

УДК 517.958:539.4: 629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. Б. МИНТЮК, Д. А. ТКАЧЕНКО, В. В. КОПЫЧКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина

ОБОБЩЁННАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С БИГАРМОНИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ГЛАВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В высоких приближениях дано решение, имеющее широкое приложение к задачам механики деформируемого твердого тела обобщенной задачи на собственные значения в прямоугольной области. Подчиненный оператор задачи содержит переменные коэффициенты. Предложена процедура, позволяющая упростить без потери точности структуру собственных функций. Получены с наперед заданной точностью решения восьми краевых задач, описывающих проблему устойчивости прямоугольных пластин при комбинированном нагружении, точные решения которых неизвестны по сей день. Анализ известной формулы взаимодействия при комбинированном нагружении позволил сделать вывод о ее бесполезности. На основании полученных в работе с высокой точностью параметров критической нагрузки при чистом сдвиге в зависимости от удлинения дано уточнение известной приближенной формулы, что позволило рекомендовать эту формулу как практически точную во всем диапазоне изменения параметра удлинения пластины.

Ключевые слова: *устойчивость, сходимость и точность процедур определения собственных значений и собственных функций; «оптимизация» структуры собственных функций; комбинированное нагружение; формула взаимодействия.*

Введение

Прямоугольные пластины (гладкие и подкрепленные стрингерами), выполненные как из традиционных, так и композиционных материалов, являются одними из основных силовых элементов конструкций аэрокосмической техники. Это, прежде всего, элементы несущих поверхностей, силового поля, механизации, перегородок и т.д. В составе тонкостенной пространственной системы (крыло, фюзеляж, оперение) они сложным образом взаимодействуют между собой и оболочечными элементами. Например, крыльевые панели силового многолонжеронного кессона, работая совместно с лонжеронами и нервюрами, образуют многозамкнутые системы. При этом они, участвуя в общем изгибе и кручении крыла, воспринимают и местные нагрузки. Кроме того, к ним могут быть приложены локальные нагрузки, которые они воспринимают и передают на соседние элементы с помощью промежуточных упругих звеньев («буферных» элементов).

За потерю устойчивости при раздельном или совместном действии сжатия и сдвига ответственность может лечь на любой тонкостенный агрегат или элемент конструкции. Что касается несущих поверхностей планера самолета, то устойчивость могут потерять не только сжатые панели, но и стенки лонжеронов, нервюр и т.д. Известен случай, когда при статических испытаниях самолета типа «Boeing» крыло сложилось («сплющилось») из-за

потери устойчивости нервюры, а при статических испытаниях самолета Ан-72 несущая способность была исчерпана при расчетной нагрузке в результате потери устойчивости стенки заднего лонжерона у корня. В истории авиации таких примеров много.

Сказанное выше следует понимать вот в каком смысле. Критическая нагрузка (или её параметры) является характеристикой всей конструкции, а не отдельного её элемента. Нельзя утверждать, что потеряла устойчивость сжатая панель, стенка лонжерона, нервюра и т.д. в отдельности, а остальные агрегаты или элементы не потеряли устойчивость. Можно (и нужно) только утверждать, что потеряла устойчивость вся конструкция. Но правомерен вопрос: «Какое из звеньев системы является самым слабым в её составе?», то есть необходимо выявить элемент-«провокатор», изначально ответственный за потерю устойчивости всей системы, с тем, чтобы исключить «эффект домино». Это можно сделать лишь тогда, когда систему рассматривают в полной совокупности всех её элементов.

Существующие подходы к исследованию устойчивости тонкостенных пространственных систем, включая и метод конечного элемента (МКЭ), такой возможностью не обладают. Кроме того, принятый по сей день в опытно-конструкторских бюро подход выделения отдельных элементов или блоков элементов (панели, лонжероны, нервюры, стенки и т.д.) в целях рассмотрения их устойчивости вне сис-

темы с искусственным наделянием их краев (на основании якобы правдоподобных рассуждений) идеальными опорами (свободное опирание, жесткое защемление, свободный край и т.д.) совершенно не приемлем. От этого подхода давно следовало бы отказаться. Идеальных опорных устройств не существует. Их идеализация при рассмотрении устойчивости тонкостенных пространственных систем чревата серьезными ошибками. Эти опоры всегда являются упругими. Таким образом, чтобы иметь возможность рассматривать систему поэлементно или поблочно, необходимо заранее выявить упругие свойства реальных опор. Это позволяет осуществить предложенный и успешно развиваемый в Национальном аэрокосмическом университете им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» метод идентификации краевых условий (МИКУ) [1-13]. Широко применяемый подход выделения из системы некоторой её по возможности большей части с дальнейшим привлечением к её анализу МКЭ также неприемлем по ранее отмеченной причине. При реализации МИКУ опирается на два основных метода анализа сложных систем. Это, прежде всего, метод расширения области до канонической (МРОК), который позволяет построить общие аналитические решения краевых задач механики деформируемого твердого тела в неканонических областях, если предварительно построено решение соответствующих краевых задач в известной канонической области, в которую можно «погрузить» заданную область [6, 7, 14, 15]. Второй основной метод для реализации МИКУ, применяемый совместно с МРОК, – это метод сопряжения конструктивных элементов (МСКЭ) [9]. В этом методе проводится декомпозиция на различных уровнях сложной системы не на конечные элементы, а на *конструктивные*. В зависимости от уровня декомпозиции в качестве конструктивных элементов могут выступать отсеки, панели, нервюры, лонжероны, шпангоуты, клетки обшивки пояса, стрингеры и т.д.

В задачах устойчивости тонкостенных пространственных систем существует настоятельная необходимость в разработке более точных и адекватных математических моделей и методов их оперативного анализа с наперед заданной точностью. Предпочтение при этом отдается аналитическим и аналитико-численным решениям, то есть решениям, алгоритмически замкнутым. Именно такого подхода придерживаются авторы. Предметом рассмотрения является актуальная, востребованная и по сей день нерешенная задача об устойчивости сугубо неоднородного исходного состояния при произвольном нагружении по границе прямоугольной пластины. В математическом плане – это обобщенная краевая задача в прямоугольной области на собственные значения и собственные функции. Основное назна-

чение искомым решений – это получение с заданной точностью как параметров критических нагрузок, так и форм потери устойчивости, а также, что важнее, приложение этих решений к задачам исследования устойчивости тонкостенных пространственных систем по МИКУ.

1. Постановка краевой задачи

С точки зрения механики деформируемого твердого тела к данной задаче сводится проблема устойчивости прямоугольных пластин при комбинированном нагружении. С математической точки зрения это обобщенная краевая задача на собственные значения

$$Aw = -\mu Bw \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{2}$$

где $A \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4}$;

$$B \equiv \bar{N}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \lambda \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

n – внешняя нормаль к границе Γ (в угловых точках проводятся две нормали);

$$\Omega = \{(x,y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\};$$

μ – искомое собственное значение.

