

УДК 539.3

А. Г. НИКОЛАЕВ, Е. А. ТАНЧИК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ОБРАЗЦЕ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВОЛОКНАМИ**

*Предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния однонаправленного волокнистого композита, основанная на обобщенном методе Фурье. Рассматривается цилиндрический образец материала с двумя параллельными волокнами. Каждое волокно моделируется круговым цилиндром. Внешняя граница образца находится под действием кусочно-постоянной нормальной нагрузки. Предполагается, что волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей. Аппарат обобщенного метода Фурье позволяет точно удовлетворить условиям на внешней границе образца и на границах раздела фаз. Для определения параметров модели получена разрешающая бесконечная система линейных алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором. Проведено численное моделирование, на основании которого дан анализ распределения напряжений в зоне между волокнами. Приведено сравнение результатов со случаем одного волокна в цилиндрическом образце.*

**Ключевые слова:** локальная модель, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, однонаправленный волокнистый композит.

**Введение**

Современный уровень развития техники и технологии в высокотехнологических областях накладывает повышенные требования на точность и эффективность моделей материалов, которые широко используются в авиации и ракетостроении. Одной из наиболее важных характеристик материалов, которые здесь применяются, является такая комплексная характеристика, как малая масса и одновременно высокая прочность материала. Такой характеристикой обладают материалы типа композитов, в которых присутствуют конструктивно заложенные неоднородности. При современном уровне моделирования появляется возможность конструирования материалов с заранее заданными свойствами вначале на уровне модели, определяя оптимальную структуру, геометрические размеры и механические характеристики неоднородностей. И только после этого, полученные в результате моделирования данные, можно воплощать в реальном материале.

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В монографии [1] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Напряженно-деформированное состояние композита моделируется рас-

пределением напряжений в окрестности нескольких включений (плоская задача) или одного включения в случае зернистого композита.

В статье [2] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В статье [3] представлены исследования по моделированию структуры пористых материалов с малой объемной долей содержания твердой фазы. В качестве моделей рассматриваются главным образом стержневые и оболочечные конструкции. Предложена классификация моделей по степени упорядоченности структурных единиц. Представляется, что наиболее адекватной с точки зрения морфоло-

гии и деформационных свойств является модель, состоящая из хаотически ориентированных 14-гранных ячеек. Для анализа представленной модели предлагается метод выделения структурного элемента.

В работе [4] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В. З. Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного однородного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В работе [5] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работах [6, 7] предложен метод определения напряженного состояния конечного цилиндра, основанный на принципе суперпозиции и разложении тензора напряжений в ряды Фурье и Бесселя-Дини. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В работе [8] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В работах [9, 10] введены локальные осесимметричные модели напряженного состояния пористого и зернистого композиционного материалов с порами или зёрнами в форме вытянутых сфероидов. В работе [11] разработана локальная неосесимметричная математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала. В этих моделях напряжения в композитах описываются при помощи обобщенного метода Фурье.

В данной работе развита локальная существенно неосесимметричная модель напряженно-дефор-

мированного состояния однонаправленного волокнистого композита, основанная на обобщенном методе Фурье. Волокна имеют цилиндрическую форму. Рассматривается случай параллельного расположения волокон в упругом цилиндрическом образце, который находится под действием кусочно-постоянной нормальной нагрузки, приложенной к его границе. Получены распределения напряжений в окрестности двух волокон и дано сравнение результатов со случаем одного волокна.

### Постановка задачи

Рассматривается цилиндрический образец  $\Omega_0$  однонаправленного волокнистого композиционного материала, волокна в котором моделируются двумя цилиндрическими включениями  $\Omega_j$  ( $j=1,2$ ) (рис. 1). Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$  системы координат, начала которых отнесены к центрам включений  $O_j$  ( $j=0,1,2$ ), расположенным в одной плоскости  $z=0$ . Радиусы цилиндров  $\Omega_j$  равны  $R_j$  ( $j=0,1,2$ ), границы цилиндров  $\Gamma_j$  описываются уравнениями  $\rho_j = R_j$ . Предполагается, что упругие постоянные матрицы и включений соответственно равны  $(G_0, \sigma_0)$  и  $(G_j, \sigma_j)$ .

