

УДК: 681.5

А.С. КУЛИК, С.Н. ПАСИЧНИК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВИХРЕВОГО ЭНЕРГОРАЗДЕЛИТЕЛЯ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

*Приведены результаты анализа особенностей структурно-параметрической идентификации в частотной области, результаты экспериментальных исследований статических и динамических характеристик вихревого энергоразделителя (ВЭ) как объекта автоматического позиционирования (ОАП). Определены диапазоны рабочих режимов и основные показатели качества функционирования ВЭ. Решена задача определения структуры и интервальных значений параметров математической модели ВЭ в форме преобразовательного уравнения. Адекватность полученной модели подтверждена сравнением экспериментальных и расчетных переходных характеристик. Показано, что задание интервальных значений параметров модели позволяет адекватно описывать динамические процессы в вихревом энергоразделителе в широком диапазоне рабочих режимов.*

**Ключевые слова:** идентификация, аппроксимация, динамическая характеристика, вихревой энергоразделитель.

### Введение

В современных энергетических технологиях находят применение альтернативные способы получения и преобразования энергии. Один из таких способов основан на эффекте температурного разделения во вращающемся потоке газа или вихревом эффекте [1]. Среди направлений использования вихревого эффекта можно выделить получение холодного и горячего воздуха для систем охлаждения и кондиционирования кабин и салонов самолетов.

Для обеспечения требуемых температурных режимов охлаждаемого объекта необходимо целенаправленно изменять температуру и количество подаваемого в зону охлаждения воздуха. В известных конструкциях вихревых систем кондиционирования [2] используются либо однорежимные вихревые энергоразделители, либо с позиционированием потока энтальпии холодного воздуха при постоянном давлении сжатого воздуха. Такой подход связан с игнорированием динамических свойств ВЭ, что приводит к ограничению диапазона рабочих режимов системы.

Более рациональным представляется исследование динамических свойств ВЭ с использованием методов математического моделирования, что требует решения задачи идентификации структуры и параметров модели ВЭ в условиях интервальной неопределенности, которая вызвана следующим: 1) необходимостью изменения потока энтальпии в широком диапазоне значений; 2) высокой чувствительностью режимных параметров ВЭ к изменению внешних условий функционирования.

Одно из решений такой задачи [3] основывается на применении полиномиальной аппроксимации экспериментальных статических характеристик методом наименьших квадратов для квадратичной модели границ интервальной неопределенности, но при этом не учитываются динамические свойства объекта.

В данной работе приводятся результаты анализа особенностей структурно-параметрической идентификации в частотной области, результаты экспериментальных исследований статических и динамических характеристик, определения структуры и параметров математической модели ВЭ как ОАП, что позволит в последующем решить задачу синтеза системы стабилизации температуры охлаждаемого объема с помощью аналитических средств метода частотных характеристик.

### 1. Постановка задачи исследования

Для изучения особенностей протекания физических процессов в вихревом энергоразделителе требуется провести серию экспериментальных исследований на макетном образце и получить статические, временные и частотные характеристики ВЭ как объекта автоматического позиционирования.

Используя результаты экспериментов, необходимо определить структуру и интервальные значения параметров математической модели ВЭ в форме преобразовательного уравнения в изображениях:

$$\bar{Q}_x(s) = \bar{W}_{ВЭ}(s) \cdot \bar{Z}(s), \quad (1)$$

где  $\bar{Q}_x(s)$  – изображение управляемой величины –

потока энтальпии холодного воздуха;  $\bar{W}_{вэ}(s)$  – интервальная передаточная функция ВЭ по управляющему воздействию;  $\bar{Z}(s)$  – изображение управляющего воздействия – линейного положения регулирующего органа вентиля.

Выполнить проверку адекватности полученной модели путем сравнения экспериментальных и расчетных переходных характеристик ВЭ.

## 2. Анализ особенностей идентификации в частотной области

Для выявления особенностей определения структуры и параметров математической модели ВЭ в частотной области рассмотрена передаточная функция (ПФ), содержащая вещественные полюсы:

$$W_{вэ}(s) = \frac{Q_x(s)}{Z(s)} = \frac{K_{вэ}}{\prod_{k=1}^n (s + s_i)^{v_i}}, \quad (2)$$

где  $K_{вэ}$  – коэффициент передачи ВЭ;  $s_i$  – нули и полюсы передаточной функции.

Для получения логарифмических амплитудно-частотной (ЛАЧХ) и фазочастотной (ЛФЧХ) характеристик найдена частотная ПФ  $W_{вэ}(j\omega)$  подстановкой  $s = j\omega$ . В результате определения модуля и аргумента  $W_{вэ}(j\omega)$  получены выражения для ЛАЧХ и ЛФЧХ относительно переменной  $z = \lg(\omega)$ :

$$L(z) = 10M \left[ 2 \lg K_{вэ} - \sum_{i=1}^n v_i \ln(e^{2z/M} + \omega_i^2) \right]; \quad (5)$$

$$\varphi(z) = - \sum_{i=1}^n v_i \arctg(e^{z/M} / \omega_i), \quad (6)$$

где  $M = 1/\ln 10$ .

Для определения полюсов ПФ (2) из уравнений (5), (6) получены выражения для производных ЛАЧХ и ЛФЧХ:

$$\frac{d^2 L}{dz^2} = - \frac{40}{M} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\omega_i^2 e^{2z/M}}{(e^{2z/M} + \omega_i^2)^2}; \quad (7)$$

$$\frac{d^3 L}{dz^3} = - \frac{80}{M^2} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\omega_i^2 e^{2z/M} (\omega_i^2 - e^{2z/M})}{(e^{2z/M} + \omega_i^2)^3}; \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\omega_i e^{z/M}}{e^{2z/M} + \omega_i^2}; \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\omega_i e^{z/M} (\omega_i^2 - e^{2z/M})}{(e^{2z/M} + \omega_i^2)^2}. \quad (10)$$

Анализ выражений (7) – (10) позволил выявить следующие особенности определения структуры и параметров передаточной функции ВЭ в частотной области:

1. Так как ЛАЧХ и ЛФЧХ представляют собой гладкие, многократно дифференцируемые функции, то в точках перегиба ЛФЧХ и первой производной ЛАЧХ их вторые производные равны нулю. Из уравнений (8), (10) следует, что корни полинома числителя не совпадают с частотами перегиба. Так, для частоты  $\omega = \omega_r$ ,  $1 < r < n$  выражения третьей производной ЛАЧХ и второй производной ЛФЧХ примут вид:

$$\frac{d^3 L}{dz^3} = - \frac{80}{M^2} \sum_{i=1, i \neq r}^n v_i \frac{k_{ri}^2 (1 - k_{ri}^2)}{(k_{ri}^2 + 1)^3}; \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{1}{M^2} \sum_{i=1, i \neq r}^n v_i \frac{k_{ri} (1 - k_{ri}^2)}{(k_{ri}^2 + 1)^2}, \quad (12)$$

где  $k_{ri} = \frac{\omega_r}{\omega_i} = e^{\frac{z_r - z_i}{M}}$ .

Коэффициенты  $k_{ri}$  характеризуют степень удаленности соседних нулей и полюсов от выбранного  $\omega_r$ .

Так как  $k_{ri}$  принимают значения больше и меньше единицы, выражения (11), (12) можно представить в приближенном виде:

$$\frac{d^3 L}{dz^3} \cong - \frac{80}{M^2} \sum_{i=1}^n \pm v_i k_{ri}^{\pm 2}; \quad \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \cong - \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^n \pm v_i k_{ri}^{\pm 1}, \quad (13)$$

где верхний знак соответствует  $k_{ri}^2 \ll 1$ , нижний –  $k_{ri}^2 \gg 1$ .

Из (13) следует, что выражения в квадратных скобках имеют более высокий порядок малости, чем интенсивность изменения значений производных, которая составляет величину порядка 400 дБ/дек<sup>3</sup> для ЛАЧХ и 5 рад/дек<sup>2</sup> для ЛФЧХ соответственно, и ими можно пренебречь.

2. Значение первой производной в точках перегиба определяет: является точка перегиба нулем или полюсом передаточной функции; значение показателей степени  $v$ ,  $\mu$ .

Выполнив преобразования уравнений (7), (9) при  $\omega = \omega_r$  получены следующие приближенные выражения:

$$\frac{d^2 L}{dz^2} \cong \frac{40}{M} \left[ - \frac{v_r}{4} - \sum_{i=1, i \neq r}^n v_i k_{ri}^{\pm 2} \right];$$

$$\frac{d\varphi}{dz} \cong \frac{1}{M} \left[ -\frac{v_r}{2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n v_i k_{ri}^{\pm 1} \right]. \quad (14)$$

Ввиду малости слагаемых, стоящих под знаком суммы, окончательно можно записать:

$$\frac{d^2 L}{dz^2} \cong -\frac{10}{M} v_r; \quad \frac{d\varphi}{dz} \cong -\frac{1}{2M} v_r. \quad (16)$$

Отрицательные значения производных указывают на то, что частота  $\omega_r$  является полюсом передаточной функции (2) порядка  $v_r$ . Таким образом, полученные выражения (11), (12), (16) позволяют найти параметры ПФ ВЭ с использованием аппроксимированных экспериментальных ЛАФЧХ.

### 3. Экспериментальная часть

Серия экспериментов проведена на макетном образце ОАП с ВЭ, имеющим следующие геометрические характеристики [4]: диаметр рабочей части  $D_{рч} = 5,8$  мм; длина рабочей части  $L_{рч} = 20 \cdot D_{рч}$ ; ход регулирующего органа вентиля  $\Delta \zeta = 2$  мм; диаметр диафрагмы  $D_d = 2,5$  мм. ОАП включает в себя следующие функциональные элементы (рис. 1): УМ – усилитель мощности; ШД – шаговый электродвигатель; В – вентиль; Дт<sub>i</sub>,  $i = 1, 3$  – датчики температуры.

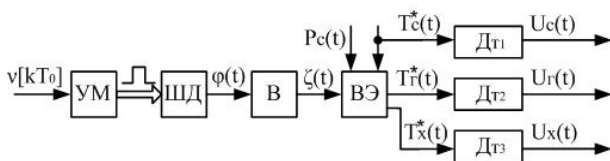
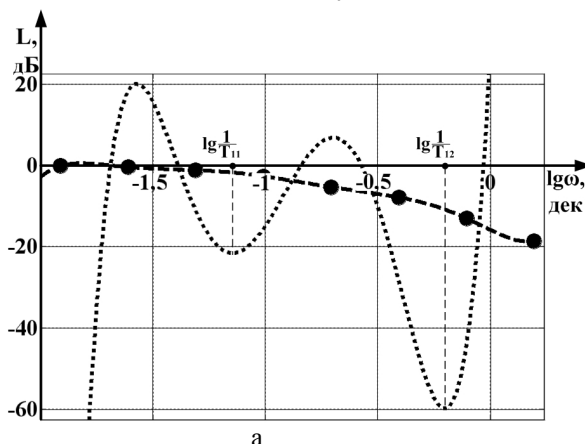


Рис. 1. Функциональная схема ОАП

На рис. 1 обозначено:  $v[kT_0]$  – частота управ-



ляющих импульсов, Гц;  $\varphi(t)$  – угловое положение вала двигателя, рад;  $\zeta(t)$  – линейное положение регулирующего органа вентиля, м;  $P_c(t)$  – давление сжатого воздуха, Па;  $T_c^*(t)$ ,  $T_r^*(t)$ ,  $T_x^*(t)$  – температуры торможения сжатого, горячего и холодного воздуха соответственно, К;  $U_c(t)$ ,  $U_r(t)$ ,  $U_x(t)$  – напряжения датчиков температуры, В.

В ходе экспериментальных исследований получены такие характеристики:

1) статические – зависимость потока энтальпии  $Q_x$  и температуры торможения  $t_x^*$  холодного воздуха от положения регулирующего органа вентиля  $\zeta$ . Значения потока энтальпии определены по формуле:

$$Q_x = \mu G_c C_p T_x^*, \quad (17)$$

где  $\mu$  – относительный расход холодного воздуха;  $G_c$  – массовый расход сжатого воздуха, кг/с;  $C_p$  – удельная изобарная теплоемкость воздуха, Дж/(кг·К);  $T_x^*$  – температура торможения холодного воздуха, К;

2) ЛАЧХ и ЛФЧХ – реакция на гармоническое управляющее воздействие с амплитудой  $A_\zeta = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м при значениях давления сжатого воздуха  $P_{c1} = 0,6$  МПа,  $P_{c2} = 0,7$  МПа. Частота гармонического сигнала изменялась в диапазоне  $\omega \in [0,012; 1,57]$  рад/с (рис. 2). Значения потока энтальпии отнесены к величине, равной половине диапазона линеаризации  $Q_x$  характеристики  $Q_x = Q_x(\zeta)$  в соответствующих рабочих точках;

3) переходные – реакция на ступенчатое управляющее воздействие  $\Delta \zeta(t) = 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 1(t)$ , выраженная в относительных величинах (рис. 3).

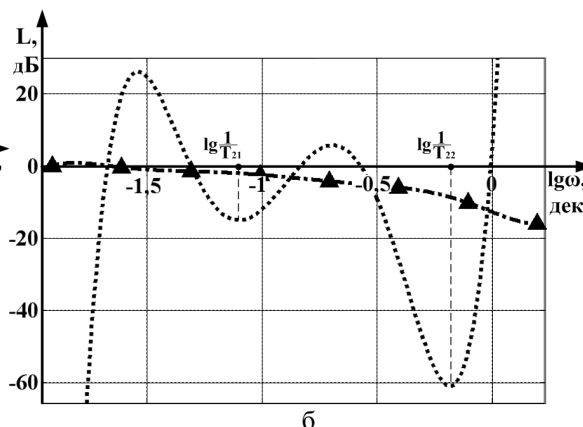


Рис. 2. ЛАЧХ ОАП: а –  $P_c = 0,6$  МПа; б –  $P_c = 0,7$  МПа;

----- аппроксимация при  $P_c = 0,6$  МПа;

----- аппроксимация при  $P_c = 0,7$  МПа; ..... – вторая производная ЛАЧХ

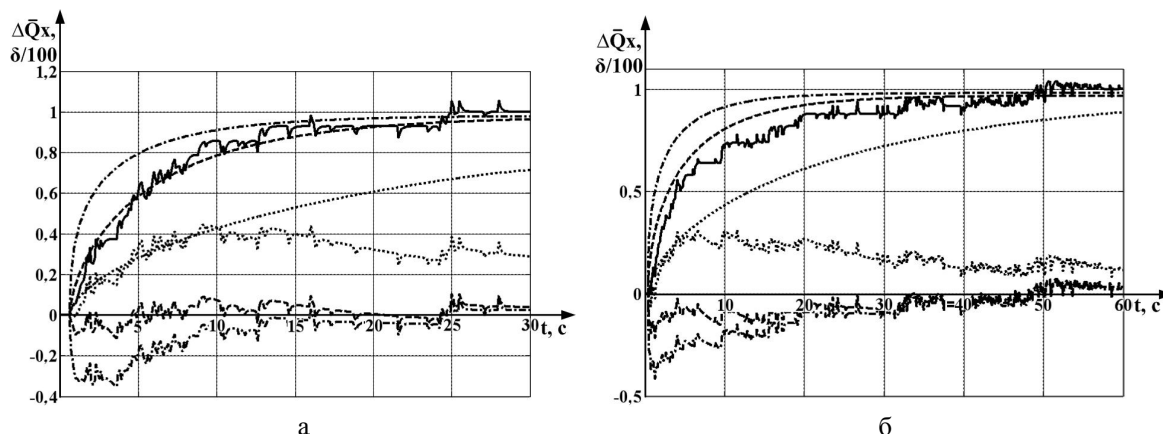


Рис. 3. Переходные характеристики ОАП:

а –  $P_c = 0,6$  МПа; б –  $P_c = 0,7$  МПа; — — — эксперимент; - - - - расчет;

- расчет для максимальных значений параметров; - · - · - расчет для минимальных значений параметров

Приведенные графические свидетельства о том, что ОАП представляет собой инерционное динамическое звено (время переходного процесса  $30 \text{ с} < t_{\text{пп}} < 50 \text{ с}$ ). Это подтверждается значением полосы пропускания  $\omega_{\text{пр}} \approx 0,1 \text{ рад/с}$ .

#### 4. Определение структуры и параметров математической модели ВЭ

Структура и параметры динамической составляющей  $\bar{W}_{\text{ВЭ}}(s)$  определены по экспериментальным ЛАЧХ [5]. В полюсах первая производная ЛАЧХ по логарифму частоты будет иметь точки перегиба, а вторая – экстремумы. В результате решения получены значения постоянных времени ОАП (рис. 2): 1) р.т.  $\zeta_{01}$ :  $T_{11} = 13,5 \text{ с}$ ;  $T_{21} = 1,6 \text{ с}$ ;  $T_{12} = 11,8 \text{ с}$ ;  $T_{22} = 1,5 \text{ с}$ ; 2) р.т.  $\zeta_{02}$ :  $T_{11} = 20 \text{ с}$ ;  $T_{21} = 1,62 \text{ с}$ ;  $T_{12} = 12,3 \text{ с}$ ;  $T_{22} = 1,66 \text{ с}$ . Интервальные значения постоянных времени:  $\bar{T}_1 = [11,8; 20]$ ;  $\bar{T}_2 = [1,5; 1,66]$ . Тогда передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$\bar{W}_{\text{ВЭ}}(s) = \frac{\bar{Q}_x(s)}{\bar{Z}(s)} = \frac{\bar{K}_{\text{ВЭ}}}{(\bar{T}_1 s + 1)^{\bar{v}_1} (\bar{T}_2 s + 1)^{\bar{v}_2}}, \quad (18)$$

где  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  – показатели степени. Значения  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  находятся из приближенных выражений (16) для второй производной ЛАЧХ или первой производной ЛФЧХ.

В результате решения получены следующие значения показателей степени: 1) р.т.  $\zeta_{01}$ :  $v_{11} = 0,46$ ;  $v_{21} = 0,72$ ;  $v_{12} = 0,41$ ;  $v_{22} = 0,74$ ; 2) р.т.  $\zeta_{02}$ :  $v_{11} = 0,2$ ;  $v_{21} = 1,79$ ;  $v_{12} = 0,29$ ;  $v_{22} = 1,53$ . Интервальные значения показателей степени:  $\bar{v}_1 = [0,2; 0,46]$ ;  $\bar{v}_2 = [0,72; 1,79]$ .

#### 5. Оценка адекватности модели ВЭ

Для проверки адекватности полученной математической модели выполнен расчет переходных характеристик ВЭ по управляющему воздействию в рабочих точках  $\zeta_{01}$ ,  $\zeta_{02}$  и определены относительные погрешности расчетных характеристик. Совместное решение уравнений (1), (18) во временной области получено с использованием метода вещественных частотных характеристик:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (20)$$

где  $h(t)$  – переходная функция;

$U(\omega)$  – вещественная частотная функция ВЭ.

Значения переходной функции соответствуют неединичному управляющему ступенчатому воздействию  $A_{\zeta} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

Результаты расчета приведены на рис. 3, из которого следует, что относительные погрешности расчета при промежуточных значениях параметров не превышают 20% за исключением начальных участков характеристик.

#### Заключение

В работе приведены результаты анализа особенностей структурно-параметрической идентификации в частотной области, результаты экспериментальных исследований статических и динамических характеристик ОАП. По экспериментальным частотным характеристикам определена структура и интервальные значения параметров математической модели ВЭ как ОАП. Показано, что ОАП является аperiодическим звеном дробного порядка. Для проверки адекватности полученной модели проведен

расчет переходных характеристик ВЭ в двух рабочих точках при максимальных, промежуточных и минимальных значениях из найденных интервалов параметров модели.

Полученные результаты позволят в дальнейшем решить задачу синтеза системы стабилизации температуры охлаждаемого объема.

### Литература

1. Азаров, А.И. От однокамерной вихревой трубы Фултона к модульным многокамерным вихревым воздухоохладителям: развитие, промышленное использование, перспективы [Текст]: доклад-лекция / А.И. Азаров // XIУ Школа-семинар молодых ученых и специалистов под рук. акад. РАН А.И. Леонтьева. Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках (26-30 мая 2003г.). – Рыбинск – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – Т. 2. – С. 195-203.
2. Пат. 2213016 Российская Федерация, МПК7B60H1/22, B60H3/00. Климатическая установка транспортного средства [Текст] / Курносов Н.Е.; Заявитель и патентообладатель Курносов Н.Е. – № 2001126082/28; заявл. 24.09.01; опубл. 27.09.03. – 6 с.: ил.
3. Скибицкий, Н.В. Интервальные методы в задачах построения моделей объектов и процессов управления: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01; защита 16.02.06; утв. 23.06.06 / Скибицкий Никита Васильевич. – М., 2005. – 310 с.
4. Кулик, А.С. Экспериментальное исследование характеристик вихревого энергоразделителя [Текст] / А.С. Кулик, С.Н. Пасичник, В.Г. Джуглаков // Авиационно-космическая техника и технология. – 2010. – № 3 (70). – С. 65–68.
5. Кулик, А.С. Идентификация математической модели вихревого энергоразделителя [Текст] / А.С. Кулик, С.Н. Пасичник // Авиационно-космическая техника и технология. – 2010. – № 10 (77). – С. 192–196.

Поступила в редакцию 1.06.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., зав. каф. «Авиационные приборы и измерения» Н.Д. Кошевой, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

### ІДЕНТИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВИХРОВОГО ЕНЕРГОРОЗДІЛЮВАЧА В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

*А.С. Кулік, С.М. Пасічник*

Наведено результати аналізу особливостей структурно-параметричної ідентифікації в частотній області, результати експериментальних досліджень статичних та динамічних характеристик вихрового енергорозділювача (ВЕ) як об'єкта автоматичного позиціонування (ОАП). Визначено діапазони робочих режимів та основні показники якості ВЕ. Розв'язано задачу визначення структури та інтервальних значень параметрів математичної моделі ВЕ у формі перетворювального рівняння. Адекватність отриманої моделі підтверджено порівнянням експериментальних та розрахункових перехідних характеристик. Показано, що завдання інтервальних значень параметрів моделі дозволяє адекватно описувати динамічні процеси у вихровому енергорозділювачеві у широкому діапазоні робочих режимів.

**Ключові слова:** ідентифікація, апроксимація, динамічна характеристика, вихровий енергорозділювач.

### MATHEMATICAL MODEL IDENTIFICATION OF VORTICAL POWER SEPARATOR IN THE FREQUENCY DOMAIN

*A.S. Kulik, S.N. Pasichnik*

Results of the analysis features of the structural-parametric identification in the frequency domain, the results of experimental studies of static and dynamic characteristics of the vertical power separator (VPS) as the automatic positioning of the object (OAP). The ranges of operating conditions and the basic functioning of the quality of VPS. The problem of determining the structure and interval values of the parameters of mathematical models of VPS in the form of converting the equation. The adequacy of the resulting model is confirmed by comparing the experimental and calculated transient response. It is shown that the assignment of interval values of the parameters of the model can adequately describe the dynamic processes in the vortex power separator in a wide range of operating modes.

**Key words:** identification, approximation, dynamic characteristic, vortical power separator.

**Кулик Анатолий Степанович** – д-р техн. наук, проф., зав. каф. «Системы управления летательными аппаратами», Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

**Пасичник Сергей Николаевич** – канд. техн. наук, ст. преподаватель каф. «Системы управления летательными аппаратами», Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: snpasichnik@gmail.com.