

УДК 681.518.54

В.Ф. МИРГОРОД<sup>1</sup>, И.М. ГВОЗДЕВА<sup>2</sup>, А.Ю. КУЗЬМЕНКО<sup>3</sup><sup>1</sup>ОАО «Элемент», Украина<sup>2</sup>ОНПУ, Украина<sup>3</sup>ГП ЗМКБ «Ивченко-Прогресс», Украина

## НОВЫЕ ФОРМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

*В работе предложена резонаторно-волновая природа генерирования космических лучей в результате взрывной деструкции дискретной и материальной среды. Дискретность среды диктуется наличием в ней устойчивых аккумуляторов волновой энергии (резонаторов) различных иерархических уровней, геометрические размеры которых контролируются длинами волн тех видов энергии, которые им соответствуют. Согласно предложенному механизму быстрое (взрывное) рождение космических лучей соответствует началу развития модуляционно-осцилляторной неустойчивости на всех иерархических уровнях энергии. Ускорение космических лучей происходит за счет расходования энергии резонаторов больших размеров, внутри которых и находились вновь «рожденные» (свободные) частицы-резонаторы в энергетически связанном состоянии.*

**Ключевые слова:** резонаторы, резонанс, вселенский источник волновой энергии, модуляционно-осцилляторная неустойчивость, ускорение.

### Введение

Решение общей проблемы исследования процессов изменения состояния сложных нелинейных динамических объектов отыскивается в настоящее время методами математического и компьютерного моделирования в сопоставлении с экспериментальными исследованиями. Соответствующие математические модели (ММ) находят широкое применение как при решении исследовательских задач, так и при прикладном синтезе оптимальных систем управления движением таких объектов.

Общие вопросы построения математических моделей исследуемых управляемых процессов в нелинейных объектах широко освещены в литературных источниках [1, 2], однако в них основное внимание уделяется вопросам построения кусочно-линейных динамических моделей (КЛДМ) [3, 4], имеющих недостаточную точность. Проблематике построения моделей, удовлетворяющих компромиссу между вычислительной сложностью и точностью при их численной реализации уделяется недостаточное внимание.

Теоретические математические модели термодинамических процессов превращения энергии основаны на уравнениях сохранения и имеют форму систем нелинейных дифференциальных уравнений. Их решения устанавливаются при помощи громоздких рекуррентных процедур и поэтому нахождение таких решений требует значительных вычислительных ресурсов. Теоретические математические модели

требуют задания большого числа различных параметров, являющихся входными данными при моделировании. Такие параметры зачастую известны с недостаточной точностью.

Известные феноменологические математические модели основаны на различных методах линеаризации, поэтому проще в численной реализации, однако ошибки моделирования при использовании таких моделей столь велики, что ставят под сомнение возможность прикладного применения линеаризованных ММ.

Следовательно, создание новых математических моделей процессов управляемого изменения состояния нелинейных динамических объектов, методов их аппроксимационных и эквивалентных преобразований, является актуальным научным направлением, имеющим важное прикладное значение.

Целью настоящей работы является создание математических моделей в форме, обеспечивающей сокращение необходимых вычислительных ресурсов при их численной реализации и минимизацию ошибок моделирования при исследовании сложных нелинейных объектов.

### Основные результаты

Рассмотрим исходную математическую модель управляемого движения исследуемых объектов в форме векторно-матричной модели пространства состояний (ММПС) [3, 4]

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}[\bar{x}(t), s(t)], \quad (1)$$

где  $\bar{x}(t)$  – n-мерный вектор состояния;  $\bar{f}$  – вещественная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица;  $s(t)$  – скалярная режимная переменная, по которой ведется управление объектом.

Метод линеаризации уравнений состояния (1) заключается в разложении правой части в ряд Тейлора с удержанием линейных компонент и приводит к следующей линейной ММ пространства состояний (ММПС)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} = & J(\bar{x}, s) \Big|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_k \\ s=s_k}} (\bar{x} - \bar{x}_k) + \\ & + \bar{y}(\bar{x}, s) \Big|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_k \\ s=s_k}} (s - s_k) = A\Delta\bar{x} + \bar{b}\Delta s, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A, \bar{b}$  – матрица и вектор градиентов по соответствующим переменным правой части (1) в заданной точке рабочего установившегося режима

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}_k, s_k) = 0. \quad (3)$$

Недостатки ММ (2) обусловлены ошибками моделирования, так как даже в установившемся режиме семейство статических характеристик (СХ) объекта, следуя уравнениям (2), определяется в виде

$$\Delta x_{st} = A^{-1} \bar{b} \Delta s_{st} \quad (4)$$

Решение (4) существенно отличается от точного решения для СХ, определяемого из (3), либо непосредственно устанавливаемых экспериментальным путем, например, при стендовых испытаниях объекта.

