

УДК 539.3

С.В. ФИЛИПКОВСКИЙ

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРА НА ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОЙ ВИБРАЦИИ ОСНОВАНИЯ

Получена модель колебаний ротора на двух опорах с шарикоподшипниками. Учтены гироскопические моменты диска, нелинейные упругие свойства и демпфирование шарикоподшипников. Для анализа полученной системы применены численные итерационные методы. Исследованы амплитудно-частотные характеристики ротора и области неустойчивости периодических режимов при одновременном действии дисбаланса диска и кинематическом возбуждении заданной вибрацией опор. Вблизи резонанса поперечных колебаний ротор имеет мягкую характеристику, а вблизи резонанса продольных колебаний – жёсткую характеристику.

Ключевые слова: ротор, шарикоподшипники, демпфирование, дисбаланс, кинематическое возбуждение колебаний, амплитудно-частотная характеристика.

Введение

Многие важные агрегаты самолётов находятся в зоне интенсивных вибраций. Например, система жизнеобеспечения транспортного самолёта содержит блок кондиционирования воздуха, основным агрегатом которого является турбохолодильник. Как правило, блоку передаётся вибрация планера, возбуждаемая двигателями. Для определения опасных режимов турбохолодильника и проектирования виброизоляции блока необходимо исследовать колебания ротора, вызываемые совместным действием дисбаланса и вибрации корпуса, в котором установлены подшипники. Вибрация корпуса осуществляется одновременно в продольном и поперечном направлениях относительно оси вращения ротора. Расстояние между опорами ротора одного порядка с его поперечными размерами, поэтому будем полагать, что жёсткость ротора велика по сравнению с жёсткостью шарикоподшипников, в которых он вращается.

Поперечные колебания валов с дисками в линейной постановке с учётом гироскопических моментов, внешнего и внутреннего трения исследованы Ф.М. Диментбергом [1]. Нестационарные линейные поперечные колебания с учётом гироскопических моментов дисков и распределённой массы вала исследованы в работе [2]. К. Пьерр и С. Шоу разработали метод нелинейных нормальных форм для исследования колебаний системы с нелинейным упругим элементом [3]. Собственные частоты линейных колебаний жесткого ротора на упругих радиально-упорных шарикоподшипниках исследованы Л.З. Новиковым [4]. Он получил формулы для нели-

нейных радиальных и осевых сил шарикоподшипников. Демпфирование, обусловленное смазкой шарикоподшипников, рассмотрено в [5,6], обычно его определяют на основе экспериментов и описывают моделью вязкого трения. Свободные нелинейные колебания роторов на шарикоподшипниках исследованы в статьях [7,8].

Целью настоящей работы является исследование нелинейных колебаний ротора с диском на шарикоподшипниках, возбуждаемых заданным движением опор.

1. Уравнения движения системы

Расчетная модель ротора показана на рис. 1. Начало координат располагаем в сечении опоры А. Длина вала – l , расстояние от опоры А до диска – l_1 . Перемещения сечений вала по направлениям координатных осей обозначим u_x , u_y , u_z . Определим перемещения вала [3]:

$$\begin{aligned} u_x(\xi, t) &= x_1(t) \frac{\xi}{l} + x_2(t) \frac{l-\xi}{l}; \\ u_y(\xi, t) &= y_1(t) \frac{\xi}{l} + y_2(t) \frac{l-\xi}{l}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_\mu(t)$, $y_\mu(t)$ – обобщённые координаты перемещения цапф;

μ – номера опор;

ξ – координата сечения по оси z . Поскольку перемещения $x_\mu(t)$ и $y_\mu(t)$ малы по сравнению с длиной вала и деформацию вала вдоль оси z , не учитываем, то колебания ротора вдоль оси вращения можно описать одной обобщённой координатой

