

УДК 621.822.5

В.И. НАЗИН

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СДВОЕННОГО РАДИАЛЬНО-УПОРНОГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА**

*Разработана математическая модель сдвоенного радиально-упорного гидростатического подшипника, воспринимающего радиальные и двухсторонние осевые нагрузки. Получена система уравнений для определения давлений в камерах, расположенных на внешних конических рабочих поверхностях и внутренних цилиндрических рабочих поверхностях. Система уравнений приведена к виду приспособленному для численной реализации, благодаря применению итерационных методов решения уравнений. Для определения давлений на межкамерных перемышках применено уравнение Рейнольдса, обобщенное на случай развитого турбулентного течения рабочей жидкости. Интегрированием функции распределения давления по рабочим поверхностям подшипника получены выражения для определения гидродинамических сил. Для определения амплитудно-частотных характеристик ротора на рассматриваемых подшипниках применены нелинейные дифференциальные уравнения движения. Проанализированы различные численные методы решения уравнений движения диска внутри подшипника и применен наиболее рациональный метод.*

**Ключевые слова:** математическая модель, гидростатический подшипник, давления в камерах, итерационные методы, межкамерные перемышки, турбулентное течение рабочей жидкости, гидродинамические силы, амплитудно-частотная характеристика, уравнения движения.

**Введение**

Разновидностью гидростатических подшипников сдвоенного типа является сдвоенный радиально-упорный подшипник, воспринимающий одновременное действие радиальных и осевых нагрузок. Конструктивная схема такого подшипника приведена на рис.1. Данная конструкция позволяет заменить комбинацию радиального и упорного подшипника и таким образом упростить конструкцию опорного узла.

Наружная часть сдвоенного радиально-упорного подшипника имеет две конические поверхности и поэтому подшипник может воспринимать двухсторонние осевые нагрузки. Рассматриваемый подшипник имеет наружную (коническую) и внутреннюю цилиндрическую рабочие поверхности. На обеих рабочих поверхностях выполнены несущие камеры. Давления в камерах обозначены  $P_{K1}$ ,  $P_{K2}$ ,  $P_{K3}$ ,  $P_{K4}$  и  $P_{K11}$ ,  $P_{K12}$ ,  $P_{K13}$ ,  $P_{K14}$  (рис. 1).

Рабочая жидкость подается в несущие камеры под большим давлением  $P_{BX}$  через входные компенсирующие устройства жиклёры (дж). Положение диска в подшипнике определяется эксцентриситетом “e”, т.е. расстоянием между центрами диска и подшипника, и углом положением  $\beta_0$ . Рабочая жидкость, пройдя через щелевой тракт подшипника, поступает на слив ( $P_{сл}$ ).

В качестве переменной внешней нагрузки рассматривается остаточная неуравновешенность (дисбаланс) ротора. Для анализа динамических явлений, происходящих в опорах вала используем амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), которые позволяют выявить зоны резонанса и границы устойчивой работы вала. Построение амплитудно-частотных характеристик связано с совместным решением уравнений Рейнольдса, баланса расходов и уравнений движения вала внутри подшипника.

Из баланса расходов рабочей жидкости определяем давления в камерах. Запишем баланс расходов из условия равенства расходов по контуру i-й камеры для наружной конической (рис.2) и внутренней цилиндрической (рис.3) рабочих поверхностей подшипника

$$Q_{BX1} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_{V1}, \quad (1)$$

$$Q_{BX2} = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{V2}, \quad (2)$$

где  $Q_{BX1}$  и  $Q_{BX2}$  –расходы через входные компенсаторные устройства, соответственно для камер на наружной и внутренней рабочих поверхностях подшипника. Для жиклёров эти расходы записываются в следующем виде:

$$Q_{BX1} = \Psi_{BX} \cdot \pi \cdot \chi_{ж1}^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{BX} - P_{KK,i})}, \quad (3)$$

$$Q_{BX2} = \Psi_{BX} \cdot \pi \cdot \chi_{ж2}^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{BX} - P_{KK,i})}, \quad (4)$$

где  $\psi_{вх}$  – коэффициент входа, равный 0,62 ... 0,82;  $ч_{ж1}$  и  $ч_{ж2}$  – радиусы жиклёров;  $\rho$  – плотность рабочей жидкости;  $P_{вх}$  – давление питания от насоса;  $P_{кк,i}$  и  $P_{кц,i}$  – давления в  $i$ -х камерах расположенных на наружной и внутренней рабочих поверхностях подшипника.