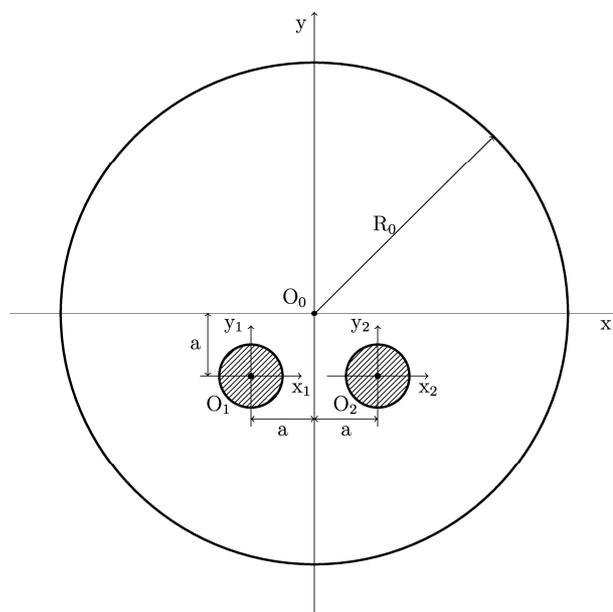


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Вектор упругих перемещений удовлетворяет следующей краевой задаче для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

с граничным условием на внешней границе

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_0} = T\mathbf{e}_\rho = \begin{cases} T, & |z| \leq h, \\ 0, & |z| > h \end{cases} \quad (2)$$

и условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_j} = \mathbf{FU}_j|_{\Gamma_j}, \quad (3)$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}_j$  - векторы перемещений в матрице и в  $j$ -ом включении,  $\mathbf{FU}$ ,  $\mathbf{FU}_j$  - соответствующие векторы напряжений на поверхностях  $\Gamma_j$ ,  $\sigma$  - коэффициент Пуассона. Условие (3), (4) отражает идеальный контакт между матрицей и волокном.

### Решение задачи

Общее решение краевой задачи (1) – (4) в областях  $\Omega_0$  и  $\Omega_j$  ищется в виде суперпозиции базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам включений:

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,\lambda,m}^{(0)} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \quad \text{в } \Omega_0; \quad (5)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda \quad \text{в } \Omega_j; \quad (6)$$

Указанные выше базисные решения представим в виде [12]:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_s \mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z); \quad s = 1, 3; \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_2 = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi \left[ \mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z] \right];$$

$$\mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda\rho) \\ I_m(\lambda\rho) \end{Bmatrix},$$

где  $\mathbf{D}_1 = \nabla$ ,  $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$  (здесь  $i$  - мнимая единица);  $I_m(x)$  - модифицированная функция Бесселя,  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m K_m(|x|)$ ,  $K_m(x)$  - функция Макдональда;  $\chi = 3 - 4\sigma$ ,  $\mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}$  - полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

В развернутой координатной форме базисные перемещения (7) - (8) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp \mathbf{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_{-1} \mp \mp \mathbf{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_1 + i \mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp (D - \chi) \left[ \mathbf{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_{-1} + \mathbf{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_1 \right] + i \mathbf{D} \mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \pm \mathbf{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_{-1} \mp \mp \mathbf{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_1, \quad (11)$$

где  $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ . Базис  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$  связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \end{cases} \quad (12)$$

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид:

$$\mathbf{FU} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \text{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (13)$$