В операторах A и B приняты такие обозначения: $\lambda = a/b$ – параметр удлинения пластины с размерами $2a$ и $2b$; \bar{N}_x , \bar{N}_{xy} , \bar{N}_y – безразмерные функции переменных (x,y) , определяющие исходное состояние прямоугольной пластины (нормальные усилия \bar{N}_x и \bar{N}_y положительны при сжатии, а касательные – согласованы уравнениями равновесия).

Удельные усилия N_x , N_y , N_{xy} пропорциональные мембранным напряжениям σ_x , σ_y , τ , связаны с безразмерными функциями следующим образом:

$$N_x = \bar{N}_x D/a^2, N_{xy} = \bar{N}_{xy} D/a^2, N_y = \bar{N}_y D/a^2, \tag{3}$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины.

Наименьшее собственное значение μ_1 характеризует запас устойчивости пластины: при $0 < \mu \leq \mu_1$ потери устойчивости не происходит, при $\mu > \mu_1$ пластина теряет устойчивость. В обоих случаях поле критических удельных усилий $N_x^{кр}$, $N_y^{кр}$, $N_{xy}^{кр}$ определяется по формулам

$$N_x^{кр} = \mu_1 N_x, N_y^{кр} = \mu_1 N_y, N_{xy}^{кр} = \mu_1 N_{xy}. \tag{4}$$

Об операторах A и $-B$ известно следующее:

– оператор A (с постоянными коэффициентами) при краевых условиях (2) является положительно определенным;

– оператор $-B$ – это симметричный оператор с

переменными коэффициентами, поэтому в общем случае он может быть как положительно, так и отрицательно определённым. Положительная определённость оператора A и симметричность оператора $-B$ полностью гарантирует симметрию задачи и действительность собственных значений;

– если среди собственных значений μ_n задачи (1)-(2) имеются отрицательные, что может встретиться при преобладании касательных усилий N_{xy} , то в качестве собственного значения μ_1 , определяющего первую критическую нагрузку, следует принять наименьшее по модулю собственное значение;

– если $N_x = N_y \equiv 0$ в Ω (чистый сдвиг), то каждому положительному значению μ_n соответствует и отрицательное $-\mu_n$, что физически ясно: потеря устойчивости при чистом сдвиге не зависит от направления приложенных усилий N_{xy} ;

– если погонные усилия N_x, N_y, N_{xy} таковы, что в каждой точке пластины главные усилия N_1, N_2 - сжимающие, то оператор $-B$ - положительно определённый и собственные значения краевой задачи (1) – (2) действительны, положительны и сгущаются на бесконечности, а система собственных функций $\psi_n(x, y)$ линейно независима, полна и ортогональна в энергетических пространствах H_A и H_B . Нормировать собственные функции можно в любом из этих пространств;

– если в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ оба главных усилия N_1 и N_2 сжимающие, то минимальное собственное значение краевой задачи (1) – (2) – положительно;

– если же хотя бы в одной точке области Ω оба главных усилия N_1, N_2 сжимающие, то среди собственных значений найдется минимальное положительное собственное значение, ответственное за потерю устойчивости пластины.

Переменными коэффициентами оператора B являются функции, которые должны быть известны во всей области Ω . Они служат решением плоской задачи теории упругости при тех или иных неоднородных краевых условиях. Чаще всего неоднородные краевые условия формулируются в напряжениях, и соответствующая краевая задача должна быть решена в терминах функции напряжений. Эта задача при произвольной системе напряжений, заданной на границе и отвечающей необходимым и достаточным условиям разрешимости и единственности, по сей день, к сожалению, не решена. Вариант её аналитическо-численного решения с наперед заданной точностью при определенных требованиях к гладкости краевых функций дан в работе [16]. Важным моментом этой работы является представление краевых функций в виде их равновесных и ряда самоуравновешенных составляющих. В настоящей работе такое

решение принято за базисное.

В работе [16] при построении исходного поля по заданным краевым нагрузкам было предложено два варианта решения. Первый из них приводит к приближенному аналитическому решению, основанному на замечательных свойствах предложенной ранее автором обсуждаемой работы системы функций, используемой в качестве координатной. Исследование точности и сходимости указанного приближенного аналитического решения было дано в ряде работ того же автора. Однако точка в данном вопросе была поставлена лишь в последующих работах [17–19]. Второй вариант предложенного в работе [16] решения, являющегося аналитическим, был основан на построении системы координатных функций, ортонормированной в энергетическом пространстве H_A оператора A^1 . Указанная в сноске программа «Омега-1» по требованиям настоящего времени является достаточно примитивной, поэтому возникла необходимость в разработке более современного программного обеспечения, отвечающего требованиям сегодняшнего дня. Результаты этой работы представлены в статье [20], в ней получены точные функции, параметры которых выражены в замкнутой форме в виде аналитических выражений (неправильные дроби, радикалы и т.п.). Последнее обстоятельство полностью сняло проблему неустойчивости процедуры ортогонализации Грама – Сонина – Шмидта.

Ортонормированная в энергетическом пространстве H_A положительно определенного оператора A система функций, принимаемая при решении краевых задач прямыми методами в качестве координатной, обеспечивает устойчивость как процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений, так и самих решений, а следовательно, и их сходимость. Однако даже такие системы функций не всегда обеспечивают сходимость к нулю невязки в исходном уравнении задачи. В работе [21] для обеспечения стремления к нулю указанной невязки в открытой области Ω приводится теорема, в которой утверждается, что для этого *достаточно* в качестве координатной принять систему собственных функций некоторого оператора A_1 , сходного к оператору A . Но бигармонический оператор A рассматриваемой здесь задачи сходен к самому себе, поэтому не существует более простого оператора A_1 , сходного к оператору A . Это значит, что для обеспечения стремления к нулю невязки необходимо иметь собственные функции самого оператора A . Такая система функций построена в работе [22].

¹ Соответствующее математическое обеспечение «Омега-1» было разработано на языке программирования «Алгол» в 1980 г. аспирантом А. Г. Дибиром, ныне канд. техн. наук, доцентом кафедры 102 Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ».

Подчеркнем еще раз, что условия отмеченной теоремы [21] являются лишь достаточными, но не необходимыми. Более того, как показано в работах [17-19], существуют системы функций, не являющиеся собственными функциями некоторого сходного оператора, но обеспечивающие сходимость к нулю указанной невязки. И все же, собственные функции оператора были построены в работе [22], невзирая на возникшие при этом трудности технического характера. В этой же работе собственные значения (а, следовательно, и собственные функции) получены с точностью, многократно превышающей точность, предъявляемую к точности инженерных расчетов. Более того, там же показано, что известные двусторонние оценки собственных значений, полученные А. Вайнштейном и Г. Фикера, могут быть значительно улучшены.

