциклопедический словарь [Текст] : энциклопедия / глав. ред. Ю. В. Прохоров. – М. : Сов. энцикл., 1988. – 847 с.

Поступила в редакцию 23.10.2015, рассмотрена на редколлегии 18.11.2015

ФУНКЦІЯ ГРІНА ОСНОВНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО ОПЕРАТОРА У ПРЯМОКУТНИКУ

С. А. Халілов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко

Через лінійність крайової задачі функцію Гріна представлено у вигляді суми фундаментального розв'язку для бігармонічного оператора і регулярної складової, що враховує як геометрію області, так і крайові умови по межі. Робота присвячена побудові саме регулярної складової функції Гріна у прямокутнику при крайових умовах типу Діріхле. Застосування систем комп'ютерної алгебри дозволило виписати компоненти регулярної частини функції Гріна у явному вигляді. Надано апріорні й апостеріорні оцінки гладкості й точності функції Гріна в області, аж до межі та її кутових точок.

Ключові слова: бігармонічний оператор, фундаментальне розв'язання, регулярна частина функції Гріна, двомірна δ -функція Дірака.

GREEN'S FUNCTION OF BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BIHARMONIC OPERATOR IN A RECTANGLE

S. A. Khalilov, V. S. Kryvtsov, V. B. Myntyuk, D. A. Tkachenko

Due to the linearity of the boundary value problem the Green's function is represented as a sum of the fundamental solution for the biharmonic operator and a regular component that takes into account both the geometry of the region and the boundary conditions on the border. The work is devoted to the construction of a regular component of the Green's function in a rectangle with the boundary conditions of Dirichlet type. The application of computer algebra allowed writing out the Green function regular part components explicitly. The a priori and a posteriori assessments of the Green's function smoothness and accuracy in the region up to the border and its angular points are given.

Keywords: the biharmonic operator, the fundamental solution, a regular part of the Green's function, a two-dimensional δ -Dirac function.

Халилов Сиявуш Ахмедович – ст. науч. сотр., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: khalilov@ukr.net.

Кривцов Владимир Станиславович – д-р техн. наук, проф., ректор, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: v.krivtsov@khai.edu.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, доц. каф. прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: minvit@mail.ru.

Ткаченко Денис Анатольевич – асп. каф. технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: tkachenko_d_an@ukr.net.