$$u_z(\xi, t) = z(t). \quad (2)$$

Компоненты упругих реакций подшипника вдоль осей x, y, z получены в работе [4]; они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_{x\mu} &= K \sum_{v=1}^N [x_{\mu} \cos \alpha \cos \beta_v + y_{\mu} \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &\quad + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \cos \beta_v, \\
 P_{y\mu} &= K \sum_{v=1}^N [x_{\mu} \cos \alpha \cos \beta_v + y_{\mu} \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &\quad + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \sin \beta_v, \\
 P_{z\mu} &= K \sum_{v=1}^N [x_{\mu} \cos \alpha \cos \beta_v + y_{\mu} \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &\quad + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \sin \alpha, \\
 K &= \frac{3Q}{2N} z_0^{-3/2} \sin^{-5/2} \alpha,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где x_{μ}, y_{μ}, z – смещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца; μ – номер обобщенной координаты цапфы; углы α и β_v показаны на рис. 2; v и N – номер и количество шариков; Q – сила предварительного осевого натяга, z_0 – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы Q .

Величину z_0 определяем из геометрических соотношений в зонах контакта

$$z_0 = (2R_K + w_1 + w_2 - d_B) \sin \alpha,$$

где R_K – радиусы канавок качения в кольцах подшипника, w_1 и w_2 – сближения внутреннего и внешнего колец с шариком по направлению линии контакта, вызванное предварительным осевым поджатием; d_B – диаметр шарика. Сближения вычисляем по формуле Герца [9]:

$$w_i = b_i P_K^{3/2}; i = 1, 2,$$

где b_1 и b_2 – коэффициенты формулы Герца;

P_K – сила сжатия, действующая по направлению линии контакта

$$P_K = Q / (N \sin \alpha).$$

Угол α определяется из уравнения

$$(2R_K + w_1 + w_2 - d_B) \cos \alpha = R_1 + 2R_K - R_2,$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутреннего и внешнего колец, измеренные от оси подшипника до середин канавок качения.

Коэффициенты формулы Герца определены выражением

$$b = \frac{3}{2} F_1 \sqrt[3]{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) k^2 (\Theta_1 + \Theta_2)^2 / (3E_1)},$$

где F_1, E_1 – эллиптические интегралы первого и второго рода;

$K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ – кривизны главных нормальных сечений контактирующих поверхностей;

k – корень трансцендентного уравнения

$$(F_1 - E_1) / (F_1 - E_1/k^2) = (K_{11} - K_{21}) / (K_{12} - K_{22}),$$

Величины Θ_1 и Θ_2 зависят от свойств материалов контактирующих тел, они определяются так:

$$\Theta_i = (1 - \sigma_i^2) / (\pi E_i); i = 1, 2,$$

где σ_i – коэффициент Пуассона,

E_i – модуль упругости.

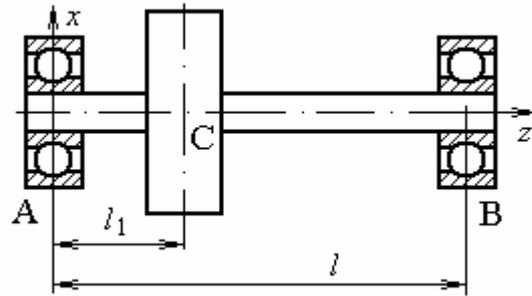


Рис. 1. Эскиз ротора

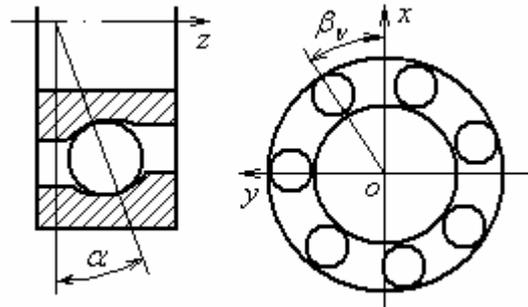


Рис. 2. Эскиз шарикоподшипника

Выражения (3) можно представить в виде степенных рядов по обобщенным координатам цапф, ограничившись третьим порядком малости по $x_{\mu}/z_0, y_{\mu}/z_0, z/z_0$:

$$\begin{aligned}
 P_{x\mu} &= c_r x_{\mu} + \\
 &\quad + \frac{c_r x_{\mu} z}{2z_0} - \frac{c_r x_{\mu}^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x_{\mu} y_{\mu}^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x_{\mu} z^2}{8z_0^2}, \\
 P_{y\mu} &= c_r y_{\mu} + \\
 &\quad + \frac{c_r y_{\mu} z}{2z_0} - \frac{c_r y_{\mu}^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y_{\mu} x_{\mu}^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y_{\mu} z_{\mu}^2}{8z_0^2}, \\
 P_{z\mu} &= \frac{c_a 2z_0}{3} + c_a z + \\
 &\quad + \frac{c_r x_{\mu}^2}{4z_0} + \frac{c_r y_{\mu}^2}{4z_0} + \frac{c_a z^2}{4z_0} - \frac{c_r z x_{\mu}^2}{8z_0^2} - \frac{c_r z y_{\mu}^2}{8z_0^2} - \frac{c_a z^3}{24z_0^2},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где $c_r = \frac{3}{4} N K z_0^{1/2} \sin^{1/2} \alpha \cos^2 \alpha, c_a = 2c_r \operatorname{tg}^2 \alpha.$

Из соотношений (4) следует, что перемещение опорного сечения вала по любому направлению вызывает реакцию подшипника по всем трём координатным направлениям.

Для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Используем выражения (1), (2) и (4) для записи кинетической и потенциальной энергий. Для описания демпфирования введём функцию Рэлея Φ

$$\Phi = \frac{C}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}^2), \quad (5)$$

где C – коэффициент демпфирования. В результате получим уравнения движения ротора в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [\bar{K}]\{U^2\} + [\tilde{K}]\{UU_\lambda\} + [\check{K}]\{U^3\} + [\check{K}]\{U_\mu^2 U_\nu\} = \{F(t)\}, \quad (6)$$

где $[K]$, $[\bar{K}]$, $[\tilde{K}]$, $[\check{K}]$ и $[\check{K}]$ – матрицы жёсткости; $[G]$ – гироскопическая матрица; $[C]$ – матрица демпфирования; $[M]$ – матрица масс; $\{U\} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ z]^T$ – вектор перемещений; $\{F(t)\}$ – вектор возмущающих воздействий, t – время.

Матрица $[\tilde{K}]$ имеет размер 12×5 , остальные матрицы имеют размер 5×5 . Компоненты матриц записываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= K_{2,2} = K_{3,3} = K_{4,4} = c_r, \\ K_{5,5} &= 2c_a, \\ \bar{K}_{5,1} &= \bar{K}_{5,2} = \bar{K}_{5,3} = \bar{K}_{5,4} = c_r / (4z_0), \\ \bar{K}_{5,5} &= c_a / (2z_0), \\ \tilde{K}_{1,1} &= \tilde{K}_{2,2} = \tilde{K}_{3,3} = \tilde{K}_{4,4} = c_r / (2z_0), \\ \check{K}_{1,1} &= \check{K}_{2,2} = \check{K}_{3,3} = \check{K}_{4,4} = -c_r / (32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha), \\ \check{K}_{5,5} &= -c_a / (12z_0^2), \\ \check{K}_{1,1} &= \check{K}_{2,2} = \check{K}_{3,3} = \check{K}_{4,4} = -c_r / (32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha), \\ \check{K}_{5,5} &= \check{K}_{5,6} = \check{K}_{5,7} = \check{K}_{5,8} = \check{K}_{1,9} = \\ &= \check{K}_{2,10} = \check{K}_{3,11} = \check{K}_{4,12} = -c_a / (8z_0^2), \\ G_{1,2} &= G_{2,3} = G_{4,1} = G_{3,4} = \frac{2\rho I \Omega}{1} + \frac{I_0 \Omega}{I^2}, \\ G_{2,1} &= G_{3,1} = G_{4,3} = G_{1,4} = -G_{1,2}, \\ M_{1,1} &= M_{2,2} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{1} + \frac{I_1^2}{I^2} m_0 + \frac{I_1}{I^2}, \\ M_{1,3} &= M_{2,4} = M_{3,1} = M_{4,2} = \\ &= \frac{\rho S l}{3} - \frac{\rho I}{1} + \frac{I_1}{1} \left(1 - \frac{I_1}{1}\right) m_0 - \frac{I_1}{I^2}, \end{aligned}$$

$$M_{3,3} = M_{4,4} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{1} + \left(1 - \frac{I_1^2}{I^2}\right) m_0 + \frac{I_1}{I^2},$$

$$M_{5,5} = \rho I S + m_0,$$

где Ω – угловая скорость ротора.