Сформулированную обобщенную краевую задачу на собственные значения (1) – (2) можно было бы решать с привлечением собственного спектра и собственных функций оператора А, однако эти собственные функции, будучи ортонормированными в H_A , не являются ортогональными в H_B , что может доставить определенные неудобства для проведения соответствующего вычислительного процесса.

В связи со сказанным представляет несомненный интерес непосредственное построение собственных функций краевой задачи (1) – (2). Это важно, невзирая на трудности получения такого решения, поскольку решение этой задачи сулит безусловные выгоды: определяется как весь спектр критических параметров, так и соответствующие формы потери устойчивости.

2. Решение краевой задачи

Решение поставленной краевой задачи, удовлетворяющее краевым условиям (2), ищется в виде

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N C_{ij} H_i(x) H_j(y), \quad (5)$$

где $H_i(x)H_j(y)$ – линейно независимая, полная и ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система координатных функций [23];

C_{ij} - подлежащие определению коэффициенты.

Подстановка (5) в исходное уравнение (1) после применения процедуры Бубнова – Галеркина приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений порядка $(M+1) \times (N+1)$, элементы матрицы которой содержат искомый параметр μ . Приравняв определитель системы к нулю, приходим к характеристическому уравнению относительно параметра μ . В зависимости от значений верхних пределов M и N можно получить n первых собственных значений $\mu_n(M, N)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Чем ближе

n к началу натурального ряда, тем точнее определяются собственные значения и соответствующие им собственные функции. Точность определения дальних собственных значений зависит от величин M и N . В зависимости от требуемой точности определения собственных значений верхние пределы M и N в сумме (5) подбираются программным путем. Данный вопрос точности решения краевой задачи будет обсужден ниже. Полученные собственные функции в дальнейшем нормируются в H_A .

Следует отметить, что среди членов суммы (5) существует ведущий $C_{ij}^* H_i^*(x) H_j^*(y)$. Это обстоятельство является следствием сильной минимальности и почти ортонормированности в $H_A(\Omega)$ предложенной координатной системы. Это означает, что любую собственную функцию $\psi_n(x, y)$ можно «оптимизировать» (упростить) в зависимости от заданной точности путем окаймления слева и справа ведущей функции.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Обратимся к случаю квадратной пластины, когда $\bar{N}_x = \bar{N}_{xy} = \bar{N}_y = 1$ (неблагоприятный случай). Для обеспечения точности в восьмом знаке первого собственного значения соответствующая собственная функция содержит 225 слагаемых в сумме (5). Выражение этой функции здесь не приведено, поскольку оно достаточно громоздкое. Однако, учитывая свойства исходной системы $H_i(x)H_j(y)$ [23], выражение искомой собственной функции можно упростить («оптимизировать») до нескольких слагаемых без практической потери точности. В обсуждаемом выражении содержится всего девять членов вместо 225 в полном выражении. Данное выражение и соответствующая форма потери устойчивости будут приведены в следующем пункте (случай 5).

Следует отметить, что для наименьшего положительного параметра критических нагрузок μ_1 подходы, основанные на вариационном принципе Лагранжа, с увеличением верхних пределов M и N в сумме (5) дают приближение к истинному собственному значению сверху. Проектировщика больше интересуют нижние оценки этого параметра. Для получения таких оценок нужна разработка специальных методов, так как встречный к принципу Лагранжа принцип Кастильяно к задачам подобного рода неприменим в силу их нелинейной природы.

Первая и, по-видимому, единственная попытка сформулировать задачу устойчивости в терминах функции напряжений (принцип Кастильяно) была предпринята в работе [1]. Надо сказать, что автор ограничился рассмотрением комбинированного, но однородного нагружения, поскольку только в этом случае подчиненный оператор –В является оператором с постоянными коэффициентами, и потому вхо-

дующие в него дифференциальные операторы коммутируют. Для получения уравнения устойчивости в терминах функции напряжений автор выполнил условия равновесия и одно из условий неразрывности деформаций путём введения функции деформаций (напряжений) изменения кривизн. Из второго оставшегося уравнения неразрывности деформаций автор получил уравнение устойчивости и сформулировал краевые условия в деформациях изменения кривизн, выраженные через функции деформаций. Благодаря этому удалось получить нижние оценки критических параметров в рассматриваемых случаях исходя из вариационного принципа «типа Кастильяно» (термин введен автором работы [1]).

В настоящей же работе сложные подходы А. Вайнштейна и Г. Фикера, а также подходы, основанные на приеме М. Г. Слободянского [24], теряют свою актуальность. Если собственные значения определены с высокой гарантированной точностью и известна процедура их уточнения, то появляется возможность конструктивного получения двусторонних оценок. Процедура получения таких оценок была обозначена в работе [22], относящейся к задачам колебаний упругих систем, и будет продемонстрирована далее применительно к задачам упругой устойчивости.

3. Некоторые численные результаты

3.1. «Оптимизация» выражений для собственных функций

Рассматривается восемь случаев нагружения пластины (исходные поля во всех случаях однородны). Каждый случай характеризуется отношением $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = k_1 : k_2 : k_3$.

Случай 1. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = 1 : 0 : 0$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,108909(H_0(x)H_0(y) - \\ & -0,0386387(H_0(x)H_2(y) + H_2(x)H_0(y)) - \\ & -0,00629442H_2(x)H_2(y) + \\ & +0,00114088(H_4(x)H_0(y) + H_0(x)H_4(y))). \end{aligned} \quad (6)$$

Случай 2. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = 0 : 0 : 1$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,0617651(H_0(x)H_0(y) - \\ & -0,421155H_1(x)H_1(y) + 0,0682874H_2(x)H_2(y) - \\ & -0,117282(H_2(x)H_0(y) + H_0(x)H_2(y)) + \\ & +0,0195468837(H_3(x)H_1(y) + H_1(x)H_3(y)) + \\ & +0,00820227(H_4(x)H_0(y) + H_0(x)H_4(y)) - \\ & -0,00423641H_3(x)H_3(y) - \\ & -0,00220370948(H_5(x)H_1(y) + H_1(x)H_5(y))). \end{aligned} \quad (7)$$

Случай 3. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = 1 : 1 : 0$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,108909(H_0(x)H_0(y) - \\ & -0,0386387(H_2(x)H_0(y) + H_0(x)H_2(y)) - \\ & -0,00629443H_2(x)H_2(y) + \\ & +0,00114088(H_4(x)H_0(y) + H_0(x)H_4(y))). \end{aligned} \quad (8)$$

