

УДК 539.3

Н. Г. ШУЛЬЖЕНКО, П. П. ГОНТАРОВСКИЙ, Т. В. ПРОТАСОВА

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, Украина***МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРЕХМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Излагается расчетная методика оценки переходных процессов в конструкциях в виде тел вращения по трехмерной модели. Она базируется на сочетании метода конечных элементов с описанием решения в окружном направлении рядами Фурье. Меридиональное сечение конструкции разбивается на четырехугольные конечные элементы. Внешние нагрузки могут задаваться несимметричным образом. Применение разработанных программных модулей вычислений и графического интерфейса для представления результатов обеспечивает экономичность вычислений и возможность анализа реальных конструкций. Приводится пример расчета динамической реакции элемента конструкции на импульсное воздействие.

Ключевые слова: переходный процесс, импульсное нагружение, трехмерная осесимметричная конструкция, полуаналитический метод конечных элементов

Введение

При разделении ракетносителя и космического аппарата, вследствие срабатывания пирострелков, возникают большие динамические нагрузки. При этом в частях конструкции развиваются большие ускорения, что влияет на надежность работы оборудования. Снижение его нагруженности может решаться экспериментально на основе затратных испытаний их моделей или натурных объектов. Использование расчетных методик оценки переходных процессов может существенно уменьшить трудозатраты при решении указанной задачи.

При этом применение математического обеспечения связано с универсальностью и быстродействием используемых методик и достоверностью расчетных данных. Методика [1] основана на использовании трехмерных моделей и прямом численном интегрировании уравнений без существенных ограничений на конструктивные особенности. Предлагаемая в данной работе методика ориентирована на класс конструкций в виде тел вращения, которые достаточно часто встречаются в космических системах. В ее основу положено сочетание метода конечных элементов с разложением решений в окружном направлении в ряды Фурье. Программная разработка по этой методике характеризуется высокими показателями быстродействия при существенно меньших трудозатратах.

1. Методика решения задачи

Тело вращения объемом V рассматривается в

цилиндрической системе координат r, z, θ (ось z направлена по оси вращения тела) (рис. 1). На части поверхности заданы компоненты нагрузки $P_i(t)$, имеющие размерность напряжений, на остальной – перемещения или смешанные граничные условия.

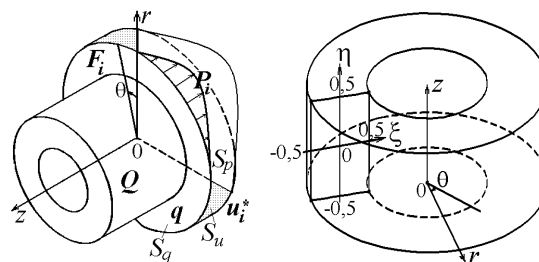


Рис. 1. Схема элемента конструкции в цилиндрической системе координат, и конечный элемент в глобальной и местной системе координат

Для решения задачи используется полуаналитический метод конечных элементов, в котором перемещения, скорости, ускорения и напряжения в окружном направлении описываются отрезком ряда Фурье, а в меридиональном сечении – координатными функциями произвольных выпуклых четырехугольных элементов [1, 2].

Неосесимметричное деформирование тела вращения описывается вариационным уравнением Лагранжа с учетом сил инерции

$$\iiint_V (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - F^i \delta u_i) dV - \iint_S P^i \delta u_i dS + \iiint_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV, \quad (1)$$

где V и S – объем и поверхность тела;

σ^{ij} – компоненты тензора напряжений;

ε_{ij} – тензор деформаций;
 u_i – компоненты перемещений;
 F^i, P^i – компоненты объемного и поверхностного нагружения;
 ρ – плотность материала.

После дискретизации конструкции на конечные элементы, интегралы по объему и поверхности в выражении (1) разбиваются на сумму интегралов по отдельным конечным элементам. Перемещения на конечном элементе задаются в виде

$$\begin{aligned} u_v(\xi, \eta, \theta, t) &= u_{vik}(t) \cdot \varphi_i(\xi, \eta) \cdot \varphi_k(\theta), \\ u_\theta(\xi, \eta, \theta, t) &= u_{\theta ik}(t) \cdot \varphi_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\varphi}_k(\theta), \quad (2) \\ (v=r, z; \quad i=1, 2, 3, 4; \quad k=0, \dots, n), \end{aligned}$$

где $u_{vik}, u_{\theta ik}$ – амплитудные значения распределения перемещений в узлах конечных элементов;

$\varphi_i(\xi, \eta)$ – координатные функции конечного элемента;

$\varphi_k(\theta), \bar{\varphi}_k(\theta)$ – координатные функции в окружном направлении;

n – количество слагаемых ряда Фурье.

