

УДК 539.4:517.958:629.7.02

Д. А. ТКАЧЕНКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ
БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА БАЗИС В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ
ПРИ ОДНОРОДНЫХ ГЛАВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПО ГРАНИЦЕ**

Построены ортонормированные в энергетическом пространстве бигармонического оператора базисы в прямоугольнике для трёх различных исходных координатных систем при однородных главных краевых условиях. Для элементов базиса при значительном их числе получены замкнутые выражения с абсолютно точными параметрами. Исследована погрешность, возникающая при сквозном счете ввиду неустойчивости процедуры ортогонализации. Показано, что наилучшими свойствами с точки зрения устойчивости процедуры ортогонализации и точности полученных результатов обладает один из трёх рассмотренных базисов, который почти ортогонален в исходном пространстве. Численные результаты представлены в таблицах и графиках.

Ключевые слова: ортонормированный базис, энергетическое пространство, бигармонический оператор, краевая задача.

Введение

Несущая конструкция любого летательного аппарата является тонкостенной пространственной системой, состоящей из тонких оболочек, пластин и разнообразных подкрепляющих рёбер жёсткости. Существующая проблема обеспечения необходимой прочности несущей конструкции при минимальной массе может быть решена только на компромиссной основе. Для достижения этого компромисса требуется привлечение высокоточных математических моделей с последующим их анализом современными методами, позволяющими получить результат с любой наперёд заданной точностью.

Предложенный и развиваемый в Национальном аэрокосмическом университете им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» метод идентификации краевых условий (МИКУ) как раз и призван обеспечить доскональное исследование работы любого силового элемента конструкции в составе сложной разветвлённой тонкостенной пространственной системы. На одном из этапов реализации метода требуется построение в двумерных канонических и неканонических областях аналитических и аналитико-численных решений краевых задач теории оболочек и пластин. Метод сопряжения конструктивных элементов (МСКЭ), являющийся составной частью МИКУ, позволяет адекватно и с заданной точностью выполнить сложные условия упругого взаимодействия подсистем и элементов сложной системы. Целью данной работы как раз и является построение аналитического ре-

шения для фрагментов в виде прямоугольной пластины сложной тонкостенной пространственной системы. Сказанным определяется не только актуальность работы, но и её практическая ценность и научная значимость.

Следует отметить, что МИКУ является методом, который можно отнести к направлению, получившему название «Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела» (ВМДТТ), задача которого заключается в получении с помощью современных вычислительных средств решений нетривиальных задач с любой наперёд заданной точностью.

К сожалению, до настоящего времени точные решения краевых задач теории оболочек и пластин при произвольных неоднородных краевых условиях не получены. Их нет даже при однородных главных краевых условиях. Если бы последние задачи были решены, то тем самым были бы решены и отмеченные краевые задачи с произвольными неоднородными краевыми условиями. Такая возможность обеспечивается теоремами вложения, продолжения и теоремой о следах [1 – 3].

Поскольку получение точных решений не представляется возможным, то необходимо привлекать численные методы, среди большого разнообразия которых следует выделить методы, основанные на экстремальных вариационных принципах механики (Лагранжа и Кастильяно). Для численной реализации вариационных принципов необходимо построение системы координатных функций (базиса), отвечающих известным требованиям [4, 5]. Выпол-

нением отмеченных требований обеспечивается сходимость приближённых решений к точному в соответствующей метрике, устойчивость, как получения самих приближённых решений, так и процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка.

Если оператор A исходной задачи положительно определённый, то всем требованиям к базису отвечает базис, ортонормированный в энергетической метрике такого оператора; при этом матрица системы линейных алгебраических уравнений является единичной. Однако известная процедура ортогонализации Грама-Сони́на-Шмидта является неустойчивой, так как последующая функция базиса выражается через предыдущие, что приводит к накоплению ошибок машинного округления. Этого обстоятельства можно избежать, если в процессе проведения процедуры ортогонализации отказаться от перехода к приближённым численным значениям искомых параметров, а получать для них явные точные выражения в виде дробей, радикалов и т.д. Такую возможность предоставляет математическое обеспечение современных вычислительных средств. Оговоренная выше цель работы, как будет показано ниже, достигается полностью благодаря передаче вычислительному средству процедур преобразований.

В работе рассматривается три исходных базиса:

- ортонормированная в $L_2(\Omega)$, где Ω - декартово произведение двух открытых отрезков $(-1,1)$, система функций, предложенная в работе [6];
- система функций, предложенная в работе [7], выраженная через многочлены Лежандра;
- система многочленов

$$P_{mn}(x, y) = (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 x^m y^n, \\ n, m = 0, 1, 2, \dots, x \in (-1, 1), y \in (-1, 1).$$

1. Постановка краевой задачи и некоторые подходы к её решению

Рассмотрена краевая задача для положительно определённого бигармонического оператора A , действующего в прямоугольной области

$$\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1; -1 < y < 1\},$$

описываемая дифференциальным уравнением

$$Au \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = Q(x, y) \quad (1)$$

и однородными краевыми условиями на границе Γ

области Ω

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2)$$

где $u(x, y)$ – искомая функция;

n – нормаль к границе Γ ;

$\lambda = a/b$ – параметр удлинения пластины с размерами $2a \times 2b$;

$Q(x, y)$ – функция нагрузки из класса $L_2(\Omega)$.

Отметим, что искомая функция $u(x, y)$ является функцией прогиба в задаче изгиба прямоугольных пластин. Эту же функцию при $Q(x, y) \equiv 0$ и неоднородных краевых условиях, соответствующих условиям (2), можно отождествить с функцией напряжений Эри в плоской задаче теории упругости.

Решение краевой задачи (1) - (2) является элементом функционального пространства C_0 . Л. Соболева $W_2^2(\Omega) \equiv H_A$ (H_A – энергетическое пространство оператора A).