Применив к формулам (9) - (11) оператор (13) на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$  получим:

$$\mathbf{FU}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) = \frac{2G}{R_j} \left\{ \mp \mathbf{D} \mathbf{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_{-1} \mp \mp \mathbf{D} \mathbf{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_1 + i \mathbf{D} \mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_0 \right\}; \quad (14)$$

$$\mathbf{FU}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) = \frac{2G}{R_j} \left\{ \mp [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R_j^2 + (2\sigma-3)D] \mathbf{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_{-1} \mp [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R_j^2 + (2\sigma-3)D] \times \times \mathbf{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_1 + i [m^2 + \lambda^2 R_j^2 + (2\sigma-2)D] \times \times \mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_0 \right\}, \quad (15)$$

$$\mathbf{FU}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) = \frac{G}{R_j} \left\{ \pm (D+m-1) \mathbf{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_{-1} \mp \mp (D-m-1) \mathbf{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_1 - - i m \mathbf{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R}_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_0 \right\}. \quad (16)$$

### Теоремы сложения

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совме-

щенных с центрами пары цилиндров. Справедливы следующие теоремы сложения [12]:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2); \quad (17)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{\lambda,m}^{+(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1); \quad (18)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{\lambda,m}^{-(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2); \quad (19)$$

$$f_{1,\lambda,m}^{(33)l} = (-1)^l u_{\lambda,m-1}^{+(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}), \quad (20)$$

$$f_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = u_{\lambda,m-1}^{-(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}), \quad (21)$$

$$\text{где } \tilde{D}_{s,t}^{(ij)} = \left[ \delta_{st} + \delta_{ti} \delta_{s2} \rho_{ij} \frac{\partial}{\partial \rho_{ij}} \right].$$

### Разрешающая система уравнений

Используя теоремы сложения (17) – (19), представим вектор перемещения  $\mathbf{U}$  в системе координат с началом в точке  $O_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,\lambda,m}^{(j)} \times \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{0j} u_{\lambda,m-1}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \times \\ & \times \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda + \\ & + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,\lambda,m}^{(0)} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \quad (22) \end{aligned}$$

и с началом в точке  $O_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \\ & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,\lambda,m}^{(3-j)} \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{12} u_{\lambda,m-1}^{+(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}) \times \\ & \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,\lambda,m}^{(0)} \times \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{0j} u_{\lambda,m-1}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda, \quad (23) \end{aligned}$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_{s,\lambda,m}^{(j)}$ ,  $B_{s,\lambda,m}^{(j)}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \{ A_{s,\lambda,m}^{(0)} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\mathbf{R}_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\mathbf{R}_0) \times \\ & \times \sum_{j=1}^2 \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,\lambda,l}^{(j)} \tilde{D}_{s,t}^{0j} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \} = \\ & = \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \{ A_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\mathbf{R}_j, \mathbf{G}_0, \sigma_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\mathbf{R}_j, \mathbf{G}_0, \sigma_0) \times \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,\lambda,l}^{(3-j)} (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{12} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}) + \\ & + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\mathbf{R}_j, \mathbf{G}_0, \sigma_0) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \} = \\ & = \sum_{s=1}^3 B_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\mathbf{R}_j, \mathbf{G}_j, \sigma_j) \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \{ A_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\mathbf{R}_j, \sigma_0) + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\mathbf{R}_j, \sigma_0) \times \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,\lambda,l}^{(3-j)} (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{12} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}) + \\ & + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\mathbf{R}_j, \sigma_0) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \} = \\ & = \sum_{s=1}^3 B_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\mathbf{R}_j, \sigma_j), \quad (26) \end{aligned}$$

$$j=1, 2; \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

$$\text{где } \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) = \left( \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(0)} \right)$$

$$\mathbf{G}_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) = \mp \frac{2\mathbf{G}}{\mathbf{R}} \tilde{D} \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}),$$

$$\mathbf{G}_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) = \pm \frac{2\mathbf{G}}{\mathbf{R}} \tilde{D} \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}),$$

$$\mathbf{G}_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) = \frac{2\mathbf{G}}{\mathbf{R}} i \tilde{D} \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R});$$

$$\mathbf{G}_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) = \mp \frac{2\mathbf{G}}{\mathbf{R}} \times$$

$$\times \left[ (m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 \mathbf{R}^2 + (2\sigma-3)\mathbf{D} \right] \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}),$$

$$\mathbf{G}_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) = \mp \frac{2\mathbf{G}}{\mathbf{R}} \times$$