Связь между глобальными и местными координатами, переводящими элемент в единичный квадрат, осуществляется через те же координатные функции

$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 r_i \varphi_i(\xi, \eta), \quad z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 z_i \varphi_i(\xi, \eta), \quad (3)$$

где r_i, z_i – координаты узлов элемента;

$\varphi_i(\xi, \eta)$ – функции формы элемента:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi, \eta) &= (0,5-\xi)(0,5-\eta), \quad \varphi_2(\xi, \eta) = (0,5-\xi)(0,5+\eta), \\ \varphi_3(\xi, \eta) &= (0,5+\xi)(0,5-\eta), \quad \varphi_4(\xi, \eta) = (0,5+\xi)(0,5+\eta). \quad (4) \end{aligned}$$

Интегралы по плоскости конечного элемента вычисляются при помощи двухточечной квадратурной формулы Гаусса [3] в каждом направлении. Координатные функции в окружном направлении имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta) &= \bar{\varphi}_0(\theta) = 1, \\ \varphi_k(\theta) &= \begin{cases} \cos\left(\frac{k+1}{2} \cdot \theta\right), & k = 1, 3, 5, \dots \\ \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \theta\right), & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, \quad (5) \\ \bar{\varphi}_k(\theta) &= \begin{cases} \sin\left(\frac{k+1}{2} \cdot \theta\right), & k = 2, 4, 6, \dots \\ \cos\left(\frac{k}{2} \cdot \theta\right), & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}. \end{aligned}$$

Если конструкция имеет одну или более меридиональных плоскостей симметрии, то в радиальных и осевых компонентах решения учитываются только члены с косинусами, а в окружных компонентах – только синусы.

Связь между напряжениями и деформациями для трансверсального анизотропного тела выражается законом Гука в цилиндрической системе координат

$$\sigma^{ij} = A^{ijkm} \varepsilon_{km}. \quad (6)$$

Система дифференциальных уравнений метода конечных элементов для всей конструкции формируется из системы дифференциальных уравнений для конечных элементов путем суммирования соответствующих коэффициентов.

Система дифференциальных уравнений движения конструкции имеет вид

$$M\ddot{U} + B\dot{U} + CU = \bar{b}, \quad (7)$$

где M – матрица масс;

B – матрица демпфирования;

C – матрица жесткости;

$\bar{b}$ – вектор правых частей системы уравнений.

Матрица B является линейной комбинацией матриц масс и жесткостей.

Система дифференциальных уравнений конструкции интегрируется по времени с помощью метода Вильсона [4], который относится к методам прямого интегрирования уравнений (без дополнительных преобразований уравнений движения).

В случае, когда свойства материала не изменяются в окружном направлении, решение всей задачи приводит к решению ряда задач, соответствующих отдельным гармоникам, что значительно сокращает вычислительные затраты.

Программное обеспечение создано на языке C⁺⁺. Разработаны основные программные модули вычисления и графический интерфейс для представления геометрии модели с дискретизацией ее на конечные элементы и результатов расчета перемещений, скоростей, ускорений и напряжений во времени в отдельных точках конструкции. Предусмотрено представление в заданных меридиональных сечениях в указанные моменты времени изолиний компонент и эквивалентных напряжений, картины деформирования меридионального сечения в увеличенном масштабе перемещений, а также построение графиков изменения во времени характеристик напряженно-деформированного состояния, перемещений, скоростей и ускорений для отдельных заданных узлов и окружной координаты.

2. Пример расчета

С применением созданного методического обеспечения выполнены тестовые расчеты динамической реакции элемента конструкции (рис. 2) на импульсное воздействие. Нагружение конструкции моделируется четырьмя сосредоточенными импульсами F , направленными вдоль оси вращения и распределенными по окружности в виде полуволны синусоиды длительностью 100 мкс с амплитудой 1000 Н.