Введём в H_A энергетическое (скалярное) произведение

$$(Au, v) \equiv [u, v] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \lambda^4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (3)$$

и порождаемую этим скалярным произведением энергетическую норму

$$(Au, u) \equiv \|u\|^2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2\lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy. \quad (4)$$

Решение краевой задачи (1) - (2) удовлетворяет интегральному тождеству

$$[u, v] - (Q, v) = 0, \quad \forall v \in H_A. \quad (5)$$

Интегральное тождество (5) связано с экстремальным вариационным принципом Лагранжа, который в данном случае переходит в принцип минимума полной потенциальной энергии пластины

$$Fu = \frac{1}{2} \|u\|^2 - (Q, u) \Rightarrow \min. \quad (6)$$

В равенствах (3) – (6) (u, v) обозначает обычное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, вместо решения краевой задачи (1) - (2) можно решать вариационную задачу для квадратичного функционала Fu (6).

Для решения краевой задачи (1) - (2) или вариационной задачи (6) (что одно и то же) необходимо построение координатных функций (базиса), обладающих требуемыми свойствами. Наилучшим из этих базисов будет тот, который ортонормирован в энергетической метрике положительно определённого оператора A . Получающаяся при этом система алгебраических уравнений при решении краевой задачи (1) - (2), например методом Бубнова-Галёркина или минимизацией функционала (6) методом Рунца, окажется единичной. Это обстоятельство позволит выписать решение в явном виде. Таким образом, задача заключается в построении ортонормированного выше базиса.

Построению аналитико-численных и приближённых аналитических решений задачи (1) - (2) посвящён цикл работ [8 - 10]. Настоящая работа завершает этот цикл.

В работе [8] для получения аналитико-численного решения различными методами (в том числе вариационным) были привлечены пять систем координатных функций, две из которых принадлежат С. А. Халилову [6] и В. Б. Минтюку [7]. Три другие – это функции, предложенные В. М. Даревским и И. Л. Шариновым, фундаментальные балочные функции А. Н. Крылова и косинус-биномы М. М. Филоненко-Бородича [8]. Кроме того, в высоких приближениях были получены решения поставленной краевой задачи по методу конечного элемента (МКЭ). Для получения аналитико-численного решения приходилось решать систему линейных алгебраических уравнений с полностью заполненной матрицей достаточно низкого порядка. Было показано, что наилучшими аппроксимативными свойствами обладают функции из работ [6, 7], для достижения той же точности по МКЭ потребовалось вводить в 300 раз больше неизвестных. Поэтому решения работы [8] с использованием базисов, построенных в работах [6, 7], были названы критерийными (эти решения полностью совпадают). При этом искомую функцию $u(x, y)$ определили с точностью до одиннадцати значащих цифр в мантиссе, а её вторые производные – до шести цифр.

В работе [9] на основе замечательных свойств координатной системы функций С. А. Халилова [6] получено приближённое аналитическое решение типа Навье задачи изгиба прямоугольной пластины с однородными главными краевыми условиями.

С учётом свойств ортогональности самих

функций [6] в $L_2(\Omega)$ и квазиортогональности их первых и вторых производных, в работе [10] построено приближённое аналитическое решение в одинарных рядах краевых задач изгиба прямоугольных пластин, когда на двух противоположных сторонах заданы однородные главные краевые условия, а на двух других – условия произвольны. При этом было показано, что хотя саму функцию и определяли с очень высокой точностью, погрешность в определении изгибающих моментов в сравнении с критерийными [8] могла достигать 10...15%, что в ряде случаев можно считать приемлемым, если принять во внимание погрешность самой теории тонких пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа.

Как было отмечено выше, приближённое аналитическое решение с любой наперёд заданной точностью можно получить, располагая базисом, точно ортонормированным в энергетической метрике оператора A . Смысл выражения «точно» может быть реализован лишь теоретически, на практике имеют место возмущения вычислительного характера, что свойственно всем вычислительным средствам. Иными словами, матрица Грама линейно независимой и «точно» ортонормированной в H_A системы функций должна быть «чисто» единичной. На самом деле имеет место явление типа «белого шума», заключающееся в том, что в процессе вычислений в матрице Грама вне диагонали появляются хотя и малые, но ненулевые элементы, что является следствием неустойчивости самого процесса ортогонализации.

Уместно поставить вопрос: «Можно ли избежать этого явления, привлекая современные вычислительные средства?» Ответ положительный, что будет показано ниже.

Итак, пусть известна система функций $\omega_k(x, y)$, ортонормированная в энергетической метрике положительно определённого оператора A . Тогда решение краевой задачи (1) - (2) может быть записано как

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^K A_k \omega_k(x, y), \quad (7)$$

где числовые компоненты решения A_k , зависящие лишь от вида правой части, определяются формулой

$$A_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q(x, y) \omega_k(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Решение (7) будет мало отличаться от точного при соблюдении двух условий:

- для достижения любой наперед заданной точности величина K остаётся конечной;

- функции $\phi_k(x, y)$ определены точно хотя бы до такого K , при котором достигается заданная точность.

2. Построение ортонормированного базиса в энергетической метрике оператора краевой задачи

Неустойчивость процедуры ортогонализации Грама-Сонина-Шмидта в любой метрике до последнего времени делало эту процедуру практически бесполезной, поскольку даже при небольшом числе ортонормированных функций из-за потери значащих цифр, связанных с округлениями при вычислениях, система функций теряла свойство линейной независимости. Говоря иначе, матрица Грама с ростом её порядка оказывалась вырожденной или весьма близкой к вырожденной, то есть определитель разрешающей системы алгебраических уравнений становился практически нулевым. Вот, что по этому поводу говорится в работе [11]: «...процесс ортонормирования является в некотором смысле неустойчивым, и при его проведении могут возникнуть серьёзные погрешности». С этим трудно не согласиться, хотя данный вопрос будет обсуждён позднее. На практике происходит следующее. Пусть построены первые k функций. При построении последующих функций, выраженных через предыдущие, может оказаться, что функции, начиная с некоторого номера $n \geq k$, будут элементами линейной оболочки, натянутой на первые k функций, то есть построенная система функций окажется линейно зависимой или весьма близкой к ней.