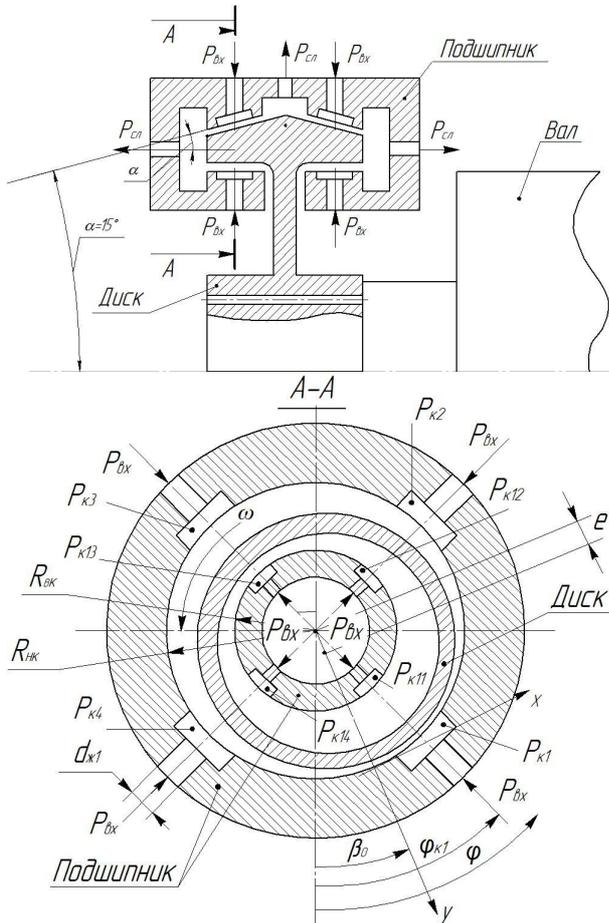


Рис. 1. Схема двояного радиально-упорного гидростатического подшипника

Расходы по контуру  $i$ -й камеры с учётом переносного и градиентного течения рабочей жидкости для наружной конической и внутренней цилиндрической рабочих поверхностей подшипника запишем в следующем виде (рис. 2 и 3):

$$Q_1 = \frac{\omega \cdot h_{1,i} (R_{КАМ2}^2 - R_{КАМ1}^2)}{4 \cdot \text{Sin} \alpha} + \frac{h_{1,i}^3 (P_{КК,i} - P_{КК,i-1}) I_{КК} \cdot \text{Sin} \alpha}{6\mu (R_{КАМ1} + R_{КАМ2}) \cdot \Delta \varphi_{ПЕР} (N_{ПЕР} - 1)},$$

$$Q_2 = \frac{\omega \cdot h_{1,i+2} (R_{КАМ2}^2 - R_{КАМ1}^2)}{4 \cdot \text{Sin} \alpha} + \frac{h_{1,i}^3 (P_{КК,i} - P_{КК,i+1}) I_{КК} \cdot \text{Sin} \alpha}{6\mu (R_{КАМ1} - R_{КАМ2}) \cdot \Delta \varphi_{ПЕР} (N_{ПЕР} - 1)},$$

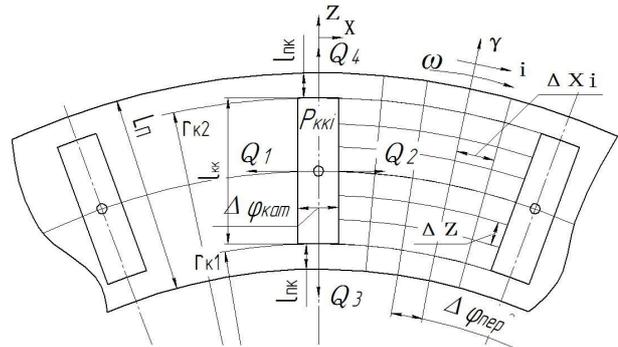


Рис. 2. Развертка половины наружной конической рабочей поверхности подшипника

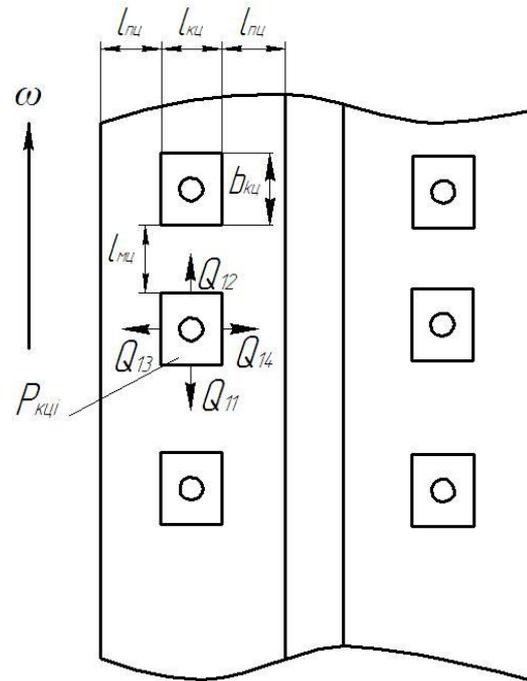


Рис. 3. Развертка внутренней цилиндрической рабочей поверхности подшипника

$$Q_3 = \frac{h_{1,i+1}^3 (P_{КК,i} - P_{СЛ}) R_{КАМ} \cdot \Delta \varphi_{КАМ}}{12\mu \cdot l_{ПК} \cdot \text{Sin} \alpha},$$