Случай 4. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = 1 : 0 : 1$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,0849044(H_0(x)H_0(y) - \\ & -0,234557H_1(x)H_1(y) + 0,00807588H_4(x)H_0(y) - \\ & -0,0322953H_0(x)H_2(y) + 0,0147968H_2(x)H_2(y) - \\ & -0,114246H_2(x)H_0(y) + 0,0118827H_3(x)H_1(y) + \\ & +0,00231268H_0(x)H_4(y)). \end{aligned} \quad (9)$$

Случай 5. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = 1 : 1 : 1$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,0980071(H_0(x)H_0(y) - \\ & -0,153134H_1(x)H_1(y) + 0,00315387H_2(x)H_2(y) - \\ & -0,0504430(H_2(x)H_0(y) + H_0(x)H_2(y)) + \\ & +0,00266205(H_3(x)H_1(y) + H_1(x)H_3(y)) + \\ & +0,00232182(H_4(x)H_0(y) + H_0(x)H_4(y))). \end{aligned} \quad (10)$$

Случай 6. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = -1 : 0 : 1$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,0280615(H_0(x)H_1(y) - \\ & -0,559619H_1(x)H_2(y) + 0,00505744H_5(x)H_0(y) + \\ & +0,439113H_1(x)H_0(y) - 0,0131414H_3(x)H_4(y) - \\ & -0,220641H_0(x)H_3(y) - 0,0130757H_2(x)H_5(y) - \\ & -0,207469H_2(x)H_1(y) - 0,00869885H_1(x)H_6(y) + \\ & +0,131500H_2(x)H_3(y) - 0,00677696H_5(x)H_2(y) + \\ & +0,0778181H_1(x)H_4(y) + 0,0268506H_0(x)H_5(y) + \\ & +0,00409564H_4(x)H_1(y)). \end{aligned} \quad (11)$$

Случай 7. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = 1 : -1 : 1$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,044833(H_1(x)H_0(y) + \\ & +0,272462H_0(x)H_1(y) + 0,00449251H_1(x)H_4(y) - \\ & -0,229514H_2(x)H_1(y) + 0,00408277H_0(x)H_3(y)) - \\ & -0,151079H_3(x)H_0(y) + 0,0243174H_4(x)H_1(y) - \\ & -0,0195432H_1(x)H_2(y) + 0,0136747H_5(x)H_0(y) - \\ & -0,0119571H_2(x)H_3(y) + 0,0111724H_3(x)H_2(y). \end{aligned} \quad (12)$$

Случай 8. $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy} = 1 : -1 : 0$

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & 0,0448330(H_1(x)H_0(y) - \\ & -0,164316H_3(x)H_0(y) + 0,00713516H_1(x)H_4(y) + \\ & +0,0569734H_1(x)H_2(y) + 0,0149553H_5(x)H_0(y) - \\ & -0,0132433H_3(x)H_2(y) - 0,00275317H_3(x)H_4(y)). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку функции $H_i(x)H_j(y)$ [23] ограничены в совокупности (независимо от значений i и j), то, как видно из приведенных выше формул, по-

следние слагаемые дают поправку к значениям собственных функций порядка тысячных по отношению к единице. Этого вполне достаточно, чтобы многократно перекрыть предъявляемую инженерную точность. Так как критические параметры являются спектральными, то точность их определения всегда выше точности построенной собственной функции. Исходя из этого приведенные выше собственные функции могут быть еще более упрощены. Можно сделать еще один вывод: ведущие функции в приведенных равенствах весьма близки к собственным. Этот вывод с помощью иных подходов был подтвержден в работах [18-20, 22].

Собственные формы для всех случаев показаны на рис. 1, где на каждом фрагменте в верхнем правом углу цифры соответствуют номеру рассматриваемого случая.

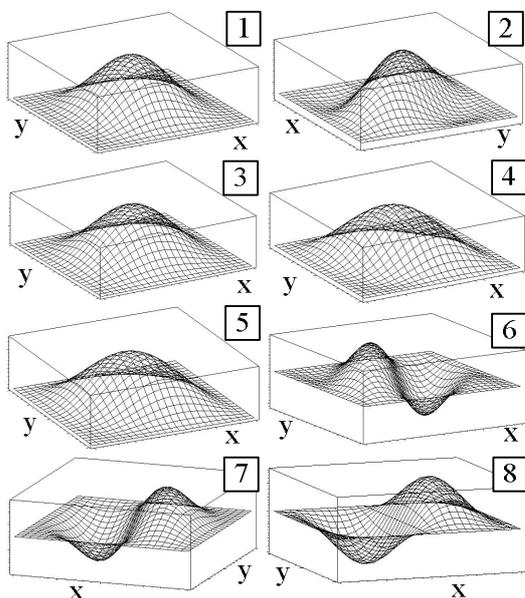


Рис. 1. Собственные формы потери устойчивости

3.2. Устойчивость, сходимость и точность решения краевой задачи

Рассматриваемые здесь вопросы взаимосвязаны, поскольку при устойчивой процедуре получения всё уточняющихся решений автоматически обеспечена сходимость решения к точному, а, следовательно, появляется возможность получить критериальные оценки искомых параметров *конструктивно*. Иными словами, если при построении собственных функций наращиваются верхние пределы в сумме (5) и при этом происходит стабилизация значений коэффициентов C_{ij} , следствием чего является стабилизация и собственных значений до определённого знака в мантиссе, а дальнейшее увеличение верхних пределов M и N приводит лишь к изменению в последующих знаках мантиссы коэффициен-

тов C_{ij} (и μ_n) и никак не влияет на уже установившиеся знаки, то это значит, что благодаря устойчивости и сходимости достигнута с гарантией заданная точность.

Обсуждаемые ниже данные настоящей работы сопоставляются с результатами, полученными по МКЭ. Индустриальный в настоящее время в механике деформируемого твердого тела МКЭ имеет много позитивного. Однако он привнес в процесс развития численных методов анализа некоторые негативные моменты.

Неустойчивость вычислительных процедур, медленная сходимость искомого решения, неоднозначность выбора типа конечного элемента (π -проблема) и степени дискретизации (n -проблема) для конкретно рассматриваемой задачи, нарушение условий совместности на межэлементных границах перемещений (и, тем более, деформаций) в варианте МКЭ в форме метода перемещений, неадекватность типа конечного элемента математической модели реального объекта и т.д. в конечном итоге приводят к неправдоподобным результатам. Часть таких вопросов рассматривается ниже на примере простейших моделей в проблеме устойчивости. Именно в этих задачах недостатки МКЭ высвечиваются наиболее ярко, что подтверждается не только нашими исследованиями, но и исследованиями многих других авторов. Сказанное следует принимать убежденным приверженцам МКЭ как некоторое предостережение.

Если в период становления МКЭ шло его интенсивное развитие как вширь, так и вглубь, то в настоящее время наблюдается развитие вширь, а развитие вглубь затормозилось, особенно после выхода в свет работ известных (прежде всего французских) математиков [25-27]. Имеет ли место кризис МКЭ – трудно сказать, но он, по нашему мнению, уже наметился.