Автор работы [11] далее пишет: «Однако погрешности ортогонализации не играют большой роли. Важно лишь, чтобы при этом построенная система функций не потеряла свойства быть далёкой от линейной зависимости». С этим тезисом невозможно согласиться принципиально, поскольку указанные погрешности ортогонализации как раз и приводят к появлению свойства линейной зависимости. Так было во времена написания работы [11], но по прошествии почти полувека ситуация резко изменилась в лучшую сторону, что связано с развитием вычислительной техники и расширением её возможностей. Оказалось, что доступно не только проводить вычисления с любой точностью, но и оперировать с достаточно широким классом математических структур.

Устойчивость процесса ортогонализации при ограниченном числе учитываемых значащих цифр во много зависит от свойств исходной системы, подлежащей ортогонализации. Три исходные системы, ортогонализируемые в последующем, отмечены во введении.

Пусть задана исходная система функций из области определения оператора A , хотя это требование может быть ослаблено путём перехода к вариационной постановке, а именно: достаточно потребовать, чтобы функции исходной системы были элементами пространства $W_2^0(\Omega)$. Но из теоремы вложения С. Л. Соболева [1] следует, что если некоторая функция $f(x, y) \in W_2^0(\Omega)$, то эта функция также является элементом пространства $C(\overline{\Omega})$.

Стоит отметить отличительные свойства каждого из представленных исходных базисов.

Базис $\phi_k(x, y) = H_i(x)H_j(y)$ ¹ [6, 8] состоит из ортонормированных в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ самих функций, производные которых до второго порядка включительно квазиортogonalны в этом же пространстве [9]. Отсюда следует квазиортogonalность базиса $\phi_k(x, y)$ в энергетическом пространстве H_A , наделённом скалярным произведением (3). Такое замечательное свойство этих функций было достаточно подробно исследовано в работе [9]².

Что же касается двух других обсуждаемых в данной работе исходных базисов, то можно отметить следующее: базис $\phi_k(x, y) = M_i(x)M_j(y)$, построенный на основе функции работы [7], имеет лишь ортогональные вторые производные в $L_2(\Omega)$ (за исключением вторых смешанных производных), а сами функции и их первые производные почти ортогональны в том же пространстве. Система $P_{mn}(x, y)$, указанная во введении, никакими замечательными свойствами не обладает.

Диагональная процедура ортогонализации Грама-Сонина-Шмидта исходного базиса в энергетической метрике положительно определённого оператора краевой задачи (1) - (2) представляется в следующем виде:

¹ Здесь комплексу i, j ставится в соответствие индекс k по приводимой ниже табл. 1.

² Этот вопрос с несколько иных позиций будет обсуждён далее.

$$\omega_k(x, y) = A_k \left(\varphi_k(x, y) - \sum_{n=0}^{k-1} B_{kn} \omega_n(x, y) \right);$$

$$B_{kn} = A_n \left([\varphi_k(x, y), \varphi_n(x, y)] - \sum_{m=0}^{n-1} B_{nm} B_{km} \right),$$

$$k \neq 0; \quad (9)$$

$$A_k = \left([\varphi_k(x, y), \varphi_k(x, y)] - \sum_{m=0}^{k-1} B_{km}^2 \right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$B_{km} = [\varphi_k(x, y), \omega_m(x, y)];$$

где $\varphi_k(x, y)$ - функция, составленная из обозначенных выше исходных базисов.

Из формул (9), можно заключить, что для устойчивости процесса ортогонализации необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\sum_{m=0}^{n-1} B_{nm} B_{km} \sim O([\varphi_k, \varphi_n]^\alpha),$$

$$0 < \alpha < 1, n \in N, k \in N \cup \{0\},$$

$$\sum_{m=0}^{k-1} B_{km}^2 \sim O([\varphi_k, \varphi_k]^\beta),$$

$$0 < \beta < 1, k \in N. \quad (10)$$

Этим условиям в полной мере удовлетворяет исходный базис $\varphi_k(x, y) = H_i(x)H_j(y)$.

Известно, что любая непрерывная функция двух переменных, заданная в симметричной области, может быть представлена в виде суммы четырёх функций, каждая из которых относится к определённому классу чётности. Поэтому в зависимости от вида правой части дифференциального уравнения (1) искомую функцию $u(x, y)$ можно представить в виде суммы четырёх различных по чётности функций

$$u(x, y) = u_{++} + u_{+-} + u_{-+} + u_{--}, \quad (11)$$

где первый индекс определяет чётность (знак «+») или нечётность (знак «-») по переменной x , а второй индекс – то же самое по переменной y . Таким образом, для отыскания тех или иных слагаемых в равенстве (11) необходимо будет строить четыре различных ортонормированных базиса, отличающихся по классу чётности или нечётности.

В заключение приводим таблицу соответствия ведущего комплекса i, j индексу k – номеру функции $\omega_k(x, y)$ соответствующей чётности (табл. 1). Таблица построена по принципу возрастания суммы индексов $i + j = S$, где в пределах одной

суммы индекс i возрастает, а j – уменьшается. Этот принцип представляется важным, поскольку с ростом S вклад соответствующих функций $\omega_k(x, y)$ в решение (7) уменьшается. Поэтому рационально представить функцию $\omega_k(x, y)$ в следующем виде:

$$\omega_k(x, y) = \sum_{r=0}^k C_r \varphi_r(x, y), \quad (12)$$

где C_r – коэффициент, стоящий перед каждой исходной координатной функцией.