$$Q_4 = \frac{h_{1,i+1}^3 (P_{КК,i} - P_{СЛ}) R_{КАМ2} \cdot \Delta \varphi_{КАМ}}{12\mu \cdot l_{ПК} \cdot \text{Sin} \alpha}, \quad (5)$$

$$Q_{V1} = \frac{(R_{КАМ1} + R_{КАМ2}) \cdot \Delta \varphi_{КАМ} \cdot l_{КК} \cdot V_M}{2 \cdot \text{Sin} \alpha},$$

$$Q_{11} = -\frac{\omega \cdot R_{ВК} \cdot h_{2,i} \cdot l_{КЦ} + \frac{h_{2,i}^3 (P_{КЦ,i} - P_{КЦ,i-1}) I_{КЦ}}{12\mu \cdot l_{МЦ}}}{2},$$

$$Q_{12} = \frac{\omega \cdot R_{ВК} \cdot h_{2,i+2} \cdot l_{КЦ} + \frac{h_{2,i+2}^3 (P_{КЦ,i} - P_{КЦ,i+1}) I_{КЦ}}{12\mu \cdot l_{МЦ}}}{2},$$

$$Q_{13} = Q_{14} = \frac{h_{2,i+1}^3 (P_{КЦ,i} - P_{СЛ}) b_{КЦ}}{12\mu \cdot l_{ПЦ}},$$

$$Q_{V2} = b_{КЦ} \cdot l_{КЦ} \cdot V_M,$$

где  $\alpha$  – угол образующей конуса наружной поверхности подшипника (рис. 1);  $R_{КАМ1}$  и  $R_{КАМ2}$  – радиусы подшипника в начале камеры и в её конце;  $\Delta\varphi_{ПЕР}$  – угловой шаг сотки на перемычках между камерами;  $N_{ПЕР}$  – число узлов сотки на межкамерной перемычке в окружном направлении (ось  $x$ );  $\Delta\varphi_{КАМ}$  – угловой размер камеры в окружном направлении;  $h_{1,i}$  и  $h_{2,i}$  – зазоры в подшипнике, соответственно на наружной и внутренней рабочих поверхностях;  $\mu$  – динамическая вязкость рабочей жидкости;  $\omega$  – угловая скорость вращения вала с диском;  $R_{НК}$  и  $R_{БК}$  – радиусы наружной и внутренней рабочих поверхностей подшипника по середине длины камер;  $l_{КК}$  и  $l_{КЦ}$  – длины камер наружной конической и внутренней цилиндрической поверхностей подшипника (см. рис. 2 и 3);  $l_{МК}$  и  $l_{МЦ}$  – длины межкамерных перемычек, соответственно на наружной и внутренней рабочих поверхностях;  $l_{ПК}$  и  $l_{ПЦ}$  – длины торцовых перемычек на наружной и внутренней рабочих поверхностях;  $P_{СЛ}$  – давление рабочей жидкости на сливе из подшипника;  $b_{КК}$  и  $b_{КЦ}$  – ширины камер (для конической поверхности по середине длины камеры);  $Q_{V1}$  и  $Q_{V2}$  – расходы рабочей жидкости, обусловленные движением вала с диском вдоль линии центров диска и подшипника;  $V_M$  – скорость движения вала с диском вдоль линии центров диска и подшипника.

Из уравнений баланса расходов (1) и (2) после подстановки выражений (3), (4), (5) запишем зависимости для определения давлений в  $i$ -й камере, приспособленные для численной реализации.

$$(P_{КК,i})_{n+1} = a_{10,i} \cdot \sqrt{P_{ВХ} - (P_{КК,i})_n} - a_{12,i} (P_{КК,i-1})_n - a_{13,i} (P_{КК,i+1})_n - a_{11,i}, \quad (6)$$

$$(P_{КЦ,i})_{n+1} = b_{9,i} \cdot \sqrt{P_{ВХ} - (P_{КЦ,i})_n} - b_{11,i} (P_{КЦ,i-1})_n - b_{12,i} (P_{КЦ,i+1})_n - b_{10,i}, \quad (7)$$

где  $a_{10,i}$ ,  $a_{11,i}$ ,  $a_{12,i}$ ,  $a_{13,i}$  и  $b_{9,i}$ ,  $b_{10,i}$ ,  $b_{11,i}$ ,  $b_{12,i}$  – постоянные в процессе итерации коэффициенты.

