УДК 681.3.06:518.54

В.Ф. МИРГОРОД[1], И.М. ГВОЗДЕВА[2], А.Г. БУРЯЧЕНКО[1], В.В. ДАНИЛОВ[1]

[1]*АО «Элемент», Одесса, Украина*
[2]*Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ С ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ ПЕРЕДАТОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В работе предлагается подход к моделированию динамических процессов и измерительных каналов, математические модели которых в виде передаточных функций имеют трансцендентный и иррациональный характер. Эквивалентное представление таких математических моделей предлагается отыскивать в виде оператора Вольтерры, и для моделирования использовать методы решения интегральных уравнений Вольтерры II–го рода относительно невязки (ошибки) между входом и выходом. Численный алгоритм для нахождения ядра моделирующей системы состоит в отыскании результата последовательных сверток относительно резольвенты. Разработано и реализовано программно-алгоритмическое обеспечение для предлагаемого подхода. Решены в численном виде тестовые примеры идентификации иррационального ядра моделирующей системы по резольвенте, заданной массивом данных. Исследовано влияние шумов измерений.

Ключевые слова: *математическая модель, интегральные уравнения, численное решение, идентификация.*

Введение

Методы математического моделирования являются общепризнанным средством исследования процессов в сложных динамических системах. Проблемным вопросом является повышение адекватности математических моделей (ММ) на основе расширения круга форм математического описания таких процессов. Перспективным для использования являются интегральные уравнения (ИУ) Вольтерры II–го рода, имеющие большую общность по сравнению с традиционными ММ в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

Важная научно-прикладная задача состоит в разработке методов и средств нахождения численных решений ИУ указанного типа, используемых в качестве ММ процессов изменения состояния сложных динамических процессов.

1. Постановка проблемы и цель исследования

Теория ИУ детально разработана и представлена в известных работах [1 – 3]. Наибольшую значимость имеют прикладные работы [4 – 6], посвященные методам решения ИУ и их компьютерной реализации.

Перспективным направлением представляется установление решений уравнений, связывающих ядро и резольвенту ИУ, позволяющих решить ряд классов ИУ с различной правой частью. Недостаточно исследованными являются вопросы нахождения численных решений ИУ, ядро которых не выражается в элементарных функциях. Математические модели процессов с ядром указанного вида соответствуют, как известно, дифференциальным уравнениям в частных производных. Для ряда задач моделирования изменения состояния ГТД по температурному каналу такая задача имеет важное прикладное значение, так как традиционные методы моделирования не позволяют достичь необходимого соответствия с экспериментальными данными.

Целью настоящей работы является разработка метода моделирования процессов изменения состояния сложных динамических объектов, представленных передаточными функциями в иррациональном и трансцендентном виде.

2. Основные результаты исследований

Рассматривается динамическая система, описание входа-выхода которой имеет вид оператора Вольтерры

$$y(t) = V_r\{f(t)\} = \int_a^t r(t,s)f(s)ds, \qquad (1)$$

где ядро интегрального оператора является переходной функцией системы.

Если задано дифференциальное уравнение (ДУ) относительно $y(t)$ с правой частью в виде $f(t)$, или дифференциального оператора от $f(t)$, то соотношение (1) может быть получено известными способами.

Если ввести сигнал ошибки (невязки) в виде

$$e(t)=f(t)-y(t)=f(t)-\int_a^t r(t,s)f(s)ds,$$

то полученное соотношение совпадает с известным решением через резольвенту ИУ Вольтеры второго рода следующего вида

$$e(t)=f(t)-V_k\{e(t)\}=f(t)-\int_a^t k(t,s)e(s)ds. \quad (2)$$

Следовательно, ИУ (2) является эквивалентным представлением динамической системы, заданной соотношением (1).