Формулой (12) показано, что, перебирая индексы i и j , с ростом их суммы S , можно построить любое наперёд заданное число функций k .

В данной таблице по каждому классу чётности ортонормированного базиса в H_A содержится по двадцать одной функции. Она может быть продолжена на произвольное число функций с соблюдением принципа роста суммы индексов S исходной системы.

Таблица 1
Принцип соответствия индексов

k	S	ω_{++}		S	ω_{--}		S	ω_{+-}		ω_{-+}	
		i	j		i	j		i	j	i	j
0	0	0	0	2	1	1	1	0	1	1	0
1	2	0	2	4	1	3	3	0	3	1	2
2		2	0		3	1		2	1	3	0
3		0	4		1	5		0	5	1	4
4	4	2	2	6	3	3	5	2	3	3	2
5		4	0		5	1		4	1	5	0
6		0	6		1	7		0	7	1	6
7	6	2	4	8	3	5	7	2	5	3	4
8		4	2		5	3		4	3	5	2
9		6	0		7	1		6	1	7	0
10		0	8		1	9		0	9	1	8
11		2	6		3	7		2	7	3	6
12	8	4	4	10	5	5	9	4	5	5	4
13		6	2		7	3		6	3	7	2
14		8	0		9	1		8	1	9	0
15		0	10		1	11		0	11	1	10
16		2	8		3	9		2	9	3	8
17	10	4	6	12	5	7	11	4	7	5	6
18		6	4		7	5		6	5	7	4
19		8	2		9	3		8	3	9	2
20		10	0		11	1		10	1	11	0

3. Некоторые численные результаты

Как отмечалось ранее, для построения ортонормированного по энергии базиса здесь используются три различные полиномиальные системы. Ниже приводятся в качестве примера четыре координаты

натные функции класса ω_{++} с использованием исходного базиса $\varphi_k(x, y) = H_i(x)H_j(y)$:

$$\begin{aligned}\omega_{0++}(x, y) &= \frac{1}{9}H_0(x)H_0(y); \\ \omega_{1++}(x, y) &= \frac{\sqrt{3305}}{1983}H_0(x)H_2(y); \\ \omega_{2++}(x, y) &= -\frac{13\sqrt{231021483}}{693064449}H_0(x)H_2(y) + \\ &\quad + \frac{2\sqrt{231021483}}{1048509}H_2(x)H_0(y); \\ \omega_{3++}(x, y) &= -\frac{\sqrt{4848687817918175}}{117723108195}H_0(x)H_0(y) - \\ &\quad - \frac{28936\sqrt{12606588326587255}}{415601812964415}H_0(x)H_2(y) - \\ &\quad - \frac{20\sqrt{12606588326587255}}{83120362592883}H_2(x)H_0(y) + \\ &\quad + \frac{6\sqrt{105831885145}}{169874615}H_0(x)H_4(y).\end{aligned}\quad (13)$$

Точные формулы¹, аналогичные формулам (13), могут быть получены для произвольного S (а значит, и для любого k). Однако возможность построения произвольно большого числа ортонормированных функций ограничивается аппаратными характеристиками существующей вычислительной техники; при этом время, затраченное на построение каждой новой функции, растёт экспоненциально. С этими проблемами можно столкнуться при использовании примитивного вычислительного обеспечения, но его современный уровень и стремительное развитие позволяют надеяться, что через десяток лет решение этой проблемы не будет вызывать особых трудностей. На данный момент можно построить ортонормированный базис, состоящий из нескольких сотен функций, представленных в виде аналитических выражений, за весьма короткий промежуток времени. Такого количества функций достаточно для получения решений, превосходящих по точности запросы инженерной практики.

Переход от точных значений коэффициентов C_T из формулы (12) к их приближённым значениям с наперёд заданной точностью не позволяет гарантировать ожидаемую такую же точность самого решения краевой задачи, что связано с упомянутым ранее накоплением ошибок машинного округления при построении каждой последующей функции.

¹ В данных равенствах возможны сокращения в натуральных коэффициентах и в корнях из них; однако сокращения лишь удлиняют форму записи, поэтому они здесь не представлены. Важно, что эти коэффициенты абсолютно точны.

Сказанное демонстрируется табл. 2, в которой приведены коэффициенты C_T для первых шести функций из класса ω_{++} , построенных по трём различным исходным базисам. В ней в числителе представлены значения коэффициентов C_T , вычисленные по точным формулам, но в таблице оставлено пять значащих цифр, а в знаменателе – значения тех же коэффициентов, полученных при сквозном вычислении с точностью до пяти знаков в мантиссе.

Сопоставляя полученные по различным исходным координатным функциям значения коэффициентов, можно сделать следующие выводы:

- наблюдается диагональное преобладание коэффициентов;
- значения коэффициентов, полученных по исходной системе $P_{mn}(x, y)$, на 2-3 порядка выше значений коэффициентов, доставляемых с использованием базисов из работ [6, 7], что приводит к ухудшению свойств матрицы Грама.