Задаваясь начальными значениями давлений в камерах  $(P_{КК,i})_n$  и  $(P_{КЦ,i})_n$  получают новые значения давлений на  $n+1$  шаге по уравнениям (6) и (7). Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока предыдущее и последующее значения давлений в камерах будут меньше заданной точности расчёта ( $\varepsilon_i$ ), т.е.

$$(P_{КК,i})_{n+1} - (P_{КК,i})_n \leq \varepsilon_i,$$

$$(P_{КЦ,i})_{n+1} - (P_{КЦ,i})_n \leq \varepsilon_i.$$

Давления на межкамерных перемычках определяют из уравнений Рейнольдса, которые с учётом общепринятых в гидродинамической теории смазки допущениях и обобщённые на случай турбулентного течения рабочей жидкости для наружной конической и внутренней цилиндрической рабочих поверхностей подшипника будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{h_1^3}{K_{X1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial Z_1} \left( \frac{h_1^3}{K_{Z1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial Z_1} \right) = \\ = 6\mu \frac{\partial (U_{1,1} \cdot h_1)}{\partial X_1} + 12\mu V + \\ + \rho \omega^2 R_{CP} \cdot \text{Sin}\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \left( \frac{h_1^3}{K_{Z1}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{h_2^3}{K_{X2}} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial X_2} \right) + \frac{\partial}{\partial Z_2} \left( \frac{h_2^3}{K_{Z2}} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial Z_2} \right) = \\ = 6\mu \frac{\partial (U_2 \cdot h_2)}{\partial X_2} + 12\mu V. \end{aligned} \quad (9)$$

В уравнении Рейнольдса (8), записанном для наружной конической поверхности подшипника, введено слагаемое

$$\rho \omega^2 R_{CP} \cdot \text{Sin}\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \left( \frac{h_1^3}{K_{Z1}} \right),$$

учитывающее влияние центробежных сил инерции, как это делается в работе [1].

Уравнения Рейнольдса (8) и (9) обобщены на случай турбулентного течения смазки с помощью коэффициентов  $K_{X1}$ ,  $K_{Z1}$  и  $K_{X2}$ ,  $K_{Z2}$ . Выражения для коэффициентов турбулентности в соответствии с методом В.Н. Константинеску имеют вид:

$$K_{X1} = 1 + 0,044 \cdot (\sigma_{*1}^2 \cdot \text{Re}_1)^{0,725},$$

$$K_{Z1} = 1 + 0,0247 \cdot (\sigma_{*1}^2 \cdot \text{Re}_1)^{0,65},$$

$$K_{X2} = 1 + 0,044 \cdot (\sigma_{*2}^2 \cdot \text{Re}_2)^{0,725},$$

$$K_{Z2} = 1 + 0,0247 \cdot (\sigma_{*2}^2 \cdot \text{Re}_2)^{0,65}.$$

где  $\sigma_{*1} = 0,125 \cdot \text{Re}_1^{0,07}$ ,  $\sigma_{*2} = 0,125 \cdot \text{Re}_2^{0,07}$ ,

$$\text{Re}_1 = \frac{U_1 \cdot h_1}{\nu} \text{ и } \text{Re}_2 = \frac{U_2 \cdot h_2}{\nu} \text{ – числа Рейнольдса;}$$

$\nu$  – кинематическая вязкость рабочей жидкости.

В уравнения Рейнольдса (8) и (9) также входят:  $x_1, z_1$  и  $x_2, z_2$  – оси координат;  $P_1$  и  $P_2$  – давления на наружной и внутренней рабочих поверхностях подшипника (на межкамерных перемычках);  $\mu$  – динамическая вязкость рабочей жидкости;  $\rho$  – плотность рабочей жидкости;  $\omega$  – угловая скорость вращения вала с диском внутри подшипника;

$R_{CP} = (R_{КАМ1} + R_{КАМ2})$  – средний радиус наружной конической поверхности подшипника;

$h_1$  и  $h_2$  – текущие значения зазоров в наружной и внутренней частях подшипника;

$U_1$  и  $U_2$  – окружные скорости наружной и внутренней рабочих поверхностей диска, установленного на вал;

$V$  – скорость сближения диска с валом и подшипника.

Выражения для скоростей точек диска вдоль линии центров  $V$  и перпендикулярно этой линии  $U$  имеют вид:

$$U_{1,i} = \omega \cdot R_{\text{срД1}} + \frac{de}{dt} \sin(\varphi - \beta_0) - e \frac{d\beta_0}{dt} \cos(\varphi - \beta_0),$$

$$U_2 = \omega \cdot R_{\text{Д2}} + \frac{de}{dt} \sin(\varphi - \beta_0) - e \frac{d\beta_0}{dt} \cos(\varphi - \beta_0),$$

$$V = \frac{de}{dt} \cos(\varphi - \beta_0) + e \frac{d\beta_0}{dt} \sin(\varphi - \beta_0),$$

где  $U_{1,i}$  и  $U_2$  – скорости точек наружной конической и внутренней цилиндрической рабочих поверхностей диска.