Выпячиваемые на заре создания МКЭ как несомненные достоинства такие моменты, как симметричность и разреженность матрицы систем алгебраических уравнений (СЛАУ), возможность учета криволинейности границы области, потеряли свою актуальность, поскольку симметрия матрицы СЛАУ является прямым следствием фундаментальной теоремы Э. Бетги о взаимности работ (принцип симметрии в теории упругости и во всех его прикладных направлениях). Разреженная система СЛАУ также не является прерогативой МКЭ, существуют и другие методы, которые приводят не только к разреженным, но и к диагональным матрицам (см., например, [17-20, 22]). Что же касается учета криволинейности границ, то по МКЭ можно получить совершенно недостоверные результаты в том смысле, что МКЭ априори не может дать сходи-

мость ожидаемого решения к точному (известный парадокс Бабушки – Витасека в задачах изгиба жестких пластин), а введение изопараметрических элементов проблему не разрешает.

Криволинейность границы совсем нетрудно учесть, если воспользоваться методом расширения области до канонической, развиваемым и широко применяемым авторским коллективом этой работы.

Из указанных в пункте 3.1 восьми случаев остановимся на обсуждении двух наиболее важных: чистого сдвига и одноосного сжатия. Результаты, полученные при рассмотрении остальных случаев, абсолютно аналогичны. Следует повторить еще раз, что во всех восьми случаях, приведенных на рис. 1, точные решения не получены.

Таблицы 1 и 2 дают наглядное представление об устойчивости, сходимости и точности вычисления спектрального параметра в зависимости от числа вводимых собственных функций (подход данной работы) для двух краевых задач: задача чистого сдвига ($\bar{N}_x = \bar{N}_y = 0, \bar{N}_{xy} = 1$) и задача одноосного сжатия ($\bar{N}_x = 1, \bar{N}_y = \bar{N}_{xy} = 0$) соответственно при удлинениях пластины $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$. В обеих таблицах в колонках «М» и «N» указаны значения верхних пределов в сумме (5). При этом число неизвестных, вводимых в решение краевой задачи (1) - (2) в случае чистого сдвига (табл. 1), равно $(M+1) \times (N+1)$, во втором случае (табл. 2) это значение намного меньше, чем $(M+1) \times (N+1)$. В колонке «К» указано число неизвестных, которые были удержаны при решении поставленной задачи по МКЭ. В колонках « $\bar{\mu}$ » и « $\bar{\mu}_{МКЭ}$ » представлены значения безразмерных величин критических параметров устойчивости, которые связаны с размерными величинами следующей формулой:

$$\bar{\mu} = \frac{(2a)^2 \mu N_i}{\lambda^2 \pi^2 D}, \quad i = \{x; y; xy\}. \quad (14)$$

Данные по МКЭ получены с использованием простейшего прямоугольного конечного элемента с шестью степенями свободы во внутренних узлах.

При обсуждении данных табл. 1 и 2 важно выделить следующие моменты:

– подход авторов во всех задачах устойчивости даёт монотонную сходимость сверху к искомому спектральному параметру. В задаче устойчивости при чистом сдвиге МКЭ тоже дает монотонную сходимость, что не наблюдается в задаче об одноосном сжатии, – этой монотонности нет;

– точность результатов в нашем подходе гарантирована: в таблицах верны все значащие цифры, выделенные жирным шрифтом, что намного превосходит точность, доставляемую МКЭ;

Таблица 1

Параметр критической нагрузки защемленной пластины при чистом сдвиге

λ	M	N	$\bar{\mu}$	K	$\bar{\mu}_{МКЭ}$
1	2	2	14,822245666	639	16,05735849
	4	4	14,651940157	2479	14,86051392
	6	6	14,642206751	5519	14,71371314
	8	8	14,642050119	9759	14,67520947
	10	10	14,642018711	15199	14,66069315
	12	12	14,642012409	21839	14,65396607
	14	14	14,642011041	29679	14,65024847
	16	16	14,642010728	38719	14,64805775
2	5	2	10,334013196	1259	10,94145982
	9	4	10,250209339	4919	10,36124933
	13	6	10,248003536	10979	10,28933156
	17	8	10,247986326	19439	10,26906181
	21	10	10,247986326	30299	10,26074147
	25	12	10,247983847	43559	10,25658131
	29	14	10,247983774	59219	10,25427994
	33	16	10,247983760	77279	10,25262030
37	18	10,247983757	97739	10,25149174	

Таблица 2

Параметр критической нагрузки защемленной пластины при одноосном сжатии

λ	M	N	$\bar{\mu}$	K	$\bar{\mu}_{МКЭ}$
1	2	2	10,10714093	639	10,256315764
	4	4	10,07428345	2479	10,086965997
	6	6	10,07394992	5519	10,074175697
	8	8	10,07394808	9759	10,072693085
	10	10	10,07394806	15199	10,072670956
	12	12	10,07394803	21839	10,072892242
	14	14	10,07394801	29679	10,073113527
	16	16	10,07394800	38719	10,073224170
2	8	2	7,91932209	1259	7,9045159694
	14	4	7,86711490	4919	7,8468932343
	20	6	7,86707271	10979	7,8532883842
	26	8	7,86707182	19439	7,8581345359
	32	10	7,86707179	30299	7,8609669899
	38	12	7,86707179	43559	7,8626930165
	44	14	7,86707179	59219	7,8637773153
	50	16	7,86707179	77279	7,8645075573
56	18	7,86707179	97739	7,8651050281	

– разница между необходимым числом неизвестных в нашем подходе и МКЭ велика: в МКЭ даже для достижения меньшей точности число неизвестных превосходит в сотни и тысячи раз число неизвестных, требуемых в подходе данной работы. Если это имеет место при решении простейших задач устойчивости для одного-единственного конструктивного элемента, то совершенно очевидно, что

при рассмотрении тонкостенных пространственных систем, состоящих из сотен и тысяч таких элементов, ресурсы современной вычислительной техники могут оказаться недостаточными.

Далее приводятся результаты решения краевых задач в восьми случаях, указанных на рис. 1 (табл. 3), при различных значениях параметра удлинения пластины.

