

УДК 531.133.1

Е.А. ИГУМЕНЦЕВ, Е.А. ПРОКОПЕНКО

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ГИРОСКОПА

В работе проведено математическое моделирование вращений гироскопа, широко применяемого в летательных аппаратах. Задача рассматривается в форме Лагранжа при нелинейных колебаниях. Определены начальные условия и решена задача исследования устойчивости вращений. Разработана расчетная схема вращения гироскопа. Показано, что сила тяжести, стремящаяся опрокинуть гироскоп, фактически не вызывает, а лишь поддерживает результирующую прецессию. Построена кривая энергетического баланса и фазовый график колебаний гироскопа. Определены точки экстремума энергетического баланса.

Ключевые слова: гироскоп, нутация, идеальная и неидеальная сфера, момент импульса, вектор, проекция, частота.

Введение

Задача исследования устойчивости вращения заряженного гироскопа в линейной постановке была рассмотрена ранее в работе [1]. Но в этой работе не была исследована устойчивость прецессионного движения.

В предлагаемой работе задача рассмотрена более широко за счет исследования устойчивости вращения при нелинейных колебаниях в форме Лагранжа.

Результаты исследований

Известно [2], что движение гироскопа объясняется законом изменения момента импульса под действием внешних сил. Согласно этому закону, скорость изменения момента импульса \vec{L} (называемого иначе угловым моментом) любого тела относительно некоторой точки равна суммарному моменту \vec{N} действующих на тело внешних сил:

$$d\vec{L}/dt = \vec{N}. \quad (1)$$

При вращении гироскопа вокруг собственной оси, вектор момента импульса \vec{L} тоже направлен вдоль этой оси. Направление \vec{L} связано с направлением вращения гироскопа правилом правого винта. Будем указывать направление оси волчка в пространстве (от точки опоры к центру масс) с помощью единичного вектора \vec{n}_0 (Рис. 1). Пусть I_0 — момент инерции гироскопа относительно оси симметрии (например, для однородного диска или цилиндра

$$I_0 = mR^2/2,$$

где m — масса, R — радиус).

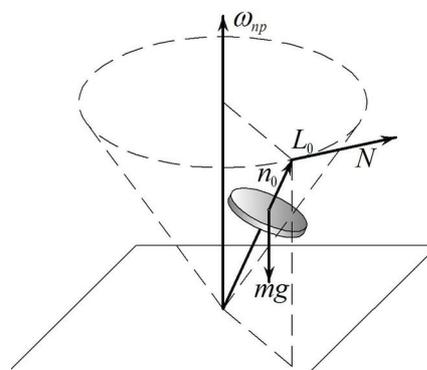


Рис. 1. Установившаяся (регулярная) прецессия гироскопа под действием силы тяжести

Тогда вектор момента импульса гироскопа можно представить в виде

$$\vec{L} = I_0 \omega_0 \vec{n}_0,$$

где ω_0 — угловая скорость вращения вокруг собственной оси (положительная при вращении против часовой стрелки).

Наклоненный к вертикали гироскоп прецессирует, т.е. помимо вращения вокруг собственной оси поворачивается еще и вокруг вертикальной оси. При быстром собственном вращении эта прецессия (поворот вокруг вертикальной оси) происходит настолько медленно, что с хорошей точностью можно пренебречь той составляющей момента импульса, которая обусловлена прецессией вокруг вертикали. Иными словами, приближенно можно считать, что вектор полного момента импульса \vec{L} и в этом случае направлен вдоль оси гироскопа: $\vec{L} \cong \vec{L}_0 = I_0 \omega_0 \vec{n}_0$. В приближенной теории гироскопа, основанной на законе изменения момента импульса (1), как раз и предполагается, что вектор \vec{L}

равен \bar{L}_0 и все время направлен вдоль собственной оси волчка. Поэтому описываемое уравнением (1) поведение вектора \bar{L} говорит и о том, как ведет себя в пространстве ось гироскопа.

При выборе полюса в точке опоры момент силы реакции, действующей на гироскоп в этой точке, обращается в нуль. В правой части уравнения (1) остается только момент \bar{N} силы тяжести $m\bar{g}$, который в каждый момент времени перпендикулярен вектору \bar{L} . Поэтому сила тяжести может изменить только направление \bar{L} , но не его длину, т.е. вызвать поворот вектора \bar{L} , а вместе с ним и поворот оси гироскопа вокруг вертикали, как это показано на Рис. 1.

При решении нелинейной задачи устойчивости рассмотрим три степени свободы движения гироскопа. В качестве обобщенных координат выберем углы Эйлера ψ, θ, φ . Считаем, как и раньше, что ось ζ направлена по оси симметрии гироскопа. Тогда $J_\xi = J_\eta = I$; $I_\zeta = I_0$. Свобода трех вращений ψ, θ, φ может быть осуществлена путем установки гироскопа в карданном подвесе [3, 4]. Возможно, также рассматривать сферическое движение волчка, шарнирно-опертого в одной точке.

В работе [5] приведены дифференциальные уравнения движения для симметричного гироскопа в форме Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(I\dot{\psi} \sin^2 \theta - I_0 \omega_\zeta \cos \theta) &= M_u \\ I(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I_0 \omega_\zeta \dot{\psi} \sin \theta &= M_k \\ I_0 \cdot d\omega_\zeta / dt &= M_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь точка над обозначением означает знак производной ($\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$), а $\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$. Вектора внешних моментов M_u, M_k, M_ζ направлены соответственно по осям $Oz, O\eta, O\zeta$ (Рис. 2.). В отличие от уравнений Эйлера, эти уравнения определяют движение только симметричного тела, для которого $J_\xi = J_\eta$, но зато они проще, чем совокупность кинематического и динамического уравнений Эйлера.

В частном случае, когда на гироскоп действует только сила тяжести mg , приложенная на оси $O\zeta$ на расстоянии ϵ от центра, а ось Oz вертикальна, будем иметь $M_\zeta = 0$; $M_u = 0$; $M_k = mg\epsilon \sin \theta$ (рис. 2).

Здесь равновесие определено относительно проекций на «оси Резаля» [3] ζ, k, u (рис.2, 3), причем «линия узлов» k есть линия сечения плоскостей xu и $\xi\eta$, а «поперечная ось» u перпендикулярна осям ζ и k .

Скалярные уравнения движения гироскопа получены из уравнений Лагранжа (2) и записаны в форме, аналогичной [3]:

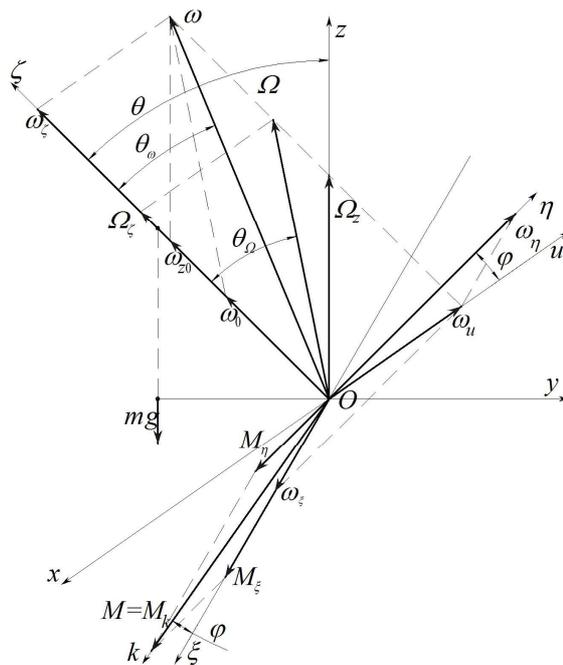


Рис. 2. Расчетная схема вращения гироскопа ($M = mg\epsilon \sin \theta$ – момент от действия силы тяжести mg , направленный по оси Резаля $O\eta$)

$$\left. \begin{aligned} I(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I_0 \omega_\zeta \dot{\psi} \sin \theta &= -mg\epsilon \sin \theta \\ I(\dot{\Omega}_z \sin \theta + 2\Omega_z \omega_k \cos \theta) - I_0 \omega_\zeta \omega_k &= 0 \\ I_0 \cdot d\omega_\zeta / dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рассмотрим решение (3) в общем случае, когда

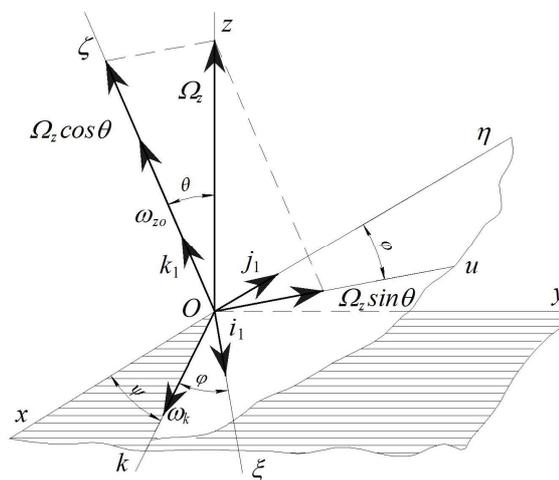


Рис. 3. Проекция угловых скоростей на подвижные оси координат

$\omega_\zeta \neq \omega_{z0}$. Из последнего уравнения (3) следует, что $\omega_\zeta = \omega_{z0} + \Omega_z \cos \theta = \text{const}$, т.е. ω_ζ – постоянна. Однако, значения слагаемых ω_{z0} и сомножителей Ω_z, θ непостоянны.

Первое уравнение (3) служит для определения переменной угловой скорости Ω_z в функции θ ; вто-

рое представляет дифференциальное уравнение второго порядка относительно θ . В работе [3] второе уравнение уже решено в линейной и нелинейной постановке при условии, что $\varepsilon = 0$.

Решим второе уравнение (3) другим известным способом [6] с учетом того, что $\varepsilon \neq 0$. Для этого прежде решаем преобразованное уравнение, записанное следующим образом

$$\dot{\Omega}_z + 2\Omega_z \omega_k \operatorname{ctg} \theta = \frac{I_0 \omega_\zeta \omega_k}{I \sin \theta}.$$

Используя равенство

$$\left. \begin{aligned} \omega_\zeta &= (I/I_0) \Omega_\zeta \\ \omega_0 &= (I/I_0 - 1) \Omega_\zeta \end{aligned} \right\},$$

полученное в [1] и известное соотношение $\dot{\Omega}_z = d\Omega_z/dt$, получим:

$$\frac{d\Omega_z}{dt} + 2\Omega_z \omega_k \operatorname{ctg} \theta = \frac{\Omega_\zeta \omega_k}{\sin \theta}. \quad (4)$$

Решив однородное линейное уравнение (4) известным способом [6]:

$$\frac{d\Omega_z}{\Omega_z} + 2\Omega_z \omega_k \operatorname{ctg} \theta dt = 0 \quad (5)$$

с учетом того, что $d\theta = \omega_k dt$ и $d \sin \theta = \cos \theta d\theta$, интегрируя (5), получим [7]:

$$\ln \Omega_z = -2(\ln \sin \theta - \ln \sin \theta_0),$$

где $\sin^2 \theta_0 = C$ – постоянная интегрирования,

θ_0 – угол в начальный момент времени $t = 0$ (начальные условия).

Запишем Ω_z в виде:

$$\Omega_z = \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \right)^2 = \frac{C}{\sin^2 \theta}.$$

Применив вариацию постоянной

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = -\frac{2C \cos \theta d\theta}{\sin^3 \theta} + \frac{dC/dt}{\sin^2 \theta},$$

подставим полученное выражение в неоднородное уравнение (4):

$$-\frac{2C \cos \theta d\theta}{\sin^3 \theta} + \frac{dC/dt}{\sin^2 \theta} + \frac{2C \cos \theta d\theta}{\sin^3 \theta} = \frac{\Omega_\zeta \omega_k}{\sin \theta}.$$

Вычисляем постоянную интегрирования из полученного равенства $dC/dt = \Omega_\zeta \omega_k \sin \theta$ или $dC = \Omega_\zeta \sin \theta d\theta$, откуда $C = -\Omega_\zeta \cos \theta + C_1$, и следовательно

$$\Omega_z = \frac{C_1 - \Omega_\zeta \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (6)$$

Новая постоянная интегрирования C_1 зависит от начальных условий θ_0 . Если выбрать начальные условия из условия симметрии θ относительно оси z , то $\theta_0 = 0$. Подставив θ_0 в (6), получим $\Omega_z = (C_1 - \Omega_\zeta)/0 = \infty$. Для того, чтобы угловая ско-

рость Ωz была конечна, необходимо числитель в (6) приравнять нулю: $C_1 - \Omega_\zeta \cos \theta_0 = C_1 - \Omega_\zeta = 0$, в результате найдем $C_1 = \Omega_\zeta$. Поставим C_1 в (6), получим выражение для угловой скорости

$$\Omega_z = \frac{\Omega_\zeta (1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (7)$$

Переменное значение C_1 , определяемое из (6) при произвольном значении θ , равно

$$\begin{aligned} C_1 &= \Omega_z \sin^2 \theta + \Omega_\zeta \cos \theta = \\ &= \omega_u \sin \theta + \Omega_\zeta \cos \theta = \Omega \cos(\theta - \theta_\Omega). \end{aligned}$$

Теперь вычислим постоянное значение $C_1 = \text{const}$, для начальных условий $\theta = \theta_0$: $C_1 = \Omega \cos(\theta_0 - \theta_\Omega)$. При $\theta_0 = 0$ получим $C_1 = \Omega \cos(-\theta_\Omega) = \Omega_\zeta$ и таким образом придем к соотношению (7). Для других начальных условий $\theta_0 \neq 0$, проведя новую ось z через повернутую относительно старой на угол θ_0 , придем относительно новой оси также к соотношению (7).

Вычислив Ω_z для угла $\theta = \theta_0 = 0$, применив правило Лопиталья, получим $\Omega_z(\theta = 0) = \Omega_\zeta/2$. Таким образом, для принятой модели вращений начальные условия есть $\theta_0 = 0$, $\Omega_z = \Omega_\zeta/2$. Такие начальные условия требуют деформации прямоугольника векторов угловых скоростей [1] (рис. 4) во время его (прямоугольника как единого целого) колебаний с частотой ω_k при приближении к оси Oz . Если бы деформация прямоугольника не происходила, то значение $\Omega_z(\theta = 0) \rightarrow \infty$.

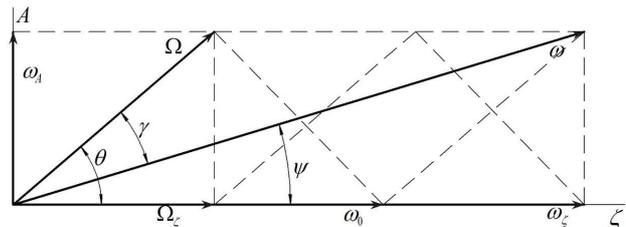


Рис. 4. Разложение вектора мгновенной угловой скорости ω на сумму двух составляющих векторов $\bar{\omega}_0$ и $\bar{\Omega}$ и сумму взаимортогональных компонент $\bar{\omega}_A$ и $\bar{\omega}_\zeta$

Приступим теперь к решению всей системы уравнений (3). Прежде всего, подставим выражение (7) в первое уравнение системы (3) и получим:

$$\ddot{\theta} + \frac{\Omega_\zeta^2 (1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \left[1 - \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] + \frac{m g \varepsilon}{I} \sin \theta = 0.$$

После несложных преобразований имеем:

$$\ddot{\theta} + \frac{\Omega_\zeta^2 (1 - \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} + \frac{m g \varepsilon}{I} \sin \theta = 0. \quad (8)$$

Уравнения движения изображающей точки [6] на фазовой плоскости $O\theta\omega_k$ будут иметь вид:

$$\frac{d\omega_k}{dt} + \frac{\Omega_k^2 (1 - \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} + \frac{mg\varepsilon}{I} \sin \theta = 0; \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_k.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$\frac{\omega_k^2}{2} + \int \frac{\Omega_k^2 (1 - \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} d\theta - \frac{mg\varepsilon}{I} \cos \theta = 0. \quad (9)$$

Интеграл, входящий в уравнение (9), вычисляем следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} & \Omega_k^2 \int \frac{1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta = \\ & = \Omega_k^2 \left(-\frac{\cos \theta}{2\sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\theta}{2} \right| + \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{2\sin^2 \theta} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\theta}{2} \right| \right) = \\ & = \Omega_k^2 \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} - h = \frac{\Omega_k^2}{2\cos^2(\theta/2)} - h. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в (9) и представим преобразованное уравнение (9) в виде

$$\frac{\omega_k^2}{2} + \frac{\Omega_k^2}{2\cos^2(\theta/2)} - \frac{mg\varepsilon}{I} \cos \theta = h.$$