$$\times \left[ (m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 \mathbf{R}^2 + (2\sigma-3)\mathbf{D} \right] \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}),$$

$$\mathbf{G}_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) =$$

$$= \frac{2\mathbf{G}}{\mathbf{R}} i \left[ m^2 + \lambda^2 \mathbf{R}^2 + (2\sigma-2)\mathbf{D} \right] \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\mathbf{R});$$

$$\mathbf{G}_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \sigma) = \mp \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{R}} (\mathbf{D} - m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\mathbf{R}),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, G, \sigma) = -\frac{G}{R} i m \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, G, \sigma) = \pm \frac{G}{R} (D+m-1) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R, \sigma) = (H_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, H_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, H_{s,\lambda,m}^{\pm(0)})$$

$$H_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = i \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R);$$

$$H_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \mp (D-\chi) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp (D-\chi) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R);$$

$$H_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \pm \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = 0,$$

$$\tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R) = \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda R) \\ I_m(\lambda R) \end{Bmatrix}.$$

Оператор системы уравнений (24) – (26) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [13].

### Анализ результатов

Система уравнений решена методом редукции по индексу  $m$  при фиксированном  $\lambda$ , т.е. бесконечная система уравнений заменяется конечной системой, в которой индексы меняются в диапазоне  $m, l = -m_{\max}, m_{\max}$ . Рассматривались случаи  $m_{\max} = 5, 10, 20$ . Метод показал хорошую сходимость уже при  $m_{\max} = 5$ . Численный анализ решения задачи проведен для двух одинаковых цилиндрических включений. Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и волокон приняты равными соответственно  $\sigma_0 = 0,38$  и  $\sigma_j = 0,21$ .

На рис. 2 приведены распределения напряжений  $\sigma_y / T$  на линии, соединяющей центры волокон в зависимости от относительного расстояния между ними  $R_j / a$  для низкоимпульсных волокон  $G_j / G = 25$ . Когда волокна далеко расположены друг от друга наблюдается незначительное изменение напряжения на рассматриваемом участке. С приближением волокон друг к другу на границе раздела фаз имеется зона концентрации напряжений

(более чем в два раза при  $a / R_j = 1,2$  по сравнению с  $a / R_j = 2,0$ ).

На рис. 3 представлены графики напряжений  $\sigma_x / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от ширины области, по которой прикладывается к образцу нормальная внешняя нагрузка.

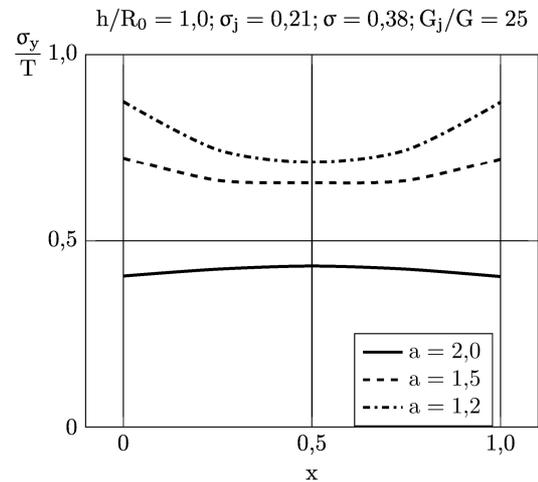


Рис. 2. Напряжения  $\sigma_y / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними

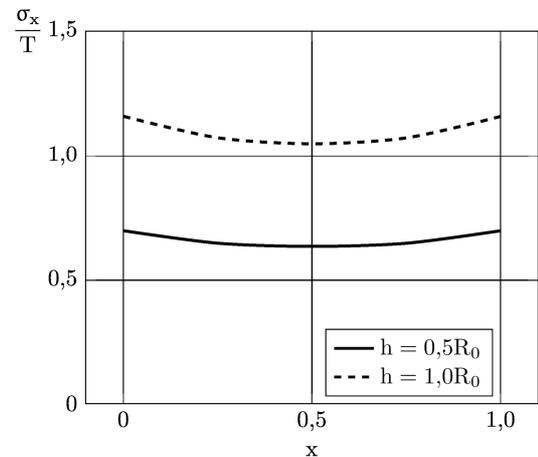


Рис. 3. Напряжения  $\sigma_x / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от величины  $h / R_0$