Таблица 3

Параметр критической нагрузки защемленной пластины при комбинированном однородном нагружении

$\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy}$	λ	M	N	$\bar{\mu}$
1:0:1	1	14	14	7,2562950
	2	29	14	5,5752673
	3	44	14	5,1870421
	4	59	14	5,0613598
0:0:1	1	16	16	14,6420107
	2	25	12	10,2479838
	3	44	14	9,5343138
	4	59	14	9,2951611
1:0:0	1	8	8	10,0739481
	2	21	10	7,8670718
	3	26	8	7,3593455
	4	35	8	7,2078708
1:1:0	1	10	10	5,3036261
	2	17	8	3,9234381
	3	26	8	3,8605152
	4	35	8	3,8260957
1:1:1	1	14	14	4,6445888
	2	25	12	3,4898591
	3	38	12	3,3049325
	4	51	12	3,2392272
1:-1:0	1	12	12	14,965576
	2	21	10	11,9626751
	3	32	10	11,3186002
	4	44	11	11,0819992
1:-1:1	1	14	14	11,0453863
	2	29	14	8,2145864
	3	44	14	7,6987365
	4	59	14	7,5280825
-1:0:1	1	18	18	36,4072709
	2	33	16	19,8595305
	3	50	16	17,8361975
	4	67	16	17,1943394

В приводимых результатах табл. 3 верны все значащие цифры, что позволяет с уверенностью принять их в качестве критериальных, а каждый исследователь, занимающийся подобными вопросами, может использовать их по своему усмотрению.

Более подробные сведения как количественно, так и качественного характера для двух случаев нагружения: двустороннее сжатие и одностороннее сжатие со сдвигом можно почерпнуть из рис. 2 и 3

соответственно. Данные графики представляют зависимости параметра критической нагрузки $\bar{\mu}$ как функции удлинения пластины λ , так и соотношения действующих нагрузок γ ($\gamma = \bar{N}_y / \bar{N}_x$ – рис. 2, $\gamma = \bar{N}_{xy} / \bar{N}_x$ – рис. 3).

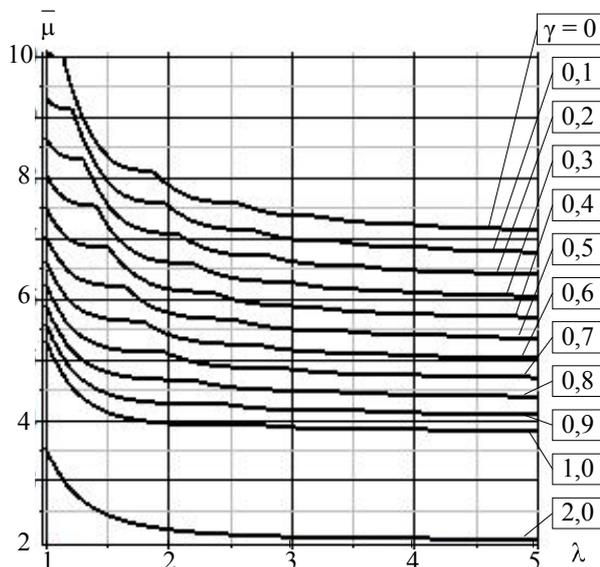


Рис. 2. Параметр критической нагрузки при двустороннем сжатии

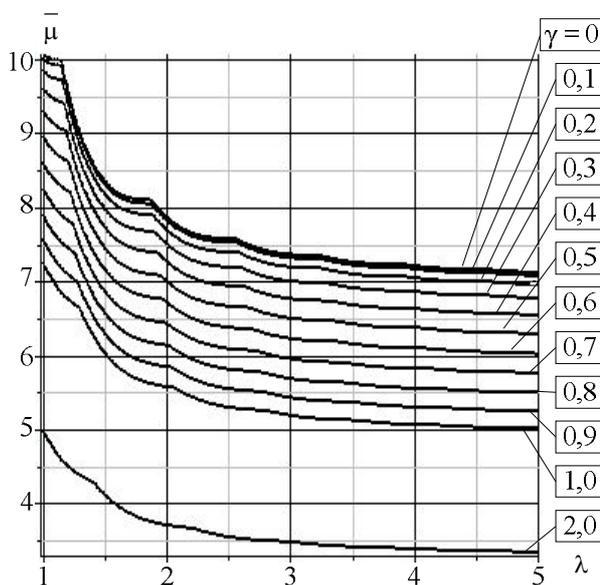


Рис. 3. Параметр критической нагрузки при совместном действии сжатия и сдвига

3.3. Уточнение некоторых известных зависимостей

Первое уточнение касается формулы взаимодействия, имеющей место при совместном действии нормальных и касательных усилий

$$\frac{\bar{N}_x^{кр}}{\bar{N}_{x0}^{кр}} + \left(\frac{\bar{N}_{xy}^{кр}}{\bar{N}_{xy0}^{кр}} \right)^\alpha \leq 1, \quad (15)$$

где нормальные усилия считаются положительными, если они – сжимающие, в противном случае при соответствующем члене должен стоять знак минус; $\bar{N}_x^{кр}$, $\bar{N}_{xy}^{кр}$ – критические усилия при их совместном действии; а в знаменателях усилия $\bar{N}_{x0}^{кр}$, $\bar{N}_{xy0}^{кр}$, обозначенные с нулём, – те же критические усилия, но при раздельном действии. Происхождение термина «формула взаимодействия» неизвестно, её также можно назвать критерием потери устойчивости, здесь используется общепринятый термин – «формула взаимодействия». Показатель степени α может изменяться в достаточно широких пределах (от 1,7 до 2,2). Общепринято полагать $\alpha = 2$ [28]. Так ли это? Ответ на этот вопрос мы сейчас получим.

Рассматриваемый случай одностороннего сжатия со сдвигом (15) наиболее важен для конструкций силового кессона многолонжеронного крыла. В табл. 4 представлены результаты определения параметра α , содержащегося в формуле (15). При вычислении критических усилий верхние пределы M и N в сумме (5) определялись программным путем в целях достижения точности всех цифр в мантиссе приводимых ниже чисел.

Таблица 4

К формуле взаимодействия

λ	0,5	1	1,25	1,5
α	1,814818	2,098262	1,991639	1,893307
λ	1,75	2	2,25	2,5
α	2,026062	2,010213	1,935794	2,018158
λ	2,75	3	4	5
α	2,004461	1,992782	2,008797	2,007443

Да, действительно, в данном случае коэффициент α в двучленной формуле очень близок к числу два.

При одновременном действии двустороннего сжатия (растяжения) и сдвига ряд авторов предлагает писать формулу взаимодействия в виде

$$\frac{\bar{N}_x^{кр}}{\bar{N}_{x0}^{кр}} + \frac{\bar{N}_y^{кр}}{\bar{N}_{y0}^{кр}} + \left(\frac{\bar{N}_{xy}^{кр}}{\bar{N}_{xy0}^{кр}} \right)^\alpha \leq 1, \quad (16)$$

где принимают $\alpha = 2$. Если какое-то из усилий \bar{N}_x или \bar{N}_y является растягивающим, то перед соответствующим слагаемым следует писать знак «-». Формулу (16) необходимо считать несостоятельной, что очевидно. Поскольку показатель степени α мало отличается от двойки, то формулу (16) можно переписать так:

$$\left(\frac{\bar{N}_{xy}^{кр}}{\bar{N}_{xy0}^{кр}} \right)^2 \leq 1 - \frac{\bar{N}_x^{кр}}{\bar{N}_{x0}^{кр}} - \frac{\bar{N}_y^{кр}}{\bar{N}_{y0}^{кр}}. \quad (17)$$

Из этой формулы, полагая известной правую часть и критическую нагрузку $\bar{N}_{xy0}^{кр}$, можно было бы определить соответствующую сдвиговую критическую нагрузку $\bar{N}_{xy}^{кр}$. Это возможно при условии неотрицательности правой части неравенства (17), что, как правило, не выполняется. Иными словами, неравенство (17) можно рассматривать лишь как посыл и никак иначе.