Для решения уравнений Рейнольдса (8) и (9) применим метод конечных разностей в сочетании с методом продольно-поперечной прогонки. При записи этих уравнений в конечно-разностном виде поверхности между камерами наружной и внутренней частей подшипника покроем сетками с шагами  $\Delta X_{1,j}$ ,  $\Delta Z_1$  и  $\Delta X_2$ ,  $\Delta Z_2$  и частные производные запишем в конечно-разностном виде; используя пятиточечный шаблон:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{h_1^3}{K_{X1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial X_1} \right) &= \\ &= \frac{h_{1,i}^3}{K_{X1,i}} \frac{(P_{1,i+1,j} - 2P_{1,i,j} + P_{1,i-1,j})}{\Delta X_{1,j}^2} + \\ &+ \frac{3h_{1,i}^2 (h_{1,i+1} - h_{1,i-1}) \cdot (P_{1,i+1,j} - P_{1,i-1,j})}{4K_{X1,i} \cdot \Delta X_{1,j}^2} - \\ &- \frac{h_{1,i}^3 (K_{X1,i+1} - K_{X1,i-1}) \cdot (P_{1,i+1,j} - P_{1,i-1,j})}{4K_{X1,i}^2 \cdot \Delta X_{1,j}^2}, \\ \frac{\partial}{\partial Z_1} \left( \frac{h_1^3}{K_{Z1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial Z_1} \right) &= \\ &= \frac{h_{1,i}^3}{K_{Z1,i}} \frac{(P_{1,i,j+1} - 2P_{1,i,j} + P_{1,i,j-1})}{\Delta Z_1^2} - \\ &- \frac{h_{1,i}^3 (K_{Z1,j+1} - K_{Z1,j-1}) \cdot (P_{1,i,j+1} - P_{1,i,j-1})}{4K_{Z1,i}^2 \cdot \Delta Z_1^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1,i,j} &= 6\mu \frac{\partial}{\partial X_1} (U_{1,j} \cdot h_1) + 12\mu V + \\ &+ \rho \omega^2 R_{\text{ср}} \text{Sin} \alpha \frac{\partial}{\partial Z_1} \left( \frac{h_1^3}{K_{Z1}} \right) = 12\mu V_1 + \\ &+ \frac{6\mu h_{1,i} (U_{1,i+1,j} - U_{1,i-1,j})}{2 \cdot \Delta X_{1,j}} + \\ &+ \frac{6\mu U_{1,i,j} (h_{1,i+1,j} - h_{1,i-1,j})}{2 \cdot \Delta X_{1,j}} + \\ &+ \frac{\rho \omega^2 R_{\text{срД1}} \text{Sin} \alpha \cdot h_{1,i}^3 (K_{Z1,j+1} - K_{Z1,j-1})}{2K_{Z1,i,j}^2 \cdot \Delta Z_1}, \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_2$ ;  $N_1$  и  $N_2$  – число узлов сетки, соответственно в направлениях  $i$  и  $j$ .

Так как зазоры слева и справа наружной конической части подшипника разные. Запишем уравнения Рейнольдса в виде конечных разностей для левой и правой конических частей наружной поверхности подшипника.

$$T_{9,i} P_{1,i+1,j} + T_{10,i} P_{1,i-1,j} + T_{11,i} P_{1,i,j} + T_{12,i} P_{1,i,j-1} + T_{13,i} P_{1,i,j+1} = F_{1,i,j}, \quad (10)$$

$$L_{9,i} P_{11,i+1,j} + L_{10,i} P_{11,i-1,j} + L_{11,i} P_{11,i,j} + L_{12,i} P_{11,i,j-1} + L_{13,i} P_{11,i,j+1} = F_{11,i,j}, \quad (11)$$

где  $F_{1,i,j} = T_{6,i} + T_{7,i} + T_{8,i} + 12\mu V_1$ ,

$$F_{11,i,j} = L_{6,i} + L_{7,i} + L_{8,i} + 12\mu V_1.$$

Запишем уравнение Рейнольдса в виде конечных разностей для внутренней (цилиндрической) части подшипника.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{h_2^3}{K_{X2}} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial X_2} \right) &= \\ &= \frac{h_{2,i}^3}{K_{X2}} \frac{(P_{2,i+1,j} - 2P_{2,i,j} + P_{2,i-1,j})}{\Delta X_2^2} + \\ &+ \frac{3h_{2,i}^2 (h_{2,i+1} - h_{2,i-1}) \cdot (P_{2,i+1,j} - P_{2,i-1,j})}{K_{X2,i} \cdot 4\Delta X_2^2} - \\ &- \frac{h_{2,i}^3 (K_{X2,i+1} - K_{X2,i-1}) \cdot (P_{2,i+1,j} - P_{2,i-1,j})}{K_{X2,i}^2 \cdot 4\Delta X_2^2}, \\ \frac{\partial}{\partial Z_2} \left( \frac{h_2^3}{K_{Z2}} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial Z_2} \right) &= \\ &= \frac{h_{2,i}^3}{K_{Z2,i}} \frac{(P_{2,i,j+1} - 2P_{2,i,j} + P_{2,i,j-1})}{\Delta Z_2^2}, \end{aligned}$$

$$F_{2,i,j} = 6\mu \frac{\partial}{\partial X_2} (U_2 \cdot h_2) + 12\mu V =$$

$$= \frac{6\mu h_{2,i} (U_{2,i+1} - U_{2,i-1})}{2 \cdot \Delta X_2} +$$

$$+ \frac{6\mu U_{2,i} (h_{2,i+1} - h_{2,i-1})}{2 \cdot \Delta X_2} + 12\mu V_i,$$

где  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_2$ ;  $N_1$  и  $N_2$  - число узлов сетки, соответственно в направлениях  $i$  (окружное) и  $j$  (осевое).