Численный анализ показал, что распределение напряжений  $\sigma_y / T$  не существенно зависит от отношения  $G_j / G$ . Иначе обстоит дело с напряжением  $\sigma_z / T$ . На рис. 4 представлены графики напряжений  $\sigma_z / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения жесткостей материалов включений и матрицы. Из анализа графиков видно, что наблюдается характерный рост

напряжений при переходе от низкомодульных волокон к высокомодульным.

В ходе исследования было проведено сравнение полученных результатов для образца с двумя волокнами с распределением напряжений в цилиндре с одним включением. На рис. 5 приводятся графики напряжений  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры включений для исходного случая и случая одного включения.

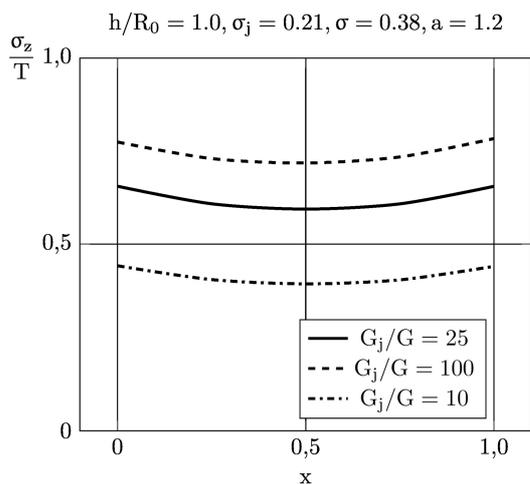


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения жесткостей материалов включений и матрицы

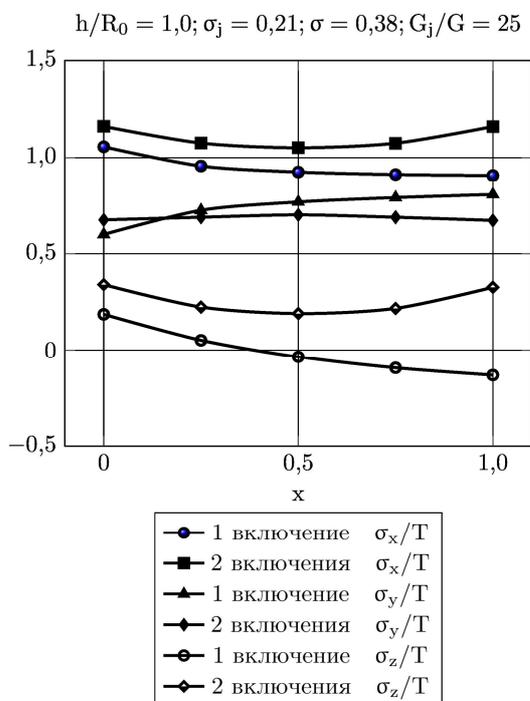


Рис. 5. Сравнение главных компонент тензора напряжений для одного и двух волокон в цилиндрическом образце

## Заключение

Предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния однонаправленного волокнистого композита, основанная на представлении образца материала упругим цилиндром с двумя упругими цилиндрическими включениями. В аналитическом виде строятся векторы перемещения и тензор напряжений отдельно в области матрицы и включений. Предполагается, что образец композита подвержен действию кусочно-постоянной нормальной нагрузки, а волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей. Граничные условия и условия сопряжения удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Параметры модели находятся из разрешающей системы, которая допускает эффективное численное решение. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации, выявлен ряд механических эффектов. Достоверность результатов подтверждается сравнением их со случаем цилиндрического образца с одним волокном. Анализ сходимости численного решения к точному показал высокую эффективность методики, позволяющей, удерживая лишь небольшое число уравнений и неизвестных в разрешающей системе, получать результаты с высокой точностью.