Данное обстоятельство имеет место и в теории оболочек при совместном действии сжатия, внешнего давления и кручения. Различные формулы взаимодействия в этом случае, предложенные разными авторами, имеют отмеченный выше недостаток [29, равенства (5.1), (5.2), (5.3) на с. 190].

Завершая рассмотрение различных формул взаимодействия, следует отметить их совершенную бесполезность.

Второе уточнение связано с задачей потери устойчивости при чистом сдвиге жестко защемленной по всему контуру прямоугольной пластины. В работе [28, формула (9.170) на с. 349] приведена формула определения параметра $\bar{\mu}_B$ критического касательного усилия

$$\bar{\mu}_B = 8,98 + 5,6\lambda^{-2}. \quad (18)$$

Располагая высокоточными значениями $\bar{\mu}$, полученными в данной работе, формулу (18) можно уточнить, добавив к её правой части некоторую функцию $f(\lambda)$, полученную по интерполяционной формуле Лагранжа по десяти узлам ($\lambda = 1, 2, \dots, 10$):

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & -1,562061207 \cdot 10^{-6} (\lambda - 1,089400712) \times \\ & \times (\lambda - 9,498538170) (\lambda - 9,868010742) \times \\ & \times (\lambda^2 - 5,586814131\lambda + 10,80428424) \times \\ & \times (\lambda^2 - 10,41548899\lambda + 28,92187337) \times \\ & \times (\lambda^2 - 15,74529261\lambda + 63,32633902), 1 \leq \lambda \leq 10; \\ f(\lambda) = & 0, \quad \lambda > 10. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция $f(\lambda)$ интерполирует разницу между нашими данными и результатами, вычисленными по формуле (18).

В результате формула (18) уточняется следующим образом:

$$\bar{\mu} = 8,98 + 5,6\lambda^{-2} + f(\lambda). \quad (20)$$

Как оказалось, уточнение приближенной формулы (18) незначительно, о чем свидетельствуют данные табл. 5. Выбор значений M и N производился программным путем автоматически с целью дос-

тижения точности во всех значащих цифрах чисел, приведенных в колонке « $\bar{\mu}$ », что символически отмечено жирным шрифтом.

Таблица 5
Уточнение приближенной формулы для параметра критической нагрузки при чистом сдвиге

λ	M	N	$\bar{\mu}$	$\bar{\mu}_B$	$f(\lambda)$	$\varepsilon, \%$
1	17	17	14,6420107	14,58	0,0620107	0,424
2	26	13	10,2479838	10,38	-0,1320162	1,288
3	45	15	9,5343138	9,60	-0,0679084	0,712
4	44	11	9,2951611	9,33	-0,0348389	0,375
5	55	11	9,18535774	9,20	-0,0186423	0,203
6	66	11	9,11929474	9,14	-0,0162608	0,178
7	77	11	9,07980060	9,09	-0,0144851	0,160
8	88	11	9,05557699	9,07	-0,0119230	0,132
9	99	11	9,03970148	9,05	-0,0094343	0,104
10	110	11	9,02858644	9,04	-0,0074136	0,082

Максимальная погрешность получается для сравнительно коротких пластин $\lambda \leq 4$. Как видно, с увеличением λ погрешность формулы (18) уменьшается, и при $\lambda \rightarrow \infty$ (чистый сдвиг полосы) формула (18) превращается в точную.

Формула, аналогичная формуле (18), в случае свободного опирания пластины [28, формула (9.139) на с. 349], была получена Р. В. Саусвеллом и С. У. Скэнном [28, сноска на с. 345]. Следует подчеркнуть несомненный талант исследователей начала прошлого века, которым в отсутствие вычислительных средств удалось, зная лишь точное значение функции при $\lambda = \infty$, подобрать вид уточняющей функции ($1/\lambda^2$) при произвольном λ и определить один-единственный параметр (в формуле (18) коэффициент равен 5,6). Таким образом, формулу (18) и подобные ей следует считать гениальными, точность такой формулы отражена в табл. 5.

На этой мажорной ноте можно завершить исследования в этом направлении.

Заключение

1. С высокой точностью решена двумерная обобщенная задача на собственные значения, когда подчиненный оператор задачи имеет переменные коэффициенты.

2. Элементы матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений, к решению которой редуцировано решение исходной задачи, вычислены точно в виде дробей, радикалов и т.п., что позволило получить характеристическое уравнение с заданной гарантированной точностью.

3. Замечательные свойства ранее предложенных и использованных здесь координатных функций позволили выделить среди слагаемых собствен-

ных функций ведущий элемент, окаймление которого слева и справа дало возможность упростить («оптимизировать») структуру собственных функций без заметного ущерба точности.

4. Конструктивно подтверждена устойчивость, сходимая и точность процедур получения иско- мых решений.

5. В качестве приложения к задачам механики даны решения восьми краевых задач, описывающих устойчивость прямоугольных пластин при различном нагружении границы. Точные решения этих задач не получены по сей день. Параметры критических нагрузок здесь получены с точностью до восьми-десяти значащих цифр, что в десятки и сотни тысяч раз превышает точность, предъявляемую к инженерным расчетам.

6. Известные формулы взаимодействия при комбинированном нагружении пластины, а также приближенная формула для параметра критической нагрузки при чистом сдвиге в зависимости от удлинения пластины получили свое уточнение.

Литература

1. Халилов, С. А. Проблема исследования устойчивости несущей конструкции большегрузных самолетов [Текст] / С. А. Халилов // *Авиационно-космическая техника и технология* : сб. науч. тр. Харьковского авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – X., 1994. – С. 358 – 369.
2. Халилов, С. А. Развитие альтернативного подхода к решению проблемы устойчивости силовых элементов конструкции самолета [Текст] / С. А. Халилов // *Авиационно-космическая техника и технология* : сб. науч. тр. Харьковского авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – X., 1995. – С. 223 – 227.
3. Халилов, С. А. Метод идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости. Идея метода [Текст] / С. А. Халилов // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2003. – № 36/1. – С. 15 - 21.
4. Кривцов, В. С. Исследование устойчивости силового кессона крыла методом идентификации краевых условий [Текст] / В. С. Кривцов, С. А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2005. – № 7 (23). – С. 151 - 161.
5. Кривцов, В. С. Устойчивость силового кессона крыла. Численный анализ на основе метода идентификации краевых условий [Текст] / В. С. Кривцов, С. А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2007. – № 3 (39). – С. 5 – 26.
6. Минтюк, В. Б. Устойчивость подкрепленной в области и на криволинейной границе пластины как элемента тонкостенной пространственной системы [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 ; защищена 18.12.2004 ; утв. 9.03.2005 / Минтюк Виталий Борисович. – X., 2004. – 147 с.