Из приведенных выражений следует известное ИУ, которое связывает ядро и резольвенту

$$k(t,s)=r(t,s)+\int_s^t r(t,\lambda)k(\lambda,s)d\lambda. \quad (3)$$

Нахождение решения уравнения (3) дает возможность выполнить указанное эквивалентное преобразование. Из (3) следует необходимое решение для частного случая разностного ядра моделирования в изображениях вида

$$K(s)=R(s)/(1-R(s)). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что (4) полностью совпадает с выражением для передаточной функции разомкнутой следящей системы, для которой изображение резольвенты является передаточной функцией замкнутой системы.

Если резольвента известна в аналитическом виде, то определение ядра для моделирования возможно путем нахождения оригинала с помощью обратного преобразования Лапласа от (4). Если же резольвенте задана в численном виде, то способ определения ядра следует из известного [3] соотношения перехода (4) в область оригиналов в виде ряда последовательных сверток

$$k(t)=r(t)+r(t)*r(t)+[r(t)*r(t)]*r(t)+... \quad (5)$$

Представление в оригиналах (5) соответствует разложению изображения (4) в степенной ряд.

В качестве примера рассмотрим соотношение (1), для которого резольвента имеет следующий вид

$$R(s)=1/\left(1+\sqrt{s}\right), \qquad r(t)=1/\sqrt{\pi t}. \quad (6)$$

Согласно (4) получаем точное аналитическое решение в виде

$$K(s)=1/\sqrt{s}, \quad k(t)=1/\sqrt{\pi t}-e^t\left[1-\operatorname{erfc}\left(\sqrt{t}\right)\right]. \quad (7)$$

Следуя [4], соотношение (1) в виде (6) описывают процесс индукционного или радиационного нагрева.

Для рассматриваемого примера решена в численном виде задача идентификации ядра моделирования по заданной выборке данных резольвенты согласно (5) в сопоставлении с известным точным решением. Приемлемую точность обеспечивают 5…6 слагаемых в ряде (5). На рис. 1 представлен результат такой идентификации во временной области путем численной реализации разложения (5).

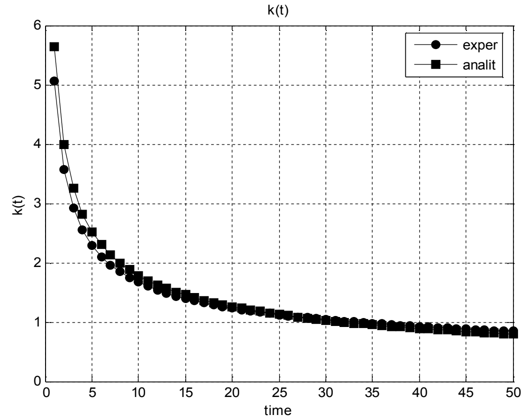

Рис. 1. Точное аналитическое ядро и результат приближения шестью слагаемыми ряда

На рис. 2 представлены спектры (АФЧХ) точных и приближенных решений.

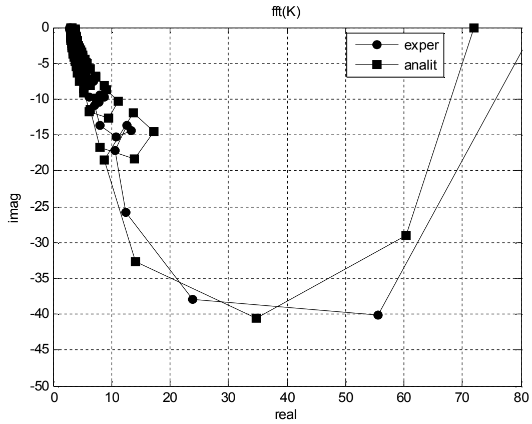

Рис. 2. Спектры точного аналитического ядра и результата приближения для примера

Как это следует из приведенных иллюстраций, совпадение спектров в низкочастотной области является удовлетворительным. Вопрос повышения точности определяется известными способами достижения компромисса между интервалом дискретизации данных и длиной выборки. Основные результаты и программно-алгоритмическое обеспечение для указанных примеров выполнено в среде MATLAB путем использования языка символьной математики.

Заключение

Предлагаемый подход к моделированию динамических систем может быть обобщен на более широкий круг задач. Имея данные эксперимента в виде переходной функции или АФЧХ, априори неизвестно, к какому классу динамических систем они относятся. Представления (1) – (4) и ряд (5) дают возможность получить в численном виде ядро для моделирования без его аппроксимации. Для физически реализуемых систем переходная функция стремится к нулю за конечное время, которое определяет длину выборки, а интервал ее дискретизации определяет точность воспроизведения высокочастотных составляющих.

Перспективы дальнейших исследований заключаются в распространении предлагаемого подхода на круг задач, в которых преобразование (1) задано в табличном виде.

Литература

1. Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Текс] / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т. 4, Ч. 1. – 336 с.

2. Забрейко, П.П. Интегральные уравнения [Текс] / П.П. Забрейко,А.И. Кошелев, М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1968. – 448 с.

3. Верлан, А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям [Текс] / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Техника, 1986. – 700 с.

4. Методы и устройства интерпретации экспериментальных данных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов [Текс]/ А.Ф. Верлань, Б.Б. Абдусатаров, А.А. Игнатенко, М.А. Максимович. – К.: Наук. думка, 1993. – 258 с.

5. Миргород, В.Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода [Текс]/ В.Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 68-80.

6. Миргород, В.Ф. Новые компьютерно-ориентированные формы математических моделей авиационных газотурбинных двигателей [Текс]/ В.Ф. Миргород, В.М. Грудинкин // Искусственный интеллект. – 2008. – № 4. –С. 117-124.

Поступила в редакцию 27.05.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.А. Положаенко, Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина.

МОДЕЛЮВАННЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ КАНАЛІВ З ТРАНСЦЕНДЕНТНИМИ ПЕРЕДАТНИМИ ФУНКЦІЯМИ

В.Ф. Миргород, І.М. Гвоздева, А.Г. Буряченко, В.В. Данилов

У роботі пропонується підхід до моделювання динамічних процесів і вимірювальних каналів, математичні моделі яких у вигляді передатних функцій мають трансцендентний і ірраціональний характер. Еквівалентне подання таких математичних моделей пропонується відшукувати у вигляді оператора Вольтерри, і для моделювання використовувати методи рішення інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду відносно нев'язки (помилки) між входом і виходом. Чисельний алгоритм для знаходження ядра моделюючої системи складається у відшуканні результату послідовних згорток щодо резольвенти. Розроблено й реалізоване програмно-алгоритмічне забезпечення для пропонованого підходу. Вирішені в чисельному виді тестові приклади ідентифікації ірраціонального ядра моделюючої системи по резольвенті, заданої масивом даних. Досліджено вплив шумів вимірів.

Ключові слова: математична модель, інтегральні рівняння, чисельне рішення, ідентифікація.

SIMULATION OF MEASURING CHANNELS WITH TRANSCENDENTAL TRANSFER FUNCTIONS

V.F. Mirgorod, I.M. Gvozdeva, A.G. Buryachenko, V. V. Danilov

In this paper an approach to modeling of dynamic processes and measuring channels is proposed. Mathematical models are presented in the form of transfer functions. They are transcendental and irrational nature. Equivalent representation of mathematical models are proposed to look in the form of a Volterra operator. You must use methods of solving Volterra integral equations of the II-nd kind with respect to residuals (errors) between the input and output. A numerical algorithm for finding the kernel of the simulation system is to find the result of successive convolutions with respect to resolution. Designed and implemented software and algorithmic support for the proposed approach. Solutions numerically test cases identify the irrational core of simulation system. This holds for the resolvent, given an array of data. The effect of noise measurements is investigated.

Key words: mathematical model, integral equations, numerical solution, identification.

Миргород Владимир Федорович – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.

Гвоздева Ирина Маратовна – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Одесского национального политехнического университета, Одесса, Украина, e-mail:onophenko@mail.ru.

Буряченко Анна Григорьевна – главный метролог АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: annaodessa2007@rambler.ru.

Данилов Всеволод Владимирович – ведущий программист ОАО «Элемент», Одесса, Украина, email: Odessa@element.od.ua.