Обозначим  $\bar{w} = \frac{d\bar{x}}{dt}$  и рассмотрим функциональную связь

$$\bar{w} = \bar{f}(\bar{x}, s). \quad (5)$$

Для вектор-функции (5) допустим существование обратной функции

$$\bar{x} = \bar{F}(\bar{w}, s) \quad (6)$$

и выполним ее разложение в ряд Тейлора, первоначально также с удержанием только линейных компонент

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{F}(\bar{w}_k, s_k) + & \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{w}} \Big|_{\bar{w}=\bar{w}_k, s=s_k} (\bar{w} - \bar{w}_k) + \\ & + \frac{\partial \bar{F}}{\partial s} \Big|_{\bar{w}=\bar{w}_0, s=s_k} (s - s_k). \end{aligned}$$

Из последнего выражения устанавливаем следующее соотношение:

$$\bar{w} - \bar{w}_k = \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{w}} \Big|_{\bar{w}=\bar{w}_k, s=s_k} \right]^{-1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \bar{x} - \bar{F}(\bar{w}_k, s_k) - \frac{\partial \bar{F}}{\partial s} \Big|_{\bar{w}=\bar{w}_0, s=s_k} (s - s_k) \right]. \\ & = M \left[ \bar{x} - \bar{F}(\bar{w}_k, s_k) - \bar{k}(s - s_k) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая принятые обозначения, получаем окончательно следующую математическую модель

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} = & \bar{f}(\bar{x}_k, s_k) + \\ & + M \left\{ \bar{x} - F[\bar{f}(\bar{x}_k, s_k), s_k] - \bar{k}(s - s_k) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если выполняются условия установившегося режима (3), то зависимость

$$\bar{x} = \bar{F}(0, s) = \bar{x}_{st}(s)$$

в явном виде определяет семейство статических характеристик объекта и ММ (8) является моделью динамики отклонений от СХ

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = M \left[ \bar{x} - \bar{x}_{st}(s_k) - \bar{k}(s - s_k) \right]. \quad (9)$$

Схема состояния ММ (9) представлена на рис. 1.

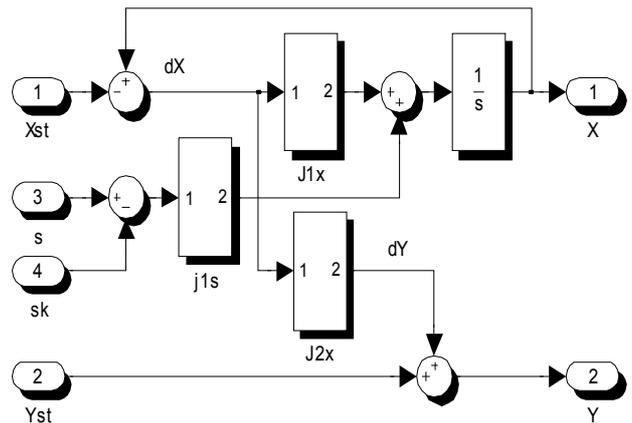


Рис. 1. Блок-схема линеаризованной модели

По своей структурной организации ММ (9) представляет собой многомерную астатическую следящую систему с нулевой статической ошибкой моделирования относительно СХ объекта, кусочно-линейно аппроксимированных касательными.

ММ (9) является кусочно-линейной моделью, как и ММ (2), и для установления их взаимосвязи рассмотрим полные производные (5) и (6) по режимной переменной

$$\frac{d\bar{f}}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{d\bar{F}}{ds}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{F}}{ds} = & \frac{\partial \bar{F}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{d\bar{w}}{ds} = \\ = & \frac{\partial \bar{F}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{d\bar{f}}{ds}. \end{aligned} \quad (11)$$

Прямой подстановкой (10) в (11) убеждаемся, что условия залегания изображающей точки на статической характеристике в виде  $\frac{d\bar{f}}{ds} = 0$  удовлетворяются только при выполнении следующих условий эквивалентности ММ (2) и (9)

$$M = A, \quad \bar{k} = A^{-1}\bar{b}, \quad (12)$$

где  $\bar{k} = \left. \frac{d\bar{x}_{st}(s)}{ds} \right|_{s=s_k}$  – крутизна СХ в выбранной точке.

При выполнении указанных условий полная производная в (11) равна частной производной. Заметим, что уравнение

$$\frac{d\bar{f}}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\bar{x}}{ds} = 0$$

действительно имеет решение следующего вида

$$\bar{x}_{st}(s) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 s,$$

то есть является уравнением семейства прямых, аппроксимирующих СХ.

Вернемся к разложению в ряд Тейлора обратной функции (7) и удержим в правой части нелинейные компоненты по режимной переменной до m-го порядка включительно

$$\begin{aligned} & \bar{w} - \bar{w}_k = A_k \times \\ & \times \left[ \bar{x} - \bar{F}(\bar{w}_k, s) - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \cdot \left. \frac{\partial^n \bar{F}}{\partial s^n} \right|_{\bar{w}=\bar{w}_k, s=s_k} (s-s_k)^n \right] = \\ & = A \{ \bar{x} - \\ & - \left[ \bar{F}(\bar{w}_k, s) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \cdot \left. \frac{\partial^n \bar{F}}{\partial s^n} \right|_{\bar{w}=\bar{w}_k, s=s_k} (s-s_k)^n \right] \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что выражение в квадратных скобках есть ни что иное, как разложение в степенной ряд семейства статических характеристик нелинейного объекта, так как  $\bar{w}_k = 0$ , причем если такое семейство представлено многомерным полиномом степени m, то допустимо точное представление в виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A_k [\bar{x} - \bar{x}_{st}(s)]. \quad (14)$$

Математическая модель (14) является нелинейной параметризованной моделью в форме Гаммерштейна, с нелинейной частью в виде полиномиально аппроксимированных СХ и линейной частью, имеющей структуