

УДК 539.4:517.958:629.7.02

С.А. ХАЛИЛОВ, В.Б. МИНТЮК, Д.А. ТКАЧЕНКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПРИ ОДНОРОДНЫХ ГЛАВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НА ДВУХ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СТОРОНАХ И ПРОИЗВОЛЬНЫХ – НА ДВУХ ДРУГИХ**

Предложено приближённое аналитическое решение для краевых задач в прямоугольнике с бигармоническим оператором, на двух противоположных сторонах которого заданы условия типа Дирихле, а на двух других - краевые условия произвольны. Решение строится проекционным методом с помощью линейно независимой и полной системы ортонормированных функций, первые и вторые производные которых квазиортогональны в соответствующем функциональном пространстве. Погрешность аналитического решения связана со степенью неортогональности названных производных применяемых функций. Апостериорный анализ точности доставляемых решений показал, что эти решения для рассмотренных шести краевых задач мало отличаются от так называемых «критериальных» решений, ранее построенных авторами. Дано сравнение результатов предлагаемых решений с результатами, полученными по методу конечного элемента. Сделаны соответствующие выводы.

Ключевые слова: бигармонический оператор, однородные главные краевые условия, приближённое аналитическое решение, апостериорный анализ поточечной сходимости и её априорная оценка.

Введение

Существует обширный класс задач естествознания, описываемых дифференциальным уравнением (уравнениями) в частных производных, содержащим бигармонический оператор. Таковыми, например, являются краевые задачи теории пластин и оболочек, в которых он является старшим. Корректная постановка краевых задач для полигармонического оператора в n -мерной области подробно исследована в работах академика С.Л. Соболева [1, 2]. К сожалению, точные решения означенных краевых задач можно получить только в редких «счастливых» случаях. К ним не относится краевая задача с простейшими условиями типа Дирихле, хотя именно эта задача представляет особый интерес при моделировании работы тонкостенных пространственных систем, в состав которых входят гладкие и подкреплённые пластины и оболочки, являющиеся основными несущими элементами отмеченных систем, включая, прежде всего, конструкции авиационно-космической техники.

При анализе таких систем даже самые современные численные методы (например, метод конечного элемента) не обеспечивают необходимую точность получаемых результатов. Поэтому на первый план выдвигается проблема построения аналитических (хотя и приближённых) решений, обладающих требуемой для практики точностью, что может быть

достигнуто, например, применением тех или иных вариационных принципов и соответствующих им прямых методов. Апостериорный анализ точности приближённых аналитических решений может быть проведен лишь в тех случаях, когда известны так называемые «критериальные» (численные или аналитико-численные) решения, полностью исследованные в смысле не только точности, но и устойчивости, и сходимости. Построению таких решений двумерной бигармонической проблемы в прямоугольной области посвящена работа авторов [3], в которой получены аналитико-численные решения с наперёд заданной точностью. Подобные критериальные решения весьма эффективны при анализе отдельных элементов системы, поскольку не стеснены общим числом неизвестных (обычно - достаточно большим) и позволяют обеспечить требуемую точность решений и их частных производных до нужного порядка. Однако эти решения теряют свою эффективность при анализе систем, так как требуют введения очень большого числа неизвестных для достижения необходимой точности, хотя число этих неизвестных всё же намного меньше, чем в методе конечного элемента.

В связи с этим возникает важная проблема построения приближённых, но аналитических решений, вполне пригодных к эффективному применению в анализе систем. Один из вариантов такого решения дан в работе авторов [4], в которой иско-

мое решение представлено в двойных рядах по специальному семейству координатных функций. Там же дан подробный анализ точности в сравнении с ранее полученным критериальным решением [3]. Указанные двойные ряды, обладая прекрасной сходимостью, начинают терять это свойство при дифференцировании. Исходя из этого, в данной работе ставится задача получения приближённых аналитических решений в одинарных рядах, которые обеспечивали бы быструю сходимость не только искомым функциям, но и их производных до требуемого порядка.

1. Постановка задачи и построение приближённого аналитического решения в одинарных рядах

Решаются краевые задачи в прямоугольной области

$$\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1; -1 < y < 1\},$$

описываемые дифференциальным уравнением

$$Aw \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{qa^4}{D} \quad (1)$$

и комбинацией краевых условий, оговоренных ниже.

В уравнении (1) приняты обозначения: $w(x, y)$ – искомая функция; $\lambda = a/b$ – параметр удлинения; $2a, 2b$ – размеры пластины в плане; $q(x, y)$ – функция давления из класса $L_2(\Omega)$ (это

требование можно ослабить); $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – ци-

линдрическая жёсткость пластины постоянной толщины h ; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно.

Краевые условия на сторонах $x = \pm 1$ одни и те же для всех рассматриваемых задач, а именно:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{жёсткая заделка}). \quad (2)$$

На сторонах $y = -1$ и $y = +1$ – ставится одна из пар краевых условий:

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{жёсткая заделка}), \quad (3)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{свободное опирание}), \quad (4)$$

$$\left(\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \left(\lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = 0 \quad (5)$$

(свободный край).

Рассматриваемые варианты схем по типам краевых задач показаны на рис. 1.

Следует отметить, что численные решения третьей и четвёртой краевых задач в литературе полностью отсутствуют. Они не нашли место и в известной монографии [5]. Для второй краевой задачи существует известное точное решение в одинарных тригонометрических рядах (решение Мориса Леви). Это как раз один из немногих «счастливых» случаев. В остальных же случаях речь может идти только о получении приближённых решений.

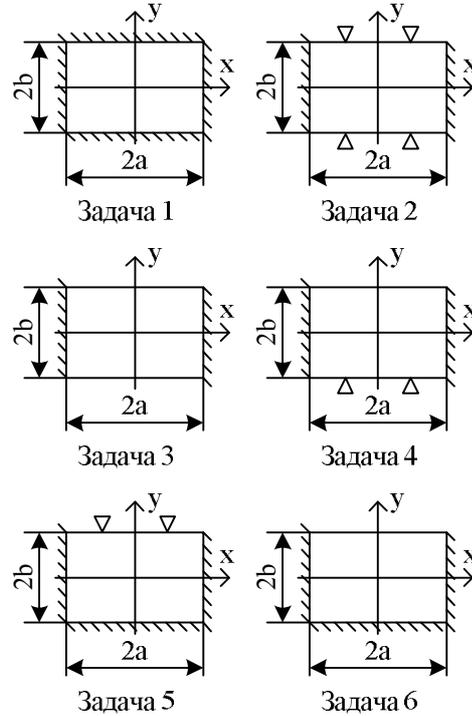


Рис. 1. Схемы опирания пластины:

- жёсткая заделка;
- свободное опирание;
- свободный край.

Необходимые для апостериорного анализа точности предлагаемых ниже приближённых решений критериальные решения отыскиваются с использованием принципа минимума полной потенциальной энергии пластины, реализуемого методом Рэлея-Ритца. При этом привлекаются системы координатных функций $\varphi_{mn}(x, y) = M_m^{(i)}(x)M_n^{(j)}(y)$, $j = 1 \dots 6$, построенные в работе [6]. Они выражаются через многочлены Лежандра $P_k(z)$, $z \in [-1; 1]$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Координатная система $\varphi_{mn}(x, y)$ отвечает основным требованиям, предъявляемым к таким системам [7, 8]. Каждая из функций, входящих в $\varphi_{mn}(x, y)$, удовлетворяет краевым условиям на сторонах пластины $x = \pm 1$, а также на сторонах $y = \pm 1$, если эти условия главные. При наличии естественных краевых условий при $y = +1$ и (или) $y = -1$ (задачи 3-6) последние

выполнять необязательно. Ниже приводятся шесть систем таких функций, привлекаемых для получения критериальных решений шести краевых задач (рис. 1) соответственно:

$$M_k^{(1)}(z) = P_{k+4}(z) - \frac{2(2k+5)}{2k+3}P_{k+2}(z) + \frac{(2k+7)}{2k+3}P_k(z), \quad (6)$$

$$M_k^{(1)}(\pm 1) = M_k^{(1)'}(\pm 1) = 0;$$

$$M_k^{(2)}(z) = P_{k+4}(z) + \frac{(k+3)(k+4)(2k+7)}{(k+1)(k+2)(2k+3)}P_k(z) - \frac{2(2k+5)(k^2+5k+9)}{(k+1)(k+2)(2k+3)}P_{k+2}(z), \quad (7)$$

$$M_k^{(2)}(\pm 1) = M_k^{(2)''}(\pm 1) = 0;$$

$$M_k^{(3)}(z) = P_k(z); \quad (8)$$

$$M_k^{(4)}(z) = P_{k+1}(z) + P_k(z), \quad (9)$$

$$M_k^{(4)}(-1) = 0;$$

$$M_k^{(5)}(z) = P_{k+4}(z) + \frac{(2k+7)}{(k+2)^2}(P_{k+1}(z) - P_{k+3}(z)) + \frac{(2k+7)(k+3)^2}{(2k+3)(k+2)^2}P_k(z) - \frac{(2k+5)(2k^2+10k+15)}{(2k+3)(k+2)^2}P_{k+2}(z), \quad (10)$$

$$M_k^{(5)}(\pm 1) = M_k^{(5)'}(-1) = M_k^{(5)''}(1) = 0;$$

$$M_k^{(6)}(z) = P_{k+2}(z) + \frac{2k+3}{k+1}P_{k+1}(z) + \frac{k+2}{k+1}P_k(z), \quad (11)$$

$$M_k^{(6)}(-1) = M_k^{(6)' }(-1) = 0.$$

При построении приближённого аналитического решения всех шести задач привлекается семейство ортонормированных многочленов $H_k(x)$, предложенное и исследованное в работах [9, 10] и успешно применённое в работах [11, 12, 13, 14, 15 и др.¹]. Эти функции обладают замечательным свойством: будучи сами ортонормированными на сегменте $[-1, 1]$, они имеют квазиортогональные первые и вторые производные. Именно данное обстоятельство позволило получить приближённое аналитическое решение в двойных рядах задачи 1 [4] (решение типа Навье). Кроме того показано, что

система функций $H_m(x)H_n(y)$ является квазиортогональной в энергетическом пространстве H_A положительно определённого оператора A (1) при однородных краевых условиях типа Дирихле, что представляет собой следствие квазиортогональности первых и вторых производных функций $H_k(x)$.

Принимая этот факт во внимание, будем искать приближённое аналитическое решение всех поставленных краевых задач в виде

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y)H_k(x). \quad (12)$$

Условия жесткого защемления на сторонах $x = \pm 1$ выполнены точно, а функция $Y_i(y)$ подлежит в дальнейшем определению.

Если отвлечься от указанной неортогональности производных, то процедура Бубнова-Галёркина приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} [Y_k(H_k'', H_i') - 2\lambda^2 Y_k''(H_k', H_i')] + \lambda^4 Y_k^{IV} \delta_k^i = Q_i(y), \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (13)$$

где $(H_k^{(m)}, H_i^{(m)}) = \int_{-1}^1 H_k^{(m)} H_i^{(m)} dx$, $m = 1, 2$; δ_k^i –

символ Кронекера; $Q_i(y) = \int_{-1}^1 \frac{qa^4}{D} H_i(x) dx$.

Поскольку первые и вторые производные функции $H_k(x)$ квазиортогональны, то бесконечная система уравнений (13) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка для каждого k

$$Y_k^{IV} - 2\alpha_k^2 Y_k'' + \beta_k^4 Y_k = \bar{q}_k(y), \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (14)$$

где $\alpha_k^2 = \frac{\|H_k'\|^2}{\lambda^2}$, $\beta_k^4 = \frac{\|H_k''\|^2}{\lambda^4}$, $\bar{q}_k(y) = \frac{1}{\lambda^4} Q_k(y)$.

Корни характеристического уравнения

$$\gamma_k^4 - 2\alpha_k^2 \gamma_k^2 + \beta_k^4 = 0 \quad (15)$$

таковы:

$$\gamma_k = \pm \sqrt{\alpha_k^2 \pm \sqrt{\alpha_k^4 - \beta_k^4}}. \quad (16)$$

Так как $\beta_k > \alpha_k > 0$ [10], то

$$\gamma_k = \pm (\theta_k \pm i\omega_k), \quad (17)$$

где $\theta_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\beta_k^2 + \alpha_k^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \beta_k \sqrt{1 + \frac{\alpha_k^2}{\beta_k^2}}$,

¹ Интересующийся читатель может ознакомиться с работами этого направления, выполненными С.А. Халиловым и его коллегами.

$$\omega_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\beta_k^2 - \alpha_k^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \beta_k \sqrt{1 - \frac{\alpha_k^2}{\beta_k^2}}.$$

Ссылаясь на результаты работы [10], отметим, что $\frac{\alpha_k^2}{\beta_k^2} = O(k^{-4})$, $k \rightarrow \infty$, поэтому, начиная с некоторого значения k , зависящего от принятой точности, можно принять $\theta_k = \omega_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \beta_k$.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (14), принимает вид $Y_{k0}(y) = \sin(\omega_k y) [C_{k1} \text{sh}(\theta_k y) + C_{k2} \text{ch}(\theta_k y)] + \cos(\omega_k y) [C_{k3} \text{sh}(\theta_k y) + C_{k4} \text{ch}(\theta_k y)]$. (18)

Общее решение неоднородного уравнения получается добавлением к решению (18) частного решения $Y_k^*(y)$

$$Y_k(y) = Y_{k0}(y) + Y_k^*(y). \quad (19)$$

Постоянные интегрирования C_{ki} , $i=1,2,3,4$ определяются из граничных условий при $y = \pm 1$. Отыскание частного решения уравнения (14) не представляет труда и зависит лишь от вида правой части.

Ниже приведены решения шести краевых задач (рис. 1), представленные в единой форме.

Задача 1. Для данной задачи в работе [3] были получены достаточно точные решения в двойных рядах с помощью координатных функций, предложенных в работах [6, 9]. Многочисленные расчёты показали, что достаточная точность и сходимость этих аналитико-численных решений обеспечивается вплоть до шестого знака в мантиссе даже для вторых производных от функции при удержании в суммах не более 100 слагаемых. При этом точность и сходимость таких решений не зависят от удлинения пластины.

Постоянные интегрирования C_{ki} , $k=1,2,3,4$ из общего решения (18) определяются формулами

$$\begin{aligned} C_{k1} &= 0, & C_{k4} &= 0, \\ C_{k2} &= -\frac{qa^4}{D} \frac{(\omega_k \sin \omega_k \text{ch} \theta_k - \theta_k \cos \omega_k \text{sh} \theta_k)}{(\omega_k \text{ch} \theta_k \text{sh} \theta_k + \theta_k \cos \omega_k \sin \omega_k)} \times \\ &\quad \times \|H_k''\|^{-2} \cdot \int_{-1}^1 H_k(x) dx, & (20) \\ C_{k3} &= -\frac{qa^4}{D} \frac{(\omega_k \cos \omega_k \text{sh} \theta_k + \theta_k \sin \omega_k \text{ch} \theta_k)}{(\omega_k \text{ch} \theta_k \text{sh} \theta_k + \theta_k \cos \omega_k \sin \omega_k)} \times \\ &\quad \times \|H_k''\|^{-2} \cdot \int_{-1}^1 H_k(x) dx. \end{aligned}$$

Задача 2. Постоянные интегрирования C_{ki} оп-

ределяются из краевых условий

$$Y_k|_{y=\pm 1} = 0, \quad Y_k''|_{y=\pm 1} = 0, \quad (21)$$

что приводит к равенствам

$$\begin{aligned} C_{k1} &= 0, & C_{k4} &= 0, \\ C_{k2} &= \frac{qa^4}{2D} \|H_k''\|^{-2} \int_{-1}^1 H_k(x) dx \times \\ &\quad \times \frac{(\theta_k^2 - \omega_k^2) \cos \omega_k \text{ch} \theta_k + 2\theta_k \omega_k \sin \omega_k \text{sh} \theta_k}{\theta_k \omega_k (\text{ch}^2 \theta_k - \sin^2 \omega_k)}, & (22) \\ C_{k3} &= \frac{qa^4}{2D} \|H_k''\|^{-2} \int_{-1}^1 H_k(x) dx \times \\ &\quad \times \frac{(\omega_k^2 - \theta_k^2) \sin \omega_k \text{sh} \theta_k + 2\theta_k \omega_k \cos \omega_k \text{ch} \theta_k}{\theta_k \omega_k (\text{ch}^2 \theta_k - \sin^2 \omega_k)}. \end{aligned}$$

Здесь выполнены все краевые условия, хотя вторые два условия в равенствах (21) являются естественными.

Задача 3. Поскольку условия при $x = \pm 1$ являются главными, то при построении критериального аналитико-численного решения эти условия выполняются точно. Условия же на свободных краях $y = \pm 1$ являются естественными, и их выполнение не обязательно: они выполняются в среднем как бы автоматически, исходя из принципа минимума полной потенциальной энергии. Поэтому в направлении оси ou функции (8) подчинены только условиям полноты в $L_2(-1;1)$ и никакими другими дополнительными условиями не стеснены.

Однако при построении здесь приближённого аналитического решения в одинарных рядах по системе функций $H_k(x)$ отмеченные краевые условия выполняются в смысле наименьших квадратов. Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\lambda^2 Y_k'' - \nu Y_k \|H_k'\|^2 \right]_{y=\pm 1} &= 0, \\ \left[\lambda^2 Y_k''' - (2-\nu) Y_k' \|H_k'\|^2 \right]_{y=\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Неизвестные коэффициенты C_{ki} в функциях $Y_k(y)$, определяемые из граничных условий (23), таковы:

$$\begin{aligned} C_{k1} &= 0, & C_{k4} &= 0, \\ C_{k2} &= \frac{2\nu qa^4}{D} \frac{\|H_k'\|^2}{\|H_k''\|^2} \int_{-1}^1 H_k(x) dx \times \\ &\quad \times \frac{\theta_k \Psi_1 \text{sh} \theta_k \cos \omega_k + \omega_k \Psi_2 \text{ch} \theta_k \sin \omega_k}{\theta_k \Phi_1 \sin 2\omega_k + \omega_k \Phi_2 \text{sh} 2\theta_k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{k3} &= -\frac{2vqa^4}{D} \cdot \frac{\|H'_k\|^2}{\|H''_k\|^2} \cdot \int_{-1}^1 H_k(x) dx \times \\
 &\times \frac{\omega_k \Psi_3 \operatorname{sh} \theta_k \cos \omega_k + \theta_k \Psi_4 \operatorname{ch} \theta_k \sin \omega_k}{\theta_k \Phi_1 \sin 2\omega_k + \omega_k \Phi_2 \operatorname{sh} 2\theta_k}, \\
 \Psi_1 &= \lambda^2 (\theta_k^2 - 3\omega_k^2) + \|H'_k\|^2 (v-2), \\
 \Psi_2 &= \lambda^2 (\omega_k^2 - 3\theta_k^2) - \|H'_k\|^2 (v-2), \\
 \Psi_3 &= \lambda^2 (3\theta_k^2 - \omega_k^2) + \|H'_k\|^2 (v-2), \\
 \Psi_4 &= -\lambda^2 (3\omega_k^2 - \theta_k^2) + \|H'_k\|^2 (v-2), \\
 \Phi_1 &= -(\omega_k^2 + \theta_k^2)^2 \lambda^4 + \|H'_k\|^4 v(v-2) + \\
 &+ 2\|H'_k\|^2 (\theta_k^2 - 2v\omega_k^2 + \omega_k^2) \lambda^2, \\
 \Phi_2 &= -(\omega_k^2 + \theta_k^2)^2 \lambda^4 + \|H'_k\|^4 v(v-2) - \\
 &- 2\|H'_k\|^2 (\omega_k^2 - 2v\theta_k^2 + \theta_k^2) \lambda^2.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Задача 4. Постоянные интегрирования C_{ki} определяются из условий

$$\begin{aligned}
 \left[\lambda^2 Y_k'' - v Y_k \|H'_k\|^2 \right]_{y=1} &= 0, \\
 \left[\lambda^2 Y_k''' - (2-v) Y_k' \|H'_k\|^2 \right]_{y=1} &= 0, \\
 Y_k|_{y=-1} &= 0, \quad Y_k''|_{y=-1} = 0.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Формулы для определения коэффициентов C_{ki} здесь, как и в задаче 6, весьма громоздки из-за отсутствия полной симметрии, поэтому они не приводятся.

Задача 5. Постоянные интегрирования C_{ki} , определяемые из краевых условий

$$Y_k|_{y=\pm 1} = 0, \quad Y_k'|_{y=-1} = 0, \quad Y_k''|_{y=1} = 0, \tag{26}$$

даются формулами

$$\begin{aligned}
 C_{k1} &= \frac{qa^4}{DG} \|H''_k\|^{-2} \int_{-1}^1 H_k(x) dx \times \\
 &\times (\omega_k^2 + \theta_k^2) \operatorname{sh} \theta_k \cos \omega_k (\theta_k \sin 2\omega_k - \omega_k \operatorname{sh} 2\theta_k), \\
 C_{k2} &= -\frac{qa^4}{2D} \frac{F}{G} \|H''_k\|^{-2} \int_{-1}^1 H_k(x) dx, \\
 C_{k3} &= -\frac{qa^4}{2D} \frac{\Phi}{G} \|H''_k\|^{-2} \int_{-1}^1 H_k(x) dx, \\
 C_{k4} &= \frac{qa^4}{DG} \|H''_k\|^{-2} \int_{-1}^1 H_k(x) dx \times \\
 &\times (\omega_k^2 + \theta_k^2) \operatorname{ch} \theta_k \sin \omega_k (\omega_k \operatorname{sh} 2\theta_k - \theta_k \sin 2\omega_k),
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \theta_k \omega_k (\omega_k \operatorname{sh} 4\theta_k - \theta_k \sin 4\omega_k), \\
 F &= \omega_k (-3\theta_k^2 + \omega_k^2) \cos \omega_k \operatorname{sh} 3\theta_k + \\
 &+ \theta_k (-3\omega_k^2 + \theta_k^2) \sin 3\omega_k \operatorname{ch} \theta_k + \\
 &+ 4\omega_k \theta_k (\omega_k \sin \omega_k \operatorname{ch} 3\theta_k + \theta_k \operatorname{sh} \theta_k \cos 3\omega_k) + \\
 &+ (\omega_k^2 + \theta_k^2) (\omega_k \cos \omega_k \operatorname{sh} \theta_k + \theta_k \sin \omega_k \operatorname{ch} \theta_k), \\
 \Phi &= -\omega_k (-3\theta_k^2 + \omega_k^2) \sin \omega_k \operatorname{ch} 3\theta_k + \\
 &+ \theta_k (-3\omega_k^2 + \theta_k^2) \cos 3\omega_k \operatorname{sh} \theta_k + \\
 &+ 4\omega_k \theta_k (\omega_k \cos \omega_k \operatorname{sh} 3\theta_k - \theta_k \operatorname{ch} \theta_k \sin 3\omega_k) + \\
 &+ (\omega_k^2 + \theta_k^2) (\omega_k \sin \omega_k \operatorname{ch} \theta_k - \theta_k \operatorname{sh} \theta_k \cos \omega_k).
 \end{aligned}$$

В этом решении все краевые условия выполнены точно так же, как и в принятом критериальном решении в двойных рядах по функциям (6), (10).

Задача 6. Постоянные интегрирования C_{ki} определяются из следующих краевых условий

$$\begin{aligned}
 Y_k|_{y=-1} &= 0, \quad Y_k'|_{y=-1} = 0, \\
 \left[\lambda^2 Y_k'' - v Y_k \|H'_k\|^2 \right]_{y=1} &= 0, \\
 \left[\lambda^2 Y_k''' - (2-v) Y_k' \|H'_k\|^2 \right]_{y=1} &= 0.
 \end{aligned} \tag{28}$$

При этом два последних краевых условия (свободный край) получены методом наименьших квадратов по границе. При построении критериального решения условия на свободном крае заранее не выполняются.

Полученные решения всех шести краевых задач можно назвать решениями типа Мориса Леви.

Представляет интерес получить оценку порядка коэффициентов C_{ki} при $k \rightarrow \infty$. Оценим, например, порядок коэффициента C_{k2} в решении задачи 1. Оценка других коэффициентов во всех шести задачах такая же. Опуская утомительные подробности и используя данные работы [10], приведём окончательный результат:

$$C_{k2} = O\left(\frac{1}{k^{17/2} \operatorname{ch} k^7}\right). \tag{29}$$

Для оценки вклада каждого члена ряда решения в произвольной точке пластины учтём, что постоянные интегрирования умножаются на гиперболо-тригонометрические функции, имеющие порядок $O(\operatorname{ch} k^7)$. Отсюда немедленно получаем следующую оценку:

$$Y_k(y) = O\left(k^{\frac{17}{2}}\right), \quad \forall y \in (-1, 1), \tag{30}$$

что полностью совпадает с ранее найденной оцен-

кой в работе [11].

Оценки (29) и (30) не нуждаются в обсуждении.

В заключение данного пункта следует отметить, что для классического решения Мориса Леви [5] имеет место лишь оценка

$$Y_k(y) = O(k^{-5}), \quad \forall y \in (-1, 1). \quad (31)$$

Сопоставляя последние два результата, приходим к выводу: решения, предлагаемые в данной работе, качественно лучше в сравнении с классическим решением Мориса Леви, что полностью согласуется с теоремой Джексона [16] об аппроксимационных свойствах тригонометрической системы.

2. Численный анализ приближённых аналитических решений

Получить априорную оценку точности приближённого аналитического решения, как отмечалось ранее, не представляется возможным. Апостериорные же оценки точности могут быть получены

путём сравнения с ранее предложенными критериальными аналитико-численными решениями в двойных рядах [3]. Ниже приведены поверхности функций относительного прогиба \bar{w} и поверхности функций относительных изгибающих моментов \bar{M}_x и \bar{M}_y для задач 4 и 6, так как только для этих задач формулы определения коэффициентов C_{ki} в работе отсутствуют. Действительные прогибы w и изгибающие моменты M_x и M_y связаны с соответствующими им относительными величинами зависимостями

$$w = \bar{w} \frac{qa^4}{D}, \quad M_x = \bar{M}_x qa^2, \quad M_y = \bar{M}_y qa^2. \quad (32)$$

Поверхности указанных величин при $\lambda = 1$ показаны на рис. 2, 3.

На графиках сплошные линии соответствуют предложенным решениям, а точки – критериальным.

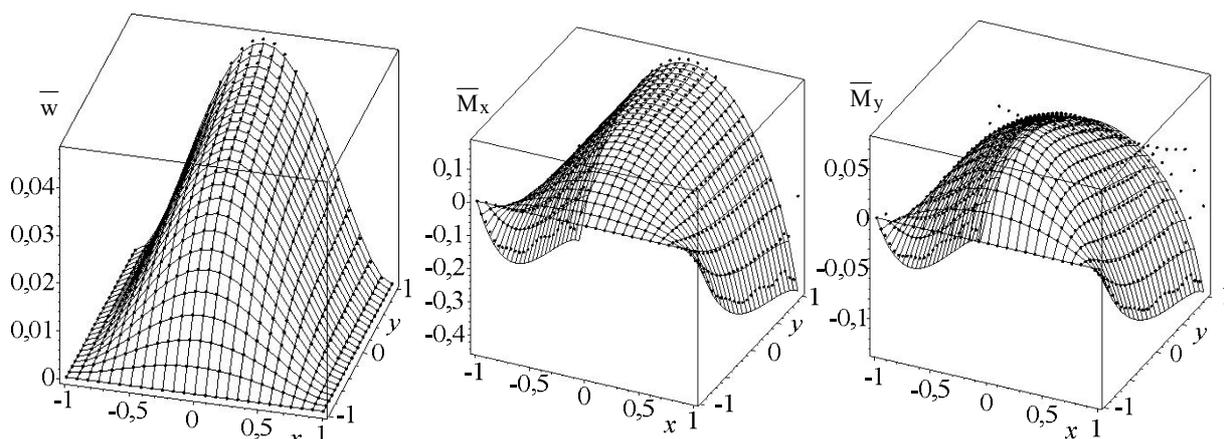


Рис. 2. Поверхности относительного прогиба и изгибающих моментов по пластине, две противоположные стороны которой жёстко защемлены; одна – свободно оперта, а другая – свободна

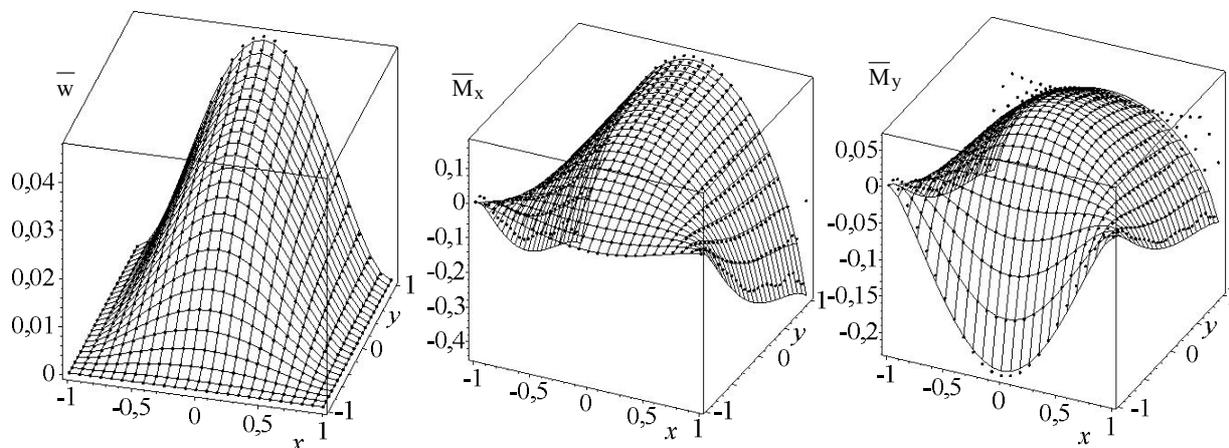


Рис. 3. Поверхности относительного прогиба и изгибающих моментов по пластине, три стороны которой жёстко защемлены, а четвёртая – свободна

Беглый взгляд на эти рисунки позволяет сделать вывод о качественном совпадении данных решений с критериальными во всей области вплоть до границы. Это совпадение носит и количественный характер в некоторой открытой области $\Omega' \subset \Omega$. В приграничных полосках, ширина которых составляет около 5% соответствующего размера пластины, наблюдается расхождение по изгибающим моментам порядка 10%. Наибольшая погрешность (порядка 10%) имеет место при наличии свободного края, в остальных же случаях такое расхождение незначительно. В этих случаях нельзя гарантировать достаточно высокую точность и критериальных решений, поскольку при получении этих решений естественные краевые условия не выполнены точно. Исходя из этого, следует признать высокую точность предложенного решения для всех рассматриваемых задач.

Более наглядные графики, позволяющие судить о точности получаемого решения для краевых задач 1 и 2, показаны на рис. 4, 5. Так на рис. 4 изображены графики относительных прогибов и изгибающих моментов в различных сечениях $y = \text{const}$ для половины квадратной жёстко защемлённой по всему контуру пластины, а на рис. 5 – для пластины, две стороны которой жёстко защемлены, а две другие – свободно опёрты.

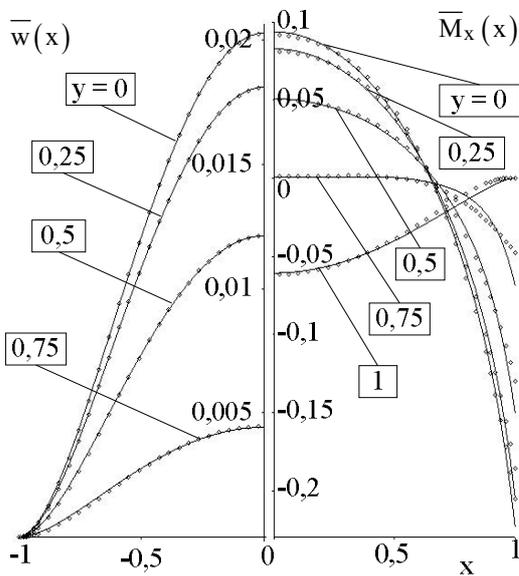


Рис. 4. Прогиб и изгибающий момент в сечениях жёстко защемлённой по всему контуру квадратной пластины

Приведенные результаты говорят сами за себя и не нуждаются в комментариях.

Представляет интерес дать количественную оценку точности предлагаемого решения в зависимости от удлинения пластины, две стороны которой жёстко защемлены, а другие – свободно опёрты.

Точное решение этой задачи получено в одинарных тригонометрических рядах по переменной y и известно как решение Мориса Леви [5]. Предложенное решение (12), (19), (22) представлено в одинарных рядах по системе $H_k(x)$, то есть по переменной x .

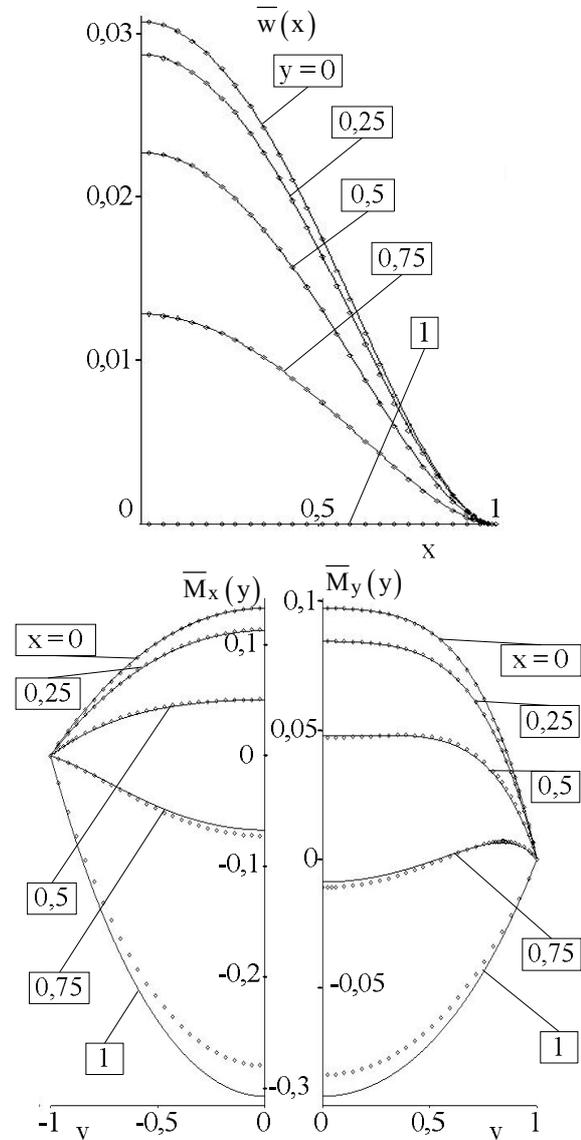


Рис. 5. Прогиб и изгибающие моменты в сечениях квадратной пластины, две противоположные стороны которой защемлены, а другие две – свободно опёрты

Ниже в табл. 1 приведены результаты вычислений по предлагаемому решению - строка I, по критериальному решению в двойных рядах - строка II [3], решение Мориса Леви - строка III [5] и по методу конечного элемента (МКЭ) - строка IV. В третьей колонке указано количество членов (элементов), удержанных в соответствующих решениях: $M \times N$ - в критериальном решении в двойных рядах и по МКЭ, M - в одинарных рядах.

Таблица 1

Компоненты напряжённо-деформированного состояния прямоугольной пластины, две противоположные стороны которой жёстко защемлены, а две другие – свободно опёрты

| λ | Решение | $M \times N, M$ | $\bar{w}(0,0)$ | $\bar{M}_x(0,0)$ | $\bar{M}_x(1,0)$ | $\bar{M}_y(0,0)$ |
|-----------|---------|-----------------|----------------|------------------|------------------|------------------|
| 0,1 | I | 10 | 0,041221 | 0,155921 | -0,396123 | 0,046776 |
| | II | 11×33 | 0,041667 | 0,166667 | -0,333334 | 0,050000 |
| | III | 20 | 0,041668 | 0,166652 | -0,333283 | 0,049950 |
| | IV | 100×1000 | 0,041668 | 0,166697 | -0,332918 | 0,050025 |
| 0,5 | I | 10 | 0,041455 | 0,158832 | -0,398000 | 0,053642 |
| | II | 11×22 | 0,041773 | 0,168252 | -0,337051 | 0,056687 |
| | III | 20 | 0,041773 | 0,168251 | -0,337049 | 0,056685 |
| | IV | 100×200 | 0,041775 | 0,168283 | -0,336628 | 0,056713 |
| 1 | I | 10 | 0,030673 | 0,132775 | -0,311538 | 0,097438 |
| | II | 11×11 | 0,030674 | 0,132980 | -0,279351 | 0,097550 |
| | III | 20 | 0,030674 | 0,132979 | -0,279349 | 0,097549 |
| | IV | 100×100 | 0,030675 | 0,133013 | -0,278927 | 0,097586 |
| 2 | I | 10 | 0,008475 | 0,051127 | -0,125094 | 0,088269 |
| | II | 22×11 | 0,008445 | 0,047362 | -0,119085 | 0,086868 |
| | III | 20 | 0,008445 | 0,047362 | -0,119084 | 0,086868 |
| | IV | 200×100 | 0,008445 | 0,047367 | -0,118936 | 0,086862 |
| 3 | I | 10 | 0,002315 | 0,020232 | -0,061871 | 0,051441 |
| | II | 33×11 | 0,002307 | 0,018723 | -0,055382 | 0,050825 |
| | III | 20 | 0,002307 | 0,018723 | -0,055381 | 0,050825 |
| | IV | 300×100 | 0,002307 | 0,018724 | -0,055313 | 0,050826 |

Следует отметить, что результаты по решению Мориса Леви вычислены нами, и они уточняют данные работы [5]. Число элементов по МКЭ выбиралось так, чтобы сторона квадрата (конечного элемента) была равна толщине пластины.

Анализ данных табл. 1 показывает:

- погрешность в определении максимальных прогибов ничтожно мала для любых удлинений пластины;

- изменение погрешности определения моментов в центре пластины в зависимости от удлинения не является монотонной функцией. Наименьшая погрешность достигается для квадратной пластины, а с изменением удлинения в одну или другую сторону эта погрешность незначительно возрастает;

- погрешность в определении наибольших изгибающих моментов M_x (они достигаются в середине зашумлённой стороны) может быть значительной.

Если отступить от зашумлённой стороны вглубь пластины примерно на 5% от длины смежной стороны, то решения I и III практически совпадают. Поэтому возникает задача уточнения предложенного аналитического решения в весьма вытянутых приграничных полосках. Это уточнение можно выполнить различными способами: методом малого параметра, итерационными методами и т.д. Проблемы в этом направлении не возникают. Здесь мы предложили то, что предложили, а пользователь в зависимости от его потребностей сам решит - при-

нимать это решение или отказаться от него.

Заключение

1. Построено приближённое аналитическое решение краевой задачи в прямоугольнике с бигармоническим оператором, когда на двух противоположных сторонах заданы краевые условия типа Дирихле, а на двух других - произвольны. Точные решения поставленных краевых задач по сей день не получены, кроме единственного «счастливого» случая (в теории пластин это решение – Мориса Леви), когда на означенных сторонах обращаются в нуль сама функция и её вторая производная по нормали.

2. Даны приближённые аналитические решения шести краевых задач, отличающихся друг от друга краевыми условиями на двух противоположных сторонах. Даже приближённые решения двух из шести краевых задач, а именно: задача 3 и 4 из рис. 1, - в литературе отсутствуют. Приближённые решения этих задач здесь получены.

3. На аналитическом уровне даны оценки сходимости предлагаемых одинарных рядов. Компоненты рядов функции прогиба в произвольной точке

пластины имеют порядок $O\left(k^{-\frac{17}{2}}\right)$, тогда как этот порядок для решения Мориса Леви оценивается как $O\left(k^{-5}\right)$.

4. На основе ранее построенных авторами критериальных решений дан апостериорный анализ точности предлагаемого приближённого аналитического решения. Этот анализ показал приемлемую поточечную сходимость результатов приближённого аналитического решения в одинарных рядах с критериальным.

5. Оценка погрешности приближённого решения в метрике соболевского пространства W_2^2 показала, что она ничтожно мала.

6. Наименьшая погрешность предложенного приближенного аналитического решения имеет место, как ни странно, для квадратной пластины. С изменением удлинения в одну или другую стороны эта погрешность, к сожалению, возрастает, но не монотонно.

Литература

1. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 333 с.

2. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

3. Халилов, С.А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко закреплённой прямоугольной пластины [Текст] / С.А. Халилов, В.Б. Минтюк, Д.А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 49. – X., 2011. – С. 81 – 94.

4. Халилов, С.А. Построение и исследование приближённого аналитического решения бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С.А. Халилов, В.Б. Минтюк, Д.А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 2(99). – С. 40 – 49.

5. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636с.

6. Минтюк, В.Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач [Текст] / В.Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – № 5/41. – С. 32 – 36.

7. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С.Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1957. – 478 с.

8. Михлин, С.Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

9. Халилов, С.А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. – Вып. 5. – X.: «ХАИ», 1978. – С. 46 – 56.

10. Халилов, С.А. Вычисление некоторых определённых интегралов, содержащих присоединённые функции Лежандра второго и четвёртого порядков [Текст] / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. – Вып. 7. – X.: «ХАИ», 1984. – С. 158 – 165.

11. Халилов, С.А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях [Текст] / С.А. Халилов // Вопросы проектирования самолетных конструкций: темат. сб. науч. тр. – Вып. 3. – X.: «ХАИ», 1982. – С. 120 – 127.

12. Халилов, С.А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях [Текст] / С.А. Халилов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. – X.: ХАИ, 1987. – С. 31 – 39.

13. Халилов, С.А. Полные системы ортонормированных степенных полиномов для решения некоторых краевых задач линейной теории оболочек и пластин [Текст] / С.А. Халилов // Численные методы решения задач строительной механики: сб. науч. ст. – К.: КИСИ, 1978. – С. 98 – 102.

14. Халилов, С.А. К определению плоского напряжённого состояния прямоугольной стрингерной пластинки [Текст] / С.А. Халилов, А.Г. Дибир // Вопросы оптимизации тонкостенных силовых конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Харьковского авиац. ин-та им. Н.Е. Жуковского. – Вып. 4. – X., 1983. – С. 76 – 86.

15. Кравченко, С.Г. Устойчивость пространственных тонкостенных пластинчатых систем [Текст]: дисс. канд. техн. наук: 01.02.04; защищена 24.09.10; утв. 17.12.10 / Кравченко Сергей Григорьевич. – X., 2010. – 160 с.

16. Джексон, Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы [Текст] / Д. Джексон. – М.: Гос. изд. иностр. лит., 1948. – 259 с.

Поступила в редакцию 4.09.2013, рассмотрена на редколлегии 11.09.2013

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. высшей математики В. С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

**НАБЛИЖЕНЕ АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ БІГАРМОНІЧНОЇ ПРОБЛЕМИ
В ПРЯМОКУТНИКУ ПРИ ОДНОРІДНИХ ГОЛОВНИХ
КРАЙОВИХ УМОВАХ НА ДВОХ ПРОТИЛЕЖНИХ СТОРОНАХ
І ДОВІЛЬНИХ - НА ДВОХ ІНШИХ**

С.А. Халілов, В.Б. Минтюк, Д.А. Ткаченко

Запропоновано наближене аналітичне розв'язання для крайових задач в прямокутнику з бігармонічним оператором, на двох протилежних сторонах якого задано умови типу Діріхле, а на двох інших - крайові умови довільні. Розв'язання будується проекційним методом за допомогою лінійно незалежної та повної системи ортонормованих функцій, перші й другі похідні яких квазіортогональні у відповідному функціональному просторі. Похибка аналітичного розв'язання пов'язана зі ступенем неортогональності названих похідних застосовуваних функцій. Апостеріорний аналіз точності запропонованих розв'язань показав, що ці рішення для розглянутих шести крайових задач мало відрізняються від так званих «критеріальних» розв'язань, раніше побудованих авторами. Дано порівняння результатів запропонованих розв'язань з результатами, отриманими за методом скінченного елемента. Зроблено відповідні висновки.

Ключові слова: бігармонічний оператор, однорідні головні крайові умови, наближене аналітичне розв'язання, апостеріорний аналіз поточної збіжності та її априорна оцінка.

**AN APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF BIHARMONIC PROBLEM
IN THE RECTANGLE WITH HOMOGENEOUS MAIN BOUNDARY CONDITIONS
ON THE TWO OPPOSITE SIDES AND ARBITRARY BOUNDARY CONDITIONS
ON THE OTHER TWO SIDES**

S.A. Khalilov, V.B. Myntyuk, D.A. Tkachenko

The approximate analytical solution of boundary value problems with biharmonic operator in the rectangle with the two opposite sides of the defined conditions of Dirichlet type and two other sides of arbitrary boundary conditions is suggested. The solution is built with the projection method using a linearly independent and complete orthonormal function system, the first and second derivatives of it are quasiorthogonal in the corresponding functional space. Analytical solution error is connected with the unorthogonality degree of these functions' derivatives. A posteriori analysis of the delivered solution's accuracy has shown that these solutions for considered six boundary value problems differ a little from the so-called «criterion» solutions constructed by the authors. The comparison of the proposed solutions' results with the results obtained by the finite element method is given. The relevant deductions are made.

Keywords: biharmonic operator, homogeneous principal boundary conditions, approximate analytical solution, posteriori analysis of the pointwise convergence and it's priori estimate.

Халілов Сявюш Ахмедович – старший научный сотрудник кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, докторант кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.

Ткаченко Денис Анатольевич – аспирант кафедры технологии производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: 20Black_and_White07@ukr.net.