Под диагональным преобладанием надо понимать следующее. Величины диагональных коэффициентов, стоящих при ведущих функциях $H_i(x)H_j(y)$ или $M_i(x)M_j(y)$, значительно превосходят величины коэффициентов, стоящих при функциях, являющихся ортонормирующими добавками. Это значит, что сами ведущие функции являются почти ортогональными в энергетической метрике H_A . Например, функцию $\omega_{4++}(x, y)$, построенную по исходному базису $H_i(x)H_j(y)$, можно записать так:

$$\begin{aligned}\omega_{4++}(x, y) &= 0,017926(H_2(x)H_2(y) - \\ &\quad - 0,14501H_0(x)H_0(y) + \\ &\quad + 0,08960H_0(x)H_2(y) + \\ &\quad + 0,08215H_2(x)H_0(y) - \\ &\quad - 0,01098H_0(x)H_4(y)) \equiv B_4\tilde{\omega}_{4++}.\end{aligned}\quad (14)$$

В этой формуле ведущей является функция $H_2(x)H_2(y)$, а остальные представляют собой ортонормирующие добавки. Поскольку модули экстремумов функций $H_m(z)$ и $H_n(z)$, $z \in [-1, 1]$ независимо от значений m и n имеют один и тот же порядок, то в равенстве (14) можно пренебречь всеми членами, кроме подчёркнутого, т.е. положить (нормирующий множитель B_4 опущен)

$$\omega_{4++}(x, y) \approx H_2(x)H_2(y).\quad (15)$$

Такой результат просматривается для всех ортонормированных в H_A функций $\omega_k(x, y)$.

Таблица 2

Коэффициенты C_T ортонормированной системы функций $\omega_k(x, y) = \omega_{k++}(x, y)$

ω_k	$H_0(x)H_0(y)$	$H_0(x)H_2(y)$	$H_2(x)H_0(y)$	$H_0(x)H_4(y)$	$H_2(x)H_2(y)$	$H_4(x)H_0(y)$
ω_0	1,111(1)e-1	-	-	-	-	-
	1,111e-1					
ω_1	0	2,8991e-2	-	-	-	-
	2,6925e-07	2,8991e-2				
ω_2	0	-2,8510e-4	2,8992e-2	-	-	-
	-5,3130e-6	-2,8488e-4	2,8990e-2			
ω_3	5,9149e-4	-7,8174e-3	-2,7016e-5	1,1490e-2	-	-
	5,8861e-4	-7,8161e-3	-2,6936e-5	1,1490e-2		
ω_4	-2,5994e-3	1,6062e-3	1,4727e-3	-1,9679e-4	1,7926e-2	-
	-2,5964e-3	1,6101e-3	1,4726e-3	-1,9629e-4	1,7921e-2	
ω_5	6,3607e-4	-5,4061e-5	-7,8437e-3	2,6815e-6	-3,0703e-4	1,1492e-2
	6,5842e-4	-5,0473e-5	-7,7548e-3	2,4709e-6	-3,1657e-4	1,1493e-2
ω_k	$M_0(x)M_0(y)$	$M_0(x)M_2(y)$	$M_2(x)M_0(y)$	$M_0(x)M_4(y)$	$M_2(x)M_2(y)$	$M_4(x)M_0(y)$
ω_0	7,1429e-3	-	-	-	-	-
	7,1429e-3					
ω_1	8,5861e-4	5,0086e-3	-	-	-	-
	8,5941e-4	5,0085e-3				
ω_2	8,5021e-4	-4,9254e-5	5,0088e-3	-	-	-
	8,5283e-4	-4,7231e-5	5,0078e-3			
ω_3	2,0813e-5	2,6723e-4	-4,6674e-6	3,1941e-3	-	-
	2,0365e-5	2,6693e-4	-4,9015e-6	3,1942e-3		
ω_4	1,6498e-4	1,6765e-3	1,6812e-3	-5,4703e-5	8,3226e-3	-
	1,6788e-4	1,6799e-3	1,6830e-3	-5,4548e-5	8,3222e-3	
ω_5	1,7989e-5	-3,3399e-5	2,3847e-4	7,4539e-7	-1,4255e-4	3,1945e-3
	1,4575e-5	-2,1680e-5	2,4117e-4	4,6842e-6	-1,4286e-4	3,1946e-3
ω_k	$P_0(x)P_0(y)$	$P_0(x)P_2(y)$	$P_2(x)P_0(y)$	$P_0(x)P_4(y)$	$P_2(x)P_2(y)$	$P_4(x)P_0(y)$
ω_0	1,3672e-1	-	-	-	-	-
	1,3672e-1					
ω_1	-2,8760e-2	3,1636e-1	-	-	-	-
	-2,8762e-2	3,1637e-1				
ω_2	-2,8479e-2	-3,1111e-3	3,1638e-1	-	-	-
	-2,8474e-2	-3,1141e-3	3,1633e-1			
ω_3	1,9318e-2	-3,6632e-1	-2,9481e-4	7,0252e-1	-	-
	1,9322e-2	-3,6635e-1	-2,8955e-4	7,0254e-1		
ω_4	7,8990e-3	-1,3537e-1	-1,4164e-1	-1,2032e-2	1,7348	-
	7,9016e-3	-1,3534e-1	-1,4165e-1	-1,1989e-2	1,7344e	
ω_5	1,9184e-2	2,0457e-3	-3,6394e-1	1,6395e-4	-2,9713e-2	7,0263e-1
	1,9133e-2	2,1690e-3	-3,6442e-1	2,3390e-4	-3,1629e-2	7,0641e-1

Этим самым ещё раз (но с другой точки зрения) подтверждается основное положение работы [9]: функции $H_i(x)H_j(y)$ почти ортогональны в энергетической метрике положительно определённого оператора A краевой задачи (1) - (2). При этом, как показано в работе [9], искомая функция $u(x, y)$ определяется с очень высокой точностью, превосходящей принятую в практике инженерных вычислений. Но проектировщика больше интересует точность вычисления напряжений, которые выражаются через вторые производные от функции $u(x, y)$.

Поскольку в данном решении функция $u(x, y)$ является многочленом двух переменных, то порядок роста её производных определяется неравенством А. А. Маркова [12]. Из этого следует, что при переходе от точного равенства (14) к приближённому равенству (15) с учётом сказанного необходимо соблюдать определенную осторожность. Как показано в работе [9], этот переход может привести к 10...15% ошибке в определении напряжений.

Таким образом, далее приводятся графики функций $\tilde{\omega}_{4++}$ и функции $H_2(x)H_2(y)$ (рис. 1), а также функции $\tilde{\omega}_{17++}$ и функции $H_4(x)H_6(y)$

(рис. 2) при параметре $\lambda = 1$. На этих рисунках сплошные линии соответствуют функциям $\tilde{\omega}_{k++}$, а точки – функциям $H_i(x)H_j(y)$. Представленные графики функций необходимо продлить по чётности относительно вертикальной оси.

Как видно из представленных графиков, поведение ведущих функций $H_i(x)H_j(y)$ практически не отличается от поведения функций $\tilde{\omega}_k(x, y)$: сохраняется число нулей и экстремумов этих функций, значения же самих функций во всей области Ω отличаются незначительно (это различие несущественно при вычислениях). Данный результат подтверждает свойство квазиортогональности в H_A исходной системы функций $H_i(x)H_j(y)$, что с несколькими иными позициями подробно исследовано в работе [9]. Это обстоятельство имеет место для функций из любой группы чётности.

Система функций $H_i(x)H_j(y)$, будучи ортонормированной в $L_2(\Omega)$, является сильно минимальной в $H_A(\Omega)$ (по терминологии работы [5])¹. Эта же система является почти ортонормированной в $H_A(\Omega)$ [9]. Система функций $\omega_k(x, y)$ – точно ортонормированная в $H_A(\Omega)$. Возникает естественный вопрос: «Является ли ортонормированная в $H_A(\Omega)$ система функций $\omega_k(x, y)$ почти ортогональной в исходном пространстве $L_2(\Omega)$?» Ответ на этот вопрос положительный, о чём свидетельствуют данные табл. 3.

В этой таблице приведены значения углов β_{mn} (в градусах) между функциями $\omega_m(x, y)$ и $\omega_n(x, y)$, рассматриваемыми как элементы пространства $L_2(\Omega)$. Значения углов β_{mn} определяют по формуле

$$\beta_{mn} = \arccos \left(\frac{(\omega_m, \omega_n)}{\|\omega_m\| \cdot \|\omega_n\|} \right). \quad (16)$$

Табл. 3 состоит, по сути, из четырёх таблиц (разделённых по классу чётности функций $\omega_k(x, y)$); над диагональю указаны значения углов, вычисленных для функций, обозначенных в верхней

строке соответствующей половинки таблицы, под диагональю – для функций, определённых в столбце слева.

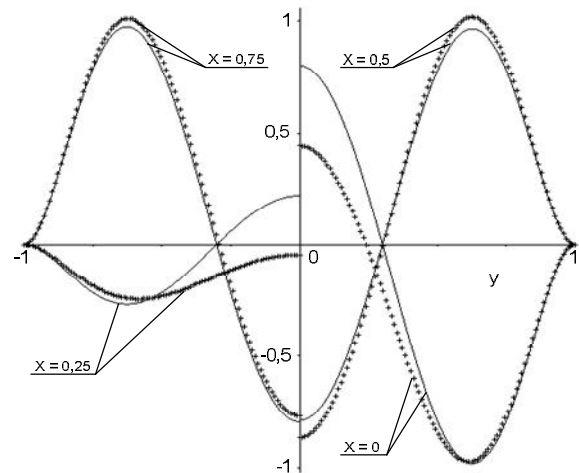


Рис. 1. Графики функций $\tilde{\omega}_{4++}$ и $H_2(x)H_2(y)$

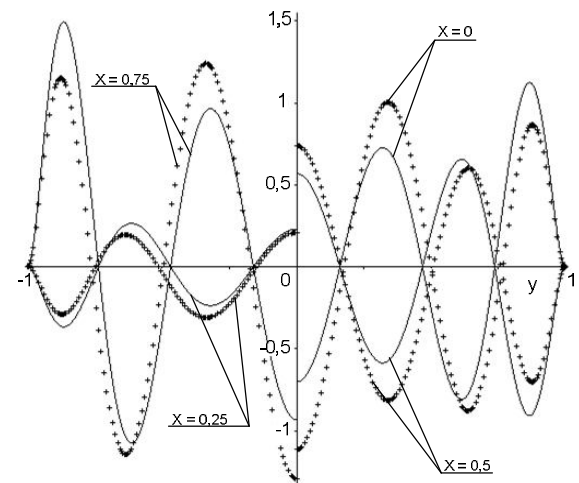


Рис. 2. Графики функций $\tilde{\omega}_{17++}$ и $H_4(x)H_6(y)$

Даже беглый анализ данных табл. 3 позволяет сформулировать следующее

Предложение. Система функций $H_i(x)H_j(y)$, будучи ортонормированной в исходном пространстве $L_2(\Omega)$, является почти ортогональной в $H_A(\Omega)$. И наоборот, система функций $\omega_k(x, y)$, будучи ортонормированной в энергетическом пространстве $H_A(\Omega)$ положительно определённого оператора A , является почти ортогональной в исходном пространстве $L_2(\Omega)$.

Переходя к дальнейшему обсуждению полученных в данной работе результатов, следует подчеркнуть ещё раз, что на первое место ставится проблема точности и устойчивости вычислительных процедур. В работе [8] с этой точки зрения

¹ Функции $M_i(x)M_j(y)$ и, тем более, функций $P_{mn}(x, y)$ такими свойствами не обладают. Указанные функции являются лишь минимальными в H_A , но не сильно минимальными в том же пространстве.