7. Кравченко, С. Г. Устойчивость пространственных тонкостенных пластинчатых систем [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 ; защита 24.09.2010 ; утв. 13.12.2010 / Кравченко Сергей Григорьевич. – Х., 2010. – 160 с.

8. Теоретические основы математического моделирования устойчивости несущих конструкций авиакосмической техники [Текст] : отчет о НИР (заключ.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Гайдачук В. Е., Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – Х., 2002. – 140 с. – № ГР 0100U003434. – Инв. № 0203U008196.

9. Теоретические основы метода идентификации краевых условий для исследования упругой устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники [Текст] : отчет о НИР (заключ.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Гайдачук В. Е., Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – Х., 2005. – 173 с. – № ГР 0103U005070. – Инв. № 0206U002451.

10. Теория и численная реализация метода идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости и колебаний [Текст] : отчет о НИР (заключ.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Гайдачук В. Е., Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – Х., 2008. – 217 с. – № ГР 0106U001061. – Инв. № 0209U005481.

11. Новые математические методы исследования полей, состояний и процессов механики сплошных сред для развития современных аэрокосмических технологий. Т. 2. Метод идентификации краевых условий [Текст] : отчет о НИР (заключ.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Николаев А. Г., Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – Х., 2011. – 184 с. – № ГР 0109U0013194. – Инв. № 0712U001251.

12. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Т. 2. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (промеж.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Николаев А. Г., Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – Х., 2012. – 94 с. – № ГР 0112U002135. – Инв. № 0712U001251.

13. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Т. 2. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (промеж.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Николаев А. Г., Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – Х., 2013. – 142 с. – № ГР 0112U002135. – Инв. № 0214U006196.

14. Халилов, С. А. Приближенное замкнутое решение плоской задачи теории упругости в трапециевидной области [Текст] / С. А. Халилов,

М. А. Яровой // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2004. – № 2 (10). – С. 33 - 38.

15. Халилов, С. А. Построение приближенного аналитического решения плоской задачи теории упругости в трапециевидной области [Текст] / С. А. Халилов, С. Г. Кравченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2009. – № 1 (58). – С. 16 - 23.

16. Халилов, С. А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях [Текст] / С. А. Халилов // *Вопросы проектирования самолетных конструкций : темат. сб. науч. тр. Харьковско-го авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского*. – Вып. 3. – Х., 1982. – С. 120 - 127.

17. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко закреплённой прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. – Вып. 49. – Х., 2011. – С. 81 - 94.

18. Халилов, С. А. Построение и исследование приближённого аналитического решения бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 2 (99). – С. 40 - 49.

19. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 - 49.

20. Ткаченко, Д. А. Ортонормированный в энергетическом пространстве бигармонического оператора базис в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях по границе [Текст] / Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – № 3 (110). – С. 41 - 51.

21. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.

22. Собственный спектр бигармонического оператора в прямоугольнике при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – № 5 (112). – С. 70-78.

23. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // *Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьковско-го авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского*. – Вып. 5. – Х., 1978. – С. 46 - 56.

24. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. - М. : Гостехиздат, 1957. - 478 с.

25. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред [Текст] / Дж. Оден. - М. : Мир, 1976. - 464 с.

26. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач [Текст] / Ж.-П. Обэн. - М. : Мир, 1977. - 383 с.

27. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач [Текст] / Ф. Сьярле. - М. : Мир, 1980. - 512 с.

28. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. - М. : Наука, 1967. - 984 с.

29. Григолюк, Э. И. Устойчивость оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. - М. : Наука, 1978. - 360 с.

Поступила в редакцию 25.09.2014, рассмотрена на редколлегии 19.11.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики В. С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ В ПРЯМОКУТНИКУ З БІГАРМОНІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ГОЛОВНИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ

С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко

У високих наближеннях наведено розв'язання узагальненої задачі на власні значення в прямокутній області, яка має широке застосування до задач механіки деформівного твердого тіла. Підпорядкований оператор задачі містить змінні коефіцієнти. Запропоновано процедуру, що дозволяє спростити без втрати точності структуру власних функцій. Отримано з наперед заданою точністю розв'язки восьми крайових задач, що описують проблему стійкості прямокутних пластин при комбінованому навантаженні, точні розв'язки яких не відомі дотепер. Аналіз відомої формули взаємодії при комбінованому навантаженні дозволив зробити висновок про її непотрібність. На підставі отриманих у роботі з високою точністю параметрів критичного навантаження при чистому зсуві залежно від подовження дано уточнення відомої наближеної формули, що дозволило рекомендувати цю формулу як практично точну на всьому діапазоні зміни параметра подовження пластини.

Ключові слова: стійкість, збіжність і точність процедур визначення власних значень і власних функцій; «оптимізація» структури власних функцій; комбіноване навантаження; формула взаємодії.

THE GENERALIZED EIGENVALUE PROBLEM IN A RECTANGLE WITH THE BIHARMONIC OPERATOR BY THE MAIN BOUNDARY CONDITIONS

S. A. Khalilov, V. B. Myntyuk, D. A. Tkachenko, V. V. Kopychko

The generalized eigenvalue problem in a rectangular domain solution, which is of wide application to of solid mechanics problems, is given with high approximations. The subordinate operator of the problem contains variable coefficients. A procedure that allows to simplify the eigenfunctions structure without loss of accuracy is suggested. The solutions of eight boundary value problems describing the problem of the rectangular plate's stability under combined loading, whose exact solutions are not known to this day, are obtained with prescribed accuracy. The analysis of the well-known interaction formula with the combined loading led to the conclusion of its uselessness. The known approximate formula specification is given, depending on the extension, on the basis of the critical load by pure shear parameters obtained in the work with high precision that allowed to recommend this formula as an almost exact over the entire range of the extension plate parameter.

Keywords: stability, convergence and accuracy of the procedures for determining the eigenvalues and eigenfunctions; «optimization» of the eigenfunctions structure; combined loading; interaction formula.

Халілов Сиявуш Ахмедович – старший научный сотрудник научного отдела кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.

Ткаченко Денис Анатольевич – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: 20Black_and_White07@ukr.net.

Копычко Виктор Владимирович – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: viktor_kopychko@mail.ru.