Остальные компоненты матриц равны нулю. Вектор нелинейных произведений перемещений второй степени имеет вид

$$\{UU_\lambda\} = [x_1 z \ y_1 z \ x_2 z \ y_2 z \ 0]^T$$

Компоненты вектора нелинейных произведений третьей степени $\{U_\mu^2 U_\nu\}$ записаны в следующем порядке $x_1 y_1^2$, $y_1 x_1^2$, $x_2 y_2^2$, $y_2 x_2^2$, $z x_1^2$, $z y_1^2$, $z x_2^2$, $z y_2^2$, $x_1 z^2$, $y_1 z^2$, $x_2 z^2$, $y_2 z^2$.

Колебания возбуждаются вибрацией опор, кроме того, на ротор действует сила дисбаланса диска

$$J = 2m_0 \Omega^2 e,$$

где e – эксцентриситет диска. Полагаем, что составляющая вибрации, перпендикулярная к оси вращения направлена вдоль оси y . Амплитуды виброускорений по направлениям координатных осей обозначим, соответственно, a_y и a_z . Вектор правой части имеет вид

$$\{F\} = \{F_d\} + \{F_v\},$$

$$\{F_d\} = [J \cos \Omega t \ J \sin \Omega t \ J \cos \Omega t \ J \sin \Omega t \ 0]^T,$$

$$\{F_v\} = [0 \ a_y \sin \omega t \ 0 \ a_y \sin \omega t \ a_z \sin \omega t]^T.$$

Умножив (6) на $[M]^{-1}$, перепишем уравнения движения в следующем виде:

$$\{\ddot{U}\} + [G_1]\{\dot{U}\} + [C_1]\{\dot{U}\} + [K_1]\{U\} + [\bar{K}_1]\{U^2\} + [\tilde{K}_1]\{UU_\lambda\} + [\check{K}_1]\{U^3\} + [\check{K}_1]\{U_\mu^2 U_\nu\} = \{F_1(t)\}. \quad (7)$$

2. Численный анализ вынужденных периодических колебаний

Уравнение (7) можно записать так:

$$\{\ddot{U}\} = f(\{U\}, \{\dot{U}\}, t), \quad (8)$$

где f – 5-мерная вектор-функция. Обозначив $\{V\} = \{\dot{U}\}$, перепишем (8) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\{\dot{Y}\} = \varphi(\{Y\}, t), \quad (9)$$

где φ – 10-мерная вектор-функция,

$\{Y\} = \{\{U\} \ \{V\}\}^T$. Условие периодичности решений уравнения (9) записывается так:

$$\{Y(0)\} = \{Y(T)\}, \quad (10)$$

где T – период. Если ввести в рассмотрение векторы $\{Y\}_0 = \{Y(0)\}$ и $\{Y\}_T = \{Y(T)\}$, определяющие состояние системы (9) в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, то задачу Коши (9) с краевыми условиями (10) можно свести к решению неявного уравнения

$$\{Y(\{Y\}_0)\}_T = \{Y\}_0. \quad (11)$$

Решая задачу (11) численными методами [10] получаем амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) системы.

На рис. 3 представлена АЧХ колебаний ротора на двух подшипниках 46305 ГОСТ 831-75. Параметры вала таковы: диаметр $d=0,025$ м, $E=2 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho=8 \cdot 10^3$ кг/м³, $l=0,5$ м, $\Omega=6000$ об/мин, $a_y=a_z=10$ м/с². На валу посередине закреплен диск с инерционными параметрами $m_0=10$ кг, $I_1=0,1$ кг·м², $I_0=0,2$ кг·м², величина дисбаланса $m_0 \cdot e=10^{-6}$ кг·м. Коэффициент эквивалентного вязкого демпфирования был принят 100 Н·с/м. По оси абсцисс отложена относительная частота $\bar{f} = \omega/\omega_1$, где ω_1 – резонансная частота линейных поперечных колебаний ротора. По оси ординат отложена относительная амплитуда $\bar{A} = A/z_0$, где A – амплитуда на периоде, z_0 – определённый выше предварительный осевой натяг подшипников. Линии 1 и 2 на всех АЧХ соответствуют перемещениям поперёк и вдоль оси вращения ротора. Жёсткость шарикоподшипников в направлении оси вращения меньше, чем в радиальном направлении, поэтому при первой резонансной частоте преобладают продольные, а при второй – поперечные колебания ротора. Вблизи резонансных частот наблюдаются области неустойчивости периодических режимов, которые показаны штриховой линией.