Таблица 3

Углы β_{mn}											
Класс функций	$\omega_{--}(x, y)$										
$\omega_{++}(x, y)$	m\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	-	96,81	96,79	86,91	92,32	86,89	89,57	92,24	92,30	89,55
	1	90,00	-	89,39	123,90	87,85	90,63	84,24	91,36	86,26	90,12
	2	90,00	90,56	-	90,52	88,05	123,91	90,10	86,20	91,20	84,24
	3	87,56	124,19	89,79	-	91,42	89,56	129,09	87,56	92,41	89,96
	4	98,19	84,95	85,42	93,70	-	91,52	89,86	106,05	106,47	89,89
	5	87,38	90,22	124,26	89,69	94,24	-	89,97	92,40	87,85	129,10
	6	89,87	83,65	90,07	129,30	89,13	90,02	-	91,79	89,34	90,01
	7	95,53	93,44	86,23	85,92	101,15	92,45	92,74	-	83,99	89,35
	8	95,59	86,30	93,36	92,65	101,17	86,17	89,31	86,83	-	91,82
	9	89,78	90,07	83,60	89,96	89,42	129,29	90,01	89,34	92,98	-
Класс функций	$\omega_{+-}(x, y)$										
$\omega_{+-}(x, y)$	m\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	-	83,60	112,75	86,32	94,22	85,72	89,57	93,49	91,32	89,79
	1	112,66	-	93,45	112,38	90,57	89,65	85,91	92,00	86,89	90,03
	2	83,36	93,08	-	91,31	85,31	128,63	90,28	85,65	92,10	82,49
	3	85,80	128,59	89,27	-	90,39	89,50	128,12	87,61	91,64	90,01
	4	94,26	84,83	90,69	93,23	-	93,62	90,21	94,84	115,01	89,26
	5	86,31	91,70	112,34	89,49	90,44	-	89,93	92,62	86,50	129,76
	6	89,81	82,51	90,06	129,76	89,10	90,03	-	91,80	89,49	90,01
	7	91,27	92,19	86,83	86,54	114,98	91,62	92,27	-	87,15	89,24
	8	93,50	85,71	91,97	92,66	95,11	87,91	89,22	87,23	-	92,44
	9	89,53	90,25	85,90	89,92	90,24	128,13	90,01	89,49	91,88	-

досконально исследованы свойства пяти систем координатных функций. Было показано, что совокупности предъявляемых требований отвечают в большей степени функции $H_i(x)H_j(y)$. Для получения результатов с наперёд заданной точностью с помощью этих функций требуется решать систему линейных алгебраических уравнений с полностью заполненной матрицей [8], порядок которой в $10^2 - 10^3$ раз меньше порядка соответствующей матрицы метода конечного элемента для получения результата с той же точностью.

Следует ещё раз подчеркнуть, что только при построении ортонормированного в H_A базиса по точным формулам матрица Грама – единичная. В случае численного построения этого же базиса (при сквозном счёте) матрица Грама перестаёт быть чисто единичной. Вносимые при этом погрешности в решение краевой задачи можно оценить только интегрально. В качестве интегральной характеристики естественно выбрать величину определителя этой матрицы, которая теоретически должна быть равной единице. Из-за явления неустойчивости отличие определителя матрицы Грама от единицы будет тем меньше, чем больше знаков (параметр m) сохраняется в мантиссе действительных чисел. Другим параметром служит число ортогонализируемых

функций (параметр k). В подтверждение сказанного ниже приводятся графики (рис. 3) изменения значения определителя матрицы Грама при $\lambda = 1$ в зависимости от параметров m и k при сквозном счёте.

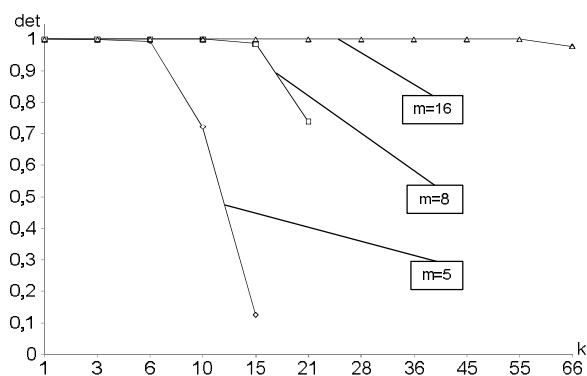


Рис. 3. Определитель матрицы Грама при сквозном счёте

Данные приведенных графиков прозрачны: так, при $m = 5$ максимально точно можно построить всего три функции ($k = 3$), а при $m = 8$ – десять функций ($k = 10$). Для достижения требуемой точности и устойчивости вычислительного процесса необходимо удерживать в мантиссе как минимум 16 значащих цифр. При этом можно гарантировать

точное построение 55 функций. Графики рис. 3 соответствуют функциям $\omega_{++}(x, y)$. Для функций из другого класса чётности результат аналогичный. Рассмотрим конкретный пример – изгиб прямоугольной жёстко закреплённой по всему контуру пластины под действием равномерно распределённой нормальной нагрузки интенсивностью q (здесь функция $u(x, y)$ описывает поверхность прогибов $w(x, y)$). Результаты вычислений компонент напряжённо-деформированного состояния в зависимости от значения $K(S)$ сведены в табл. 4. При этом приняты следующие обозначения:

$$w = \bar{w} \frac{qa^4}{D}, \quad M = \bar{M} qa^2. \quad (17)$$

Данные таблицы показывают как изменение величин максимального прогиба и изгибающих моментов в зависимости от удлинения пластины, так и зависимость искомых величин от числа удерживаемых функций в решении (7) при $\lambda = 1$. При $\lambda = 1$ для достижения высокой точности даже при вычислении изгибающих моментов достаточно принять $K = 15 (S = 6)$. Для других значений λ очень высокую точность можно обеспечить при $K = 45 (S = 16)$, при этом в таблице верны все приведенные значения цифр. Сравнивая результаты данного решения с результатами работ [8, 10], можно увидеть их совпадение с высокой точностью.