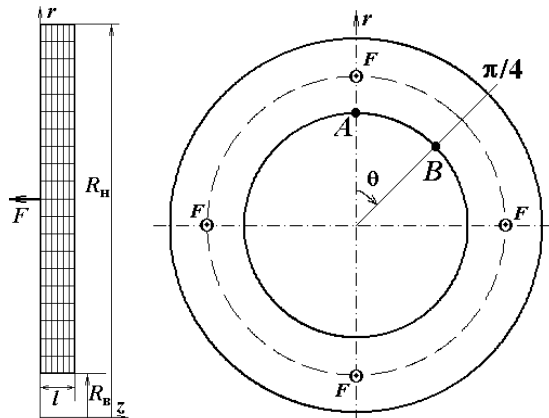


Рис. 2. Меридиональное ($\theta=0$) и поперечное ($z=0$) сечения элемента конструкции

Сходимость результатов оценивалась путем сгущения конечно-элементной сетки при разбиении меридионального сечения конструкции и удержания различного количества слагаемых ряда Фурье при разложении компонент решения в окружном направлении. Установлено, что для достижения приемлемой для практики точности достаточно разбить меридиональное сечение на 120 конечных элементов и ограничиться 31 гармоникой ряда Фурье с учетом симметрии для четверти окружности.

При уменьшении шага интегрирования по времени установлено, что перемещения практически сходятся, начиная с шага 10 мкс, а ускорения – с 2,5 мкс. Изменение по времени осевых перемещений и ускорений для контрольных точек в плоскости приложения силы (точка А) и в меридиональной плоскости, находящейся посередине между приложенными силами (точка В), показаны на рис. 3–4. Из результатов видно, что переходный процесс для перемещений и ускорений конструкции носит волновой характер.

Рассмотрено влияние длительности и величины амплитуды импульса силового воздействия на показатели перегрузки. При действии импульса наряду с высокочастотными возбуждаются и низкочастотные колебания. При длительности импульса 20 мкс с максимальным значением 5000 Н, амплитуды низ-

кочастотных перемещений возрастают в 2 раза и значительно увеличиваются амплитуды высокочастотных составляющих (рис. 5) по сравнению с предыдущим случаем. Время запаздывания возбуждения конструкции в окружном направлении остается прежним.

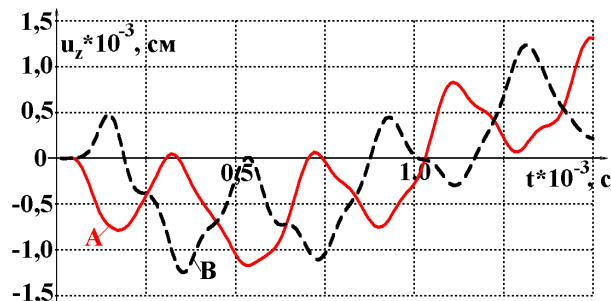


Рис. 3. Осевые перемещения точек в меридиональных плоскостях с координатами $\theta=0$ и $\theta=\pi/4$

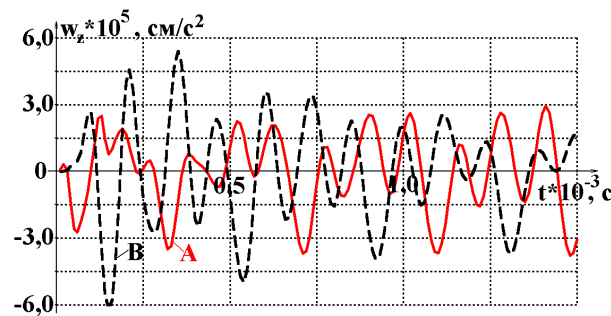


Рис. 4. Осевые ускорения точек в меридиональных плоскостях с координатами $\theta=0$ и $\theta=\pi/4$