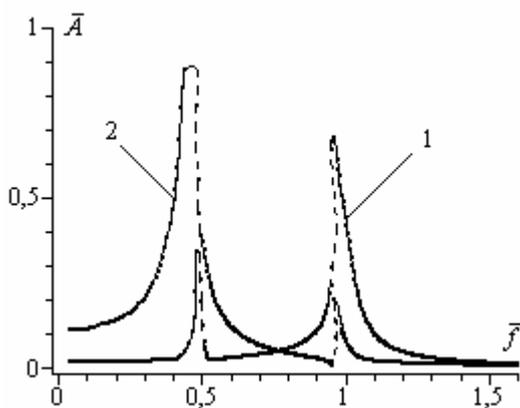


Рис. 3. АЧХ ротора на шарикоподшипниках

На рис. 4 и рис. 5 представлены части АЧХ вблизи резонансных частот. Устойчивые режимы показаны сплошной линией, а неустойчивые – штриховой линией. Вблизи резонанса поперечных колебаний ротор имеет мягкую характеристику, а

вблизи резонанса продольных колебаний – жёсткую характеристику.

Заключение

Рассматривая АЧХ колеблющегося ротора можно сделать вывод, что вблизи резонансных частот колебаний имеются области неустойчивости. В этих областях есть по две ветви устойчивых колебаний с разными амплитудами.

Канавки качения шарикоподшипников имеют двойную кривизну. Кривизна главного нормального сечения, в котором лежит ось вращения, постоянна. Кривизна второго главного нормального сечения переменная. При увеличении амплитуды колебаний в радиальном направлении шарики перемещаются в область большей кривизны контактирующей поверхности, то есть в зону меньшей жёсткости зоны контакта и частоты уменьшаются. При увеличении амплитуды колебаний в осевом направлении шарики перемещаются в область меньшей кривизны контактирующей поверхности, то есть в зону большей жёсткости зоны контакта и частоты увеличиваются.

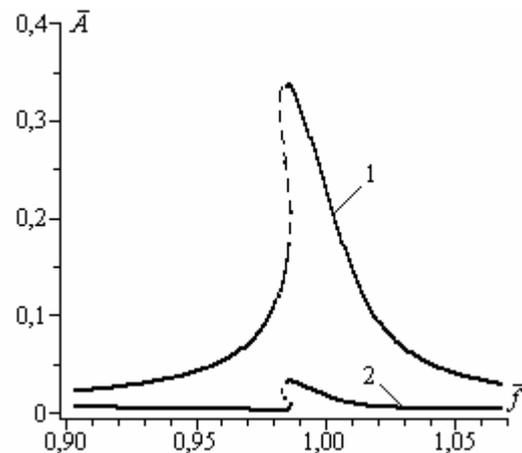


Рис. 4. Область неустойчивости поперечных колебаний

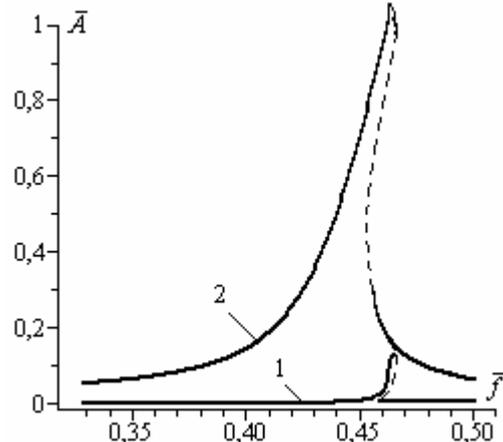


Рис. 5. Область неустойчивости продольных колебаний

Полученные результаты хорошо согласуются с исследованиями свободных колебаний этого ротора, выполненного методом нелинейных нормальных форм в работе [8].