## Литература

1. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г. А. Ванин. - К. : Наук. думка. - 1985. - 304 с.
2. Гаришин, О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2003. - Т. 9, № 3. - С. 278-286.
3. Методы расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) [Текст] / Д. А. Черноус, Е. М. Петроковец, Д. А. Конек, С. В. Шилько // Механика композиционных материалов и конструкций. - М. : ИПМ РАН. - Т. 7, № 4. - 2001. - С. 533-545.
4. Гордеев, А. В. Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // Механика композиционных материалов и конструкций. - М. : ИПМ РАН. - Т. 16, № 1. - 2010. - С. 106-116.
5. Khoroshun, L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites [Text] / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. - 2000. - V. 36, No 10. - P. 1284-1316.
6. Meleshko, V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal

loadings [Text] / V. V. Meleshko, Yu. V. Tokovyy // J. Eng. Math. – 2013. – V. 78. – P. 143 – 166.

7. Токовий, Ю. В. Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні [Текст] / Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 144 – 151.

8. Zhong, Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains [Text] / Z. Zhong, Q. P. Sun // Int. Journal of Solids and Structures. – 2002. - V. 39, Issue 23. – P. 5753-5765.

9. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». - 2009. - Т. 2 (58). - С. 48-58.

10. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала

[Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 1(98). – С. 14–18.

11. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. - 2010. - Т. 922. - С. 4-19.

12. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе [Текст] / А. Г. Николаев. - Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. - 109 с. - Деп. в ГНТБ України 21.06.93, № 1178 - Ук 93.

13. Николаев, А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доповіди НАН України. - 1998. - Т. 2. - С. 78-83.

Поступила в редакцію 02.12.2013, рассмотрена на редколлегии 11.12.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр. В. А. Ванін, ИПМаш НАН України, Харьков.

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ЦИЛІНДРИЧНОМУ ЗРАЗКУ З ДВОМА ПАРАЛЕЛЬНИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВОЛОКНАМИ

*О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчик*

Запропоновано локальну модель напружено-деформованого стану односпрямованого волокнистого композиту, що ґрунтується на узагальненому методі Фур'є. Розглядається циліндричний зразок матеріалу з двома паралельними волокнами. Кожне волокно моделюється круговим циліндром. Зовнішня межа зразка знаходиться під дією кусково-постійного нормального навантаження. Передбачається, що волокна знаходяться в умовах ідеального контакту з матрицею. Апарат узагальненого методу Фур'є дозволяє точно задовольнити умовам на зовнішній границі зразка та на межах розділу фаз. Для визначення параметрів моделі отримано розв'язку нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь із фредгольмовим оператором. Проведено чисельне моделювання, на підставі якого дано аналіз розподілу напружень у зоні між волокнами. Наведено порівняння результатів з випадком одного волокна в циліндричному зразку.

**Ключові слова:** локальна модель, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, односпрямований волокнистий композит.

## STATE OF STRESS IN A CYLINDRICAL SAMPLE WITH TWO PARALLEL CYLINDRICAL FIBERS

*A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik*

Proposed a local model of the stress-strain state of a unidirectional fiber composite, based on the generalized Fourier method. We consider a cylindrical sample of material with two parallel fibers. Each fiber is modeled by a circular cylinder. The outer boundary of the sample is subjected to a piecewise constant normal load. It is assumed that the fibers are under perfect contact with the matrix. Apparatus generalized Fourier method can accurately meet the conditions at the outer edge of the sample and at interfaces. To determine the model parameters obtained resolution infinite system of linear algebraic equations with a Fredholm operator. A numerical simulation on the basis of which the analysis of the stress distribution in the zone between the fibers. The comparison results with the case of a single fiber in the cylindrical sample.

**Key words:** local model, boundary conditions, stress-strain state, generalized Fourier method, method of reduction, unidirectional fiber composite.

**Николаев Алексей Георгиевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

**Танчик Евгений Андреевич** – ассистент каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина; e-mail: eug.tanchik@yandex.ru.