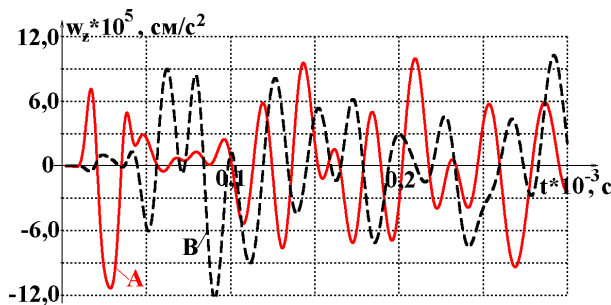


Рис. 5. Осевые ускорения точек А и В в случае более короткого импульса

Выводы

Создано методическое обеспечение для исследования переходных процессов в трехмерных осесимметричных конструкциях на основе полуаналитического метода конечных элементов. Проведенные расчеты на тестовом примере подтверждают устойчивость результатов, полученных с его помо-

щью, по отношению к количеству удерживаемых гармоник и шагу интегрирования. Время триангуляции матрицы системы разрешающих уравнений в расчетах по описанной методике примерно в 1000 раз меньше, чем при использовании классического МКЭ в трехмерной постановке.

Литература

1. Шульженко, Н. Г. Задачи термпрочности, вибродиагностики и ресурса энергоагрегатов (модели, методы, результаты исследований) [Текст] : моногр. / Н. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровский, Б. Ф. Зайцев. – Saarbrücken, Germany : LAP LAM-

BERT Academic Publishing GmbH & Co.KG, 2011. – 370 с.

2. Шульженко, Н. Г. Применение полуаналитического метода конечных элементов для решения трехмерных задач термомеханики в цилиндрических координатах [Текст] / Н. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровский, Т. В. Протасова // Динаміка і міцність машин : зб. наук. праць. Вісник Національного технічного університету "ХПІ". – Вып. 20. – Х., 2004. – С. 151–160.

3. Крылов, В. И. Справочная книга по численному интегрированию [Текст] / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, 1966. – 370 с.

4. Бате, К. Чисельні методи аналізу й метод кінцевих елементів [Текст] / К. Бате, Е. Вильсон. – М. : Стройиздат, 1982. – 448 с.

Поступила в редакцию 4.06.2014, рассмотрена на редколлегии 14.06.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр. К. В. Аврамов, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, Харьков.

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ТРИВИМІРНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОНСТРУКЦІЯХ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

М. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровський, Т. В. Протасова

Наводиться розрахункова методика оцінки перехідних процесів в конструкціях у вигляді тіл обертання за тривимірною моделлю. Вона базується на поєднанні методу скінченних елементів з представленням розв'язку в окружному напрямку рядами Фур'є. Меридіональний переріз конструкції розбивається на чотирикутні скінченні елементи. Зовнішнє навантаження може задаватися несиметричним чином. Застосування розроблених програмних модулів обчислень та графічного інтерфейсу для представлення результатів забезпечує економічність обчислень та можливість аналізу реальних конструкцій. Наводиться приклад розрахунку динамічної реакції елементу конструкції на імпульсну дію.

Ключові слова: перехідний процес, імпульсне навантаження, тривимірна осесиметрична конструкція, напіваналітичний метод скінченних елементів.

CALCULATION METHOD FOR TRANSIENT PROCESS IN 3D AXISYMMETRIC CONSTRUCTIONS UNDER IMPULSE LOADING

M. G. Shulzhenko, P. P. Gontarovskiy, T. V. Protasova

The calculation method for transient process in constructions in the form body of rotation by 3D model is presented. This method is based on combination of finite element method, where solution in circumferential direction obtained in form of finite Fourier series. The construction meridional section is divided into quadrilateral finite elements. The external loading can be defined asymmetrically. Software modules for computation and graphic interface increase calculation efficiency and makes possible analyse real structures. As an example dynamic response of element of construction under impulse loading is shown.

Key words: transient process, impulse loading, 3D axisymmetric construction, semianalytical finite element method

Шульженко Николай Григорьевич – д-р техн. наук, проф., зав. отделом вибрационных и термочностных исследований, институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина, e-mail: shulzh@ipmach.kharkov.ua.

Гонтаровский Павел Петрович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ст. науч. сотр. отдела вибрационных и термочностных исследований, институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина, e-mail: shulzh@ipmach.kharkov.ua.

Протасова Татьяна Владимировна – канд. техн. наук, мл. науч. сотр. отдела вибрационных и термочностных исследований, институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина, e-mail: tatyana.protasov@mail.ru.