Постоянная h определяется начальным отклонением и начальной скоростью, т.е. начальным запасом полной энергии. Два последних слагаемых в левой части последнего уравнения являются выражением энергетического баланса [8], который обозначим $Z = U(\theta)$:

$$Z = \frac{\Omega_k^2}{2\cos^2(\theta/2)} - \frac{mg\varepsilon}{I} \cos \theta.$$

Строим согласно общей теории [6] на плоскости (z, θ) кривую энергетического баланса для анализа фазовой картины (Рис. 5). Вычислим минимумы и максимумы кривой $Z = U(\theta)$ путем определения координат экстремума θ , функции Z , для чего определим корни уравнения $U'(\theta) = 0$ или

$$\frac{\Omega_k^2 \sin \theta_3}{2\cos^4(\theta_3/2)} + \frac{mg\varepsilon}{I} \sin \theta_3 = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) имеет единственный корень $\sin \theta_3 = 0$ или $\theta_3 = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Кривая энергетического баланса $Z(\theta)$ содержит изолированный минимум в точке $\theta = 0$. В точке $\theta = 2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) кривая асимптотически стремиться к $+\infty$. Кривая энергетического баланса $Z(\theta)$ является периодической функцией с периодом 2π . Начальный запас полной энергии определяется начальным отклонением ($\theta = \beta$) и он равен:

$$h = \frac{\Omega_k^2}{2\cos^2(\beta/2)} - \frac{mg\varepsilon}{I} \cos \beta. \quad (11)$$

Предположим, что гироскоп начинает совершать колебания из начального состояния покоя $\theta_0 = 0$. Пренебрегая демпфированием, можно ожидать, что движение гироскопа-волчка будет периодическим, но не просто гармоническим. Однако, если гироскоп приведен в движение достаточно сильным толчком или начальным отклонением $\theta = \beta$, то он будет продолжать двигаться в одном направлении. Это движение также может периодически повторяться. Эти соображения могут быть наглядно иллюстрированы, если мы проследим за движением по фазовому графику (рис. 5).

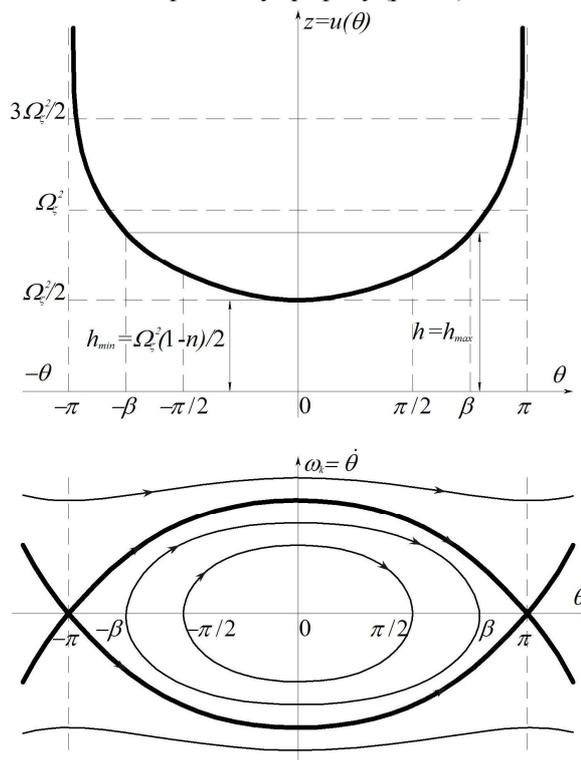


Рис. 5. Кривая энергетического баланса и фазовый график колебаний гироскопа

Введем обозначение $n = mg\varepsilon / (I\Omega_k^2)$ и, подставив его в (11), получим:

$$h = \frac{\Omega_k^2}{2} \left[\frac{1}{\cos^2(\beta/2)} - n \cos \beta \right]. \quad (12)$$

Выводы

Таким образом, в работе получены следующие условия устойчивости движений гироскопа. Когда $|\theta| < \beta$ и $h_{\min} \leq h < h_{\max}$, где $h_{\min} = \Omega_k^2(1-n)/2$ ($\theta = \theta_0 = \beta = 0$), гироскоп совершает периодические колебания, изображаемые сепаратриссами - замкнутыми кривыми внутри звеньев. Эти кривые окружают особые точки, соответствующие устойчивым равновесным положениям гироскопа. Замкнутыми

кривыми, расположенными внутри участка $(-\beta, +\beta)$ определяется полная фазовая картина движения гироскопа; другие звенья просто повторяют это изображение, так как значениям $\theta = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствует одно и то же устойчивое равновесное положение гироскопа. Когда $h > h_{\max}$, что может иметь место, если в начальный момент гироскопу вместе с отклонением β сообщается достаточно большая начальная скорость ω_k , фазовые траектории расширяют амплитуды колебаний до интервала $(-\beta, +\beta)$ и стремятся к положению неустойчивого равновесия, которого никогда не достигнут. Когда $h < h_{\min}$, движение гироскопа отсутствует. Когда $h = h_{\min}$ (устойчивый минимум), колебания гироскопа отсутствуют, есть только устойчивое вертикальное положение.

Литература

1. Игуменцев, Е.А. Момент импульса заряженного гироскопа [Текст] / Е.А. Игуменцев, Е.А. Прокопенко // *Авиационно-космическая техника и тех-*

нология. – 2011. – № 8/85. – С. 117-121.

2. Бутиков, Е.И. Динамика вращения твердого тела [Текст] / Е.И. Бутиков. – С.-Пб.: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета, 2007. – 22 с.

3. Булгаков, Б.В. Две задачи из теории волчка [Текст] / Б.В. Булгаков // *Математический сборник.* – М., 1934. – Т. 4, № 1. – С. 73-91.

4. Булгаков, Б.В. Прикладная теория гироскопов [Текст] / Б.В. Булгаков. – М.: Госиздат, 1976. – 356 с.

5. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Часть 1 [Текст] / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высшая школа, 1962. – 431 с.

6. Степаков, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степаков. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 468 с.

7. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы [Текст] / Г.Б. Двайт. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

8. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1958. – 628 с.

Поступила в редакцию 10.05.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.И. Кузнецов, Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины, Харьков.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ГИРОСКОПА

Е.О. Игуменцев, О.О. Прокопенко

В роботі проведено математичне моделювання обертань гіроскопа, широко вживаного в літальних апаратах. Задача розглядається у формі Лагранжа при нелінійних коливаннях. Визначено початкові умови і вирішена задача дослідження стійкості обертань. Розроблено розрахункову схему обертання гіроскопа. Показано, що сила тяжіння, яка прагне перекинути гіроскоп, фактично не викликає, а лише підтримує результуючу прецесію. Побудовано криву енергетичного балансу і фазовий графік коливань гіроскопу. Визначено точки екстремуму енергетичного балансу.

Ключові слова: гіроскоп, нутація, ідеальна та неідеальна куля, момент імпульсу, вектор, проекція, частота.

STABILITY ROTATION OF THE CHARGED GYROSCOPE

E.A. Igumentsev, E.A. Prokopenko

This article is about mathematical modeling of a gyroscope rotation. It is widely used in aircraft. The problem is considered in the Lagrange nonlinear oscillations form. Initial dates are determined. The problem of the stability rotation is solved. Analytical model of the gyroscope rotation is developed. The gravity, trying to tip gyroscope over, in fact does not cause, but only supports a resulting procession. For a symmetric gyroscope, when an external moment does not operate, frequency of rotation along the axis of symmetry is permanent. The chart of energy balance curve and the phase graph of oscillation are built for the gyroscope. by the energy balance extremum is determined.

Key words: gyroscope, nutation, ideal and non-perfect sphere, moment of impulse, vector, projection, frequency.

Игуменцев Евгений Александрович – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры систем управления технологических процессов и объектов Украинской инженерно-педагогической академии, Харьков, Украина, e-mail: izumea@i.ua.

Прокопенко Елена Александровна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры систем управления технологических процессов и объектов Украинской инженерно-педагогической академии, Харьков, Украина, e-mail: lleenna@i.ua.