Запишем уравнение Рейнольдса в виде конечных разностей для внутренней части подшипника.

$$S_{5,i} P_{2,i+1,j} + S_{6,i} P_{2,i,j} + S_{7,i} P_{2,i-1,j} + S_{12,i} P_{1,i,j-1} +$$

$$+ T_{13,i} P_{1,i,j+1} = F_{1,i,j}, \quad (12)$$

Коэффициенты, входящие в уравнения (10), (11) и (12)  $T_i$ ,  $L_i$ , и  $S_i$ , являются постоянными величинами в процессе итерации.

Решение задачи в методе прогонки ищется в виде:

$$P_i = \alpha_i P_{i+1} + \beta_i, \quad (13)$$

где  $i = 2, 3, \dots, N-1$  - номера узлов сетки;  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  - коэффициенты прогонки, определяемые по следующим формулам:

$$\alpha_i = -\frac{A_i}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}; \beta_i = \frac{F_i - C_i \beta_{i-1}}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}. \quad (14)$$

Подробно метод продольно-поперечной прогонки изложен в работе [2].

Зная давления в камерах и узлах межкамерных перемычек, можно определить грузоподъемность подшипника.

Суммарную радиальную грузоподъемность обоих рабочих поверхностей подшипника (наружной и внутренней) в проекциях на линию и центров диска и подшипника  $I_\Sigma$  и направлено ей перпендикулярное  $J_\Sigma$  запишем в следующем виде:

$$I_\Sigma = I_H + I_B,$$

$$J_\Sigma = J_H + J_B, \quad (15)$$

где

$$I_H = WH1_{Y,KAM} + WH2_{Y,KAM} + WHL_{M,Z,Y} +$$

$$+ WHП_{M,Z,Y} + WHЛ_{T1,Z,Y} + WHЛ_{T2,Z,Y} +$$

$$+ WHП_{T1,Z,Y} + WHП_{T2,Z,Y} + WHЛ_{TM1,Z,Y} +$$

$$+ WHЛ_{TM2,Z,Y} + WHП_{TM1,Z,Y} + WHП_{TM2,Z,Y},$$

$$J_H = WH1_{X,KAM} + WH2_{X,KAM} + WHЛ_{M,Z,X} +$$

$$+ WHП_{M,Z,X} + WHЛ_{T1,Z,X} + WHЛ_{T2,Z,X} +$$

$$+ WHП_{T1,Z,X} + WHП_{T2,Z,X} + WHЛ_{TM1,Z,X} +$$

$$+ WHЛ_{TM2,Z,X} + WHП_{TM1,Z,X} + WHП_{TM2,Z,X},$$

$$I_B = -2(WB_{Y,KAM} + WB_{M,Z,Y} + WB_{T,Z,Y} +$$

$$+ WB_{TM,Z,Y}),$$

$$J_B = -2(WB_{X,KAM} + WB_{M,Z,X} + WB_{T,Z,X} +$$

$$+ WB_{TM,Z,X}),$$

$WH1_{Y,KAM}$ ,  $WH2_{Y,KAM}$ ,  $WH1_{X,KAM}$ ,  $WH2_{X,KAM}$ ,  $WB_{X,KAM}$ ,  $WB_{Y,KAM}$  - проекции грузоподъемностей камер на оси  $X$  и  $Y$  (см. рис. 1);  $WHЛ_{M,Z,Y}$ ,  $WHП_{M,Z,Y}$ ,  $WHЛ_{M,Z,X}$ ,  $WB_{M,Z,Y}$ ,  $WB_{M,Z,X}$  - проекции грузоподъемностей межкамерных перемычек на оси  $Y$  и  $X$ ;  $WHЛ_{T1,Z,Y}$ ,  $WHЛ_{T2,Z,Y}$ ,  $WHП_{T1,Z,Y}$ ,  $WHП_{T2,Z,Y}$ ,  $WHЛ_{T1,Z,X}$ ,  $WHЛ_{T2,Z,X}$ ,  $WHП_{T1,Z,X}$ ,  $WHП_{T2,Z,X}$ ,  $WB_{T,Z,Y}$ ,  $WB_{T,Z,X}$  - проекции грузоподъемностей торцов камер в проекциях на оси  $X$  и  $Y$ ;

$WHЛ_{TM1,Z,Y}$ ,  $WHЛ_{TM2,Z,Y}$ ,  $WHП_{TM1,Z,Y}$ ,  $WHП_{TM2,Z,Y}$ ,  $WHЛ_{TM1,Z,X}$ ,  $WHЛ_{TM2,Z,X}$ ,  $WHП_{TM1,Z,X}$ ,  $WHП_{TM2,Z,X}$ ,  $WB_{TM,Z,Y}$ ,  $WB_{TM,Z,X}$  - проекции грузоподъемностей торцов межкамерных перемычек на оси  $X$  и  $Y$ .