Вследствие нелинейной связи между радиальной и осевой жёсткостью шарикоподшипника роторы двигателей и агрегатов самолётов совершают связанные поперечно-продольные колебания. Величины амплитуд имеют одинаковый порядок.

Литература

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М. Диментберг. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.
2. Филипковский С.В. Расчет динамического напряженно-деформированного состояния ротора при кратковременных поперечных нагрузках / С.В. Филипковский // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1991. – № 1. – С. 66-70.
3. Legrand M. Nonlinear Normal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method / M. Legrand, D. Jiang, C.E. Pierr, S.W. Shaw // Int. J. of Rotating Machinery. – 2004. – Vol. 10, № 4. – P. 319-335.
4. Новиков Л.З. Определение собственных частот колебаний электродвигателя, связанных с нелинейной упругостью подшипников / Л.З. Новиков //

Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 6. – С. 84-91.

5. Бальмонт В.Б. О колебаниях момента сопротивления вращению шарикоподшипника / В.Б. Бальмонт, Б.О. Дубовецкий, А.М. Авдеев, Г.В. Селезнёв // Машиноведение. – 1988. – № 3. – С. 73-81.

6. Позняк Э.Л. Маятниковые колебания несимметричного жесткого ротора в подшипниках с зазорами / Э.Л. Позняк, Т.Н. Гладышева, В.Б. Ковалев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1990. – № 4. – С. 33-40.

7. Филипковский С.В. Нелинейные нормальные формы колебаний ротора на подшипниках качения / С.В. Филипковский // Вестник двигателестроения. – 2010. – № 2. – С. 160-165.

8. Филипковский С.В. Нелинейные нормальные формы связанных поперечно-продольных колебаний ротора на подшипниках качения / С.В. Филипковский, К.В. Аврамов // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2010. – Вып. 46. – С. 38-46.

9. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. Избр. Тр., Т. 1 / А.Н. Динник. – К.: Изд-во АН УССР, 1952. – С. 15-114.

10. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Модели, методы, явления / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.

Поступила в редакцию 30.05.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой теоретической механики О.К. Морачковский, Национальный технический университет “ХПИ”, Харьков.

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ РОТОРА НА ПІДШИПНИКАХ КОЧЕННЯ ПРИ ЗАДАНІЙ ВІБРАЦІЇ ОСНОВИ

С.В. Філіпковський

Отримано модель коливань ротора на двох опорах із шарикопідшипниками. Враховано гіроскопічні моменти диска, нелінійні пружні властивості й демпфірування шарикопідшипників. Для аналізу отриманої системи застосовані чисельні ітераційні методи. Досліджено амплітудно-частотні характеристики ротора й області нестійкості періодичних режимів при одночасній дії дисбалансу диска й кінематичному порушенні заданою вібрацією опор. Поблизу резонансу поперечних коливань ротор має м'яку характеристику, а поблизу резонансу поздовжніх коливань - жорстку характеристику.

Ключові слова: ротор, шарикопідшипники, демпфірування, дисбаланс, кінематичне порушення коливань, амплітудно-частотна характеристика.

NON-LINEAR OSCILLATIONS OF THE ROTOR ON BALL BEARINGS AT THE GIVEN VIBRATION OF THE BASIS

S.V. Filipkovsky

The model of rotor oscillations on two nonlinear ball bearings is obtained. Gyroscopic moments of a disk, nonlinear elasticity and a damping of ball-bearings are taken into account. Numerical iterative methods are applied for the analysis of the obtained system. Amplitude-frequency characteristics of a rotor and the instability regions of periodic duties are investigated at simultaneous act of the disk unbalance and the kinematic excitation by the given vibration of support. Near to a resonance of lateral oscillations the rotor has a drooping characteristic, and near to a resonance of longitudinal oscillations - a flat characteristic.

Key words: rotor, ball-bearings, damping, unbalance, the kinematic excitation of oscillations, amplitude-frequency characteristic.

Філіпковський Сергій Володимирович – канд. техн. наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, svfil@ipmach.kharkov.ua.