Заключение

1. Построен ортонормированный базис в энергетическом пространстве бигармонического оператора в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на контуре по различным исходным координатным системам.

Показано, что наилучшими свойствами, в смысле точности и устойчивости процесса ортогонализации, обладает исходный базис [6].

2. При обоснованно выбранном исходном базисе исследована устойчивость процесса ортогонализации в H_A . Показано, что для достижения заданной точности и устойчивости вычислительного процесса необходимо обеспечить длину мантийсы, равной шестнадцати знакам.

3. С несколько иной позиции рассмотрен вопрос о квазиортогональности исходного базиса [6] в энергетическом пространстве бигармонического оператора, тем самым ещё раз обоснованы решения типа Навье [9] и типа Леви [10].

4. Рассмотренный пример изгиба жёстко закреплённой по всему контуру прямоугольной пластины под действием равномерно распределённой нормальной нагрузки наглядно показал достоинство применения ортонормированного в H_A базиса.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность С. А. Халилову и В. Б. Минтюку за неоценимую помощь и конструктивную критику.

Таблица 4

Жёстко закреплённая прямоугольная пластина под действием равномерно распределённого давления

λ	K	S	$\bar{w}(0;0)$	$\bar{M}_x(0;0)$	$\bar{M}_y(0;0)$	$\bar{M}_x(1;0)$	$\bar{M}_y(0;1)$
1	1	0	0,021267	0,110590	0,110590	-0,170139	-0,170139
	3	2	0,020202	0,089821	0,089821	-0,208482	-0,208482
	6	4	0,020247	0,091748	0,091748	-0,205828	-0,205828
	10	6	0,020247	0,091740	0,091740	-0,205764	-0,205764
	15	8	0,020243	0,091500	0,091500	-0,205355	-0,205355
	21	10	0,020246	0,091705	0,091705	-0,205117	-0,205117
	28	12	0,020245	0,091565	0,091565	-0,205337	-0,205337
	36	14	0,020245	0,091656	0,091656	-0,205405	-0,205405
	45	16	0,020245	0,091598	0,091598	-0,205330	-0,205330
	55	18	0,020245	0,091635	0,091635	-0,205316	-0,205316
	105	26	0,020245	0,091623	0,091623	-0,205334	-0,205334
2	45	16	2,53293E-03	0,015799	0,041143	-0,056974	-0,082876
3	45	16	5,16972E-04	0,005636	0,018615	-0,025273	-0,037237
4	45	16	1,62906E-04	0,003115	0,01042	-0,014233	-0,020842
5	45	16	6,66653E-05	0,001997	0,006663	-0,009114	-0,013330

Литература

1. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 333 с.
2. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул [Текст] / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
3. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения [Текст] / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
4. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1957. – 478 с.
5. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
6. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. – Х.: ХАИ, 1978. – Вып. 5. – С. 46 – 56.
7. Минтюк, В. Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач [Текст] / В. Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – № 5 (41). – С. 32 – 36.
8. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе

жёстко закреплённой прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – 2011. – Вып. 49. – С. 81 – 94.

9. Халилов, С. А. Построение и исследование приближённого аналитического решения биармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 2 (99). – С. 40 – 49.

10. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение биармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.

11. Гавурин, М. К. Лекции по методам вычислений [Текст] / М. К. Гавурин. – М.: Наука, 1971. – 248 с.

12. Математический энциклопедический словарь [Текст] / под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – С. 336.

Поступила в редакцию 14.01.2014, рассмотрена на редколлегии 20.05.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. высшей математики В. С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ОРТОНОРМОВАНИЙ В ЕНЕРГЕТИЧНОМУ ПРОСТОРИ БІГАРМОНІЧНОГО ОПЕРАТОРА БАЗИС У ПРЯМОКУТНИКУ ПРИ ОДНОРІДНИХ ГОЛОВНИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ ПО ГРАНИЦІ

Д. А. Ткаченко

Побудовано ортонормовані в енергетичному просторі бігармонічного оператора базиси у прямокутнику для трьох різних початкових координатних систем при однорідних головних крайових умовах. Для елементів базису при значній їх кількості отримано замкнуті вирази з абсолютно точними параметрами. Досліджено похибку, що виникає при наскрізному розрахунку внаслідок нестійкості процедури ортогоналізації. Показано, що найкращі властивості з точки зору стійкості процедури ортогоналізації й точності отриманих результатів має один із трьох розглянутих базисів, який є майже ортогональним у первинному просторі. Числові результати наведені в таблицях і графіках.

Ключові слова: ортонормований базис, енергетичний простір, бігармонічний оператор, крайова задача.

ORTHONORMAL BASIS IN THE BIHARMONIC OPERATOR ENERGY SPACE IN THE RECTANGLE WITH HOMOGENEOUS PRINCIPAL BOUNDARY CONDITIONS ALONG THE BOUNDARY

D. A. Tkachenko

The orthonormal bases were obtained in the biharmonic operator energy space in a rectangle for three different original coordinate systems with homogeneous principal boundary conditions. The closed clauses for the terms when a substantial number of them were obtained with absolutely accurate parameters. The inaccuracy that occurs when a through calculation due to the instability of the orthogonalization procedure was investigated. It is shown that one of the three bases under consideration has the best properties from the viewpoint of orthogonalization procedure's sustainability and accuracy of the obtained results. This basis is almost orthogonal in the original space. Numerical results are presented in tables and graphs.

Keywords: orthonormal basis, the energy space, the biharmonic operator, boundary-value problem.

Ткаченко Денис Анатольевич – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: 20Black_and_White07@ukr.net.