Запишем суммарную осевую грузоподъемность подшипника, создаваемую двумя коническими рабочими поверхностями наружной части подшипника.

$$I_{осев} = (WH12)_{осев} + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (16)$$

где  $(WH12)_{осев}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ , - осевые составляющие камер и межкамерных площадок наружной конической части подшипника.

Зная давления в камерах, можно определить расход рабочей жидкости через подшипник.

$$Q_\Sigma = Q_{наруж} + Q_{внутр}, \quad (17)$$

где  $Q_{наруж} = 2\psi_{ВХ} \pi r_{Ж1}^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \sum_{i=1}^k P_{ВХ} - P_{КК,i}}$  - расход рабочей жидкости через камеры, расположенные на наружной конической рабочей поверхности подшипника,  $k$  - число камер в подшипнике на его половине наружной рабочей поверхности;

$Q_{внутр} = 2\psi_{ВХ} \pi r_{Ж2}^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \sum_{i=1}^m P_{ВХ} - P_{КЦ,i}}$  - расход рабочей жидкости через камеры, расположенные на половине внутренней рабочей поверхности подшипника;  $m$  - число камер на половине внутренней рабочей поверхности подшипника. Описание остальных параметров приведено при записи выражений (3) и (4).

Потери мощности на трение для всего подшипника определяем как сумму потерь на трение для наружной и внутренней рабочих поверхностей.

$$N_{\text{ТР}} = N_{\text{ТР.Н.ПРАВ.}} + N_{\text{ТР.Н.ЛЕВ.}} + 2N_{\text{ТР.В}}, \quad (18)$$

где

$$N_{\text{ТР.Н.ЛЕВ.}} = \mu\omega R_{\text{CP.D1}} \cdot L_{\text{П}} \cdot \Delta x_{1,j} \cdot \lambda_{1,i} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{U_{1,i} k(\text{Re})_{\text{СЛ},i}}{h_{1\text{СЛ},i}} + \frac{\omega R_{\text{CP.D1}} \Delta z}{2} \lambda_{2,j} \sum_{j=1}^{N_2} N_{1,j};$$

$$N_{\text{ТР.Н.ПРАВ.}} = \mu\omega R_{\text{CP.D1}} \cdot L_{\text{П}} \cdot \Delta x_{1,j} \cdot \lambda_{1,i} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{U_{1,i} k(\text{Re})_{\text{СП},i}}{h_{1\text{СП},i}} + \frac{\omega R_{\text{CP.D1}} \Delta z}{2} \lambda_{2,j} \sum_{j=1}^{N_2} N_{2,j}$$

$$N_{\text{ТР.В}} = \mu\omega R_{\text{D2}} \cdot L_{\text{П.В}} \cdot \Delta x_{2,j} \cdot \lambda_{3,i} \sum_{i=1}^{N_3} \frac{U_{2,i} k(\text{Re})_{\text{ВН}}}{h_{2,i}} + \frac{\omega R_{\text{D2}} \Delta z}{2} \lambda_{4,j} \sum_{j=1}^{N_4} N_{3,j},$$

$$N_{1,j} = \lambda_{1,i} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{h_{1\text{СЛ},i} (P_{1,i+1,j} - P_{1,i-1,j})}{2},$$

$$N_{2,j} = \lambda_{1,i} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{h_{1\text{СП},i} (P_{1,i+1,j} - P_{1,i-1,j})}{2},$$

$$N_{3,j} = \lambda_{3,i} \sum_{i=1}^{N_3} \frac{h_{2,i} (P_{2,i+1,j} - P_{2,i-1,j})}{2},$$

$N_1$  - число узлов сетки в окружном направлении (ось x);

$N_2$  - число узлов сетки по длине подшипника  $L_{\text{П}}$  (ось z);

$N_3$  - число узлов сетки в окружном направлении (ось x) для внутренней части подшипника;

$N_4$  - число узлов сетки по длине подшипника  $L_{\text{ПВ}}$  (ось z).

Запишем потери мощности на прокачку

$$N_{\text{пр}} = P_{\text{вх}} Q_{\Sigma}, \quad (19)$$

где  $P_{\text{вх}}$  - давление рабочей жидкости от насоса;

$Q_{\Sigma}$  - суммарный расход рабочей жидкости.

Суммарные потери на трение и прокачку равны их сумме

$$N_{\text{П}\Sigma} = N_{\text{ТР}\Sigma} + N_{\text{пр}}. \quad (20)$$

Амплитудно-частотные характеристики подшипника определяем из решения нелинейных уравнений движения жёсткого одномассового ротора. Рассмотрим уравнения движения диска под дейст-

ствием сил веса и неуравновешенности. Они имеют следующий вид [3]:

$$\frac{G}{g} \left[ \frac{d^2 e}{dt^2} - e \left( \frac{d\beta_0}{dt} \right)^2 \right] = -2I_{\Sigma} + G \cos \beta_0 + q\omega^2 \cos(\omega t - \beta_0 - \beta_{\text{Н}}), \quad (21)$$

$$\frac{G}{g} \left[ \frac{ed^2 \beta_0}{dt^2} + 2 \frac{d\beta_0}{dt} \frac{de}{dt} \right] = -2J_{\Sigma} - G \sin \beta + q\omega^2 \sin(\omega t - \beta_0 - \beta_{\text{Н}}),$$

где  $G = mg$  - вес вала с дисками;

$g$  - ускорение свободного падения;

$e$  - эксцентриситет диска в подшипнике;

$\beta_0$  - угол положения диска в подшипнике;

$I_{\Sigma}$  и  $J_{\Sigma}$  - грузоподъемности подшипника в проекциях на линию центров диска и подшипника (ось y) и направление ей перпендикулярное (ось x), показаны на рис. 1;

$q$  - остаточная неуравновешенность вала;

$\omega$  - угловая скорость вращения диска с валом;

$\beta_{\text{Н}}$  - положение оси отсчета углов.

Рассмотрим алгоритм расчета уравнений движения диска внутри подшипника под действием переменных внешних сил. Задаваясь начальными координатами и скоростями диска решаем совместно уравнения баланса расходов и уравнения Рейнольдса, вычисляя при этом гидродинамические силы  $I_{\Sigma}$  и  $J_{\Sigma}$  действующие на диск. Решая уравнения движения определяем новые координаты и скорости центра диска. Расчет продолжается до получения повторяющихся траекторий диска.

Рассмотренная математическая модель позволяет определять амплитудно-частотные характеристики сдвоенных радиально-упорных гидростатических подшипников.

## Литература

1. Коровчинский, М.В. Теоретические основы работы подшипников скольжения [Текст] / М.В. Коровчинский. - М.: Машигиз, 1969. - 403 с.
2. Токарь, И.Я. Проектирование и расчет опор трения [Текст]: моногр. / И.Я. Токарь. - М.: Машиностроение, 1972. - 167 с.
3. Назин, В.И. Радиальный гидростатический подшипник повышенной несущей способности [Текст] / В.И. Назин // Авиационно-космическая техника и технология. - 2012. - №8 (95). - С. 94 - 100.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. кафедры Л.Г. Бойко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗДВОЄНОГО РАДІАЛЬНО-УПОРНОГО ГІДРОСТАТИЧНОГО ПІДШИПНИКА

*V.I. Nazin*

Розроблено математичну модель зведеного радіально-упорного гідростатичного підшипника, що сприймає радіальні і двосторонні осьові навантаження. Отримано систему рівнянь для визначення тисків у камерах, розташованих на зовнішніх конічних робочих поверхнях і внутрішніх циліндричних робочих поверхнях. Система рівнянь наведена до виду пристосованому для чисельної реалізації, завдяки застосуванню ітераційних методів розв'язання рівнянь. Для визначення тисків на міжкамерних перемичках застосовано рівняння Рейнольдса, узагальнене на випадок розвинутого турбулентного перебігу робочої рідини. Інтегруванням функції розподілу тиску по робочих поверхнях підшипника отримано вирази для визначення гідродинамічних сил. Для визначення амплітудно-частотних характеристик ротора на розглянутих підшипниках застосовані нелінійні диференціальні рівняння руху. Проаналізовано різні чисельні методи розв'язання рівнянь руху диска всередині підшипника і застосований найбільш раціональний метод.

**Ключові слова:** математична модель, гідростатичний підшипник, тиску в камерах, ітераційні методи, міжкамерні перемички, турбулентний протягом робочої рідини, гідродинамічні сили, амплітудно-частотна характеристика, рівняння руху.

### MATHEMATICAL MODEL DOUBLE ANGULAR CONTACT HYDROSTATIC BEARINGS

*V.I. Nazin*

A mathematical model of the double angular contact ball bearings Single hydrostatic perceiving the radial and bilateral axial loads. A system of equations for determining the pressure in the chambers, located on the outer surfaces of the conical work and internal cylindrical working surfaces. The system of equations reduced to a form adapted for numerical implementation, through the use of iterative methods for solving equations. To determine the pressure applied on the webs interchamber Reynolds equation, generalized to the case of the developed turbulent fluid. Integration of the distribution function of the pressure on the bearing surface expressions for the determination of the hydrodynamic forces. To determine the amplitude-frequency characteristics of the rotor bearings applied considered nonlinear differential equations of motion. Analyzed once the various numerical methods for solving the equations of motion of the disk inside the bearing and used The most rational method.

**Keywords:** mathematical model, the hydrostatic bearing, the pressure in the chambers, iterative methods, interchamber jumpers turbulent fluid, the hydrodynamic forces, frequency response, the equations of motion.

**Назін Владимир Иосифович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри теоретической механики, машиноведения и роботомеханических систем Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: dekanat@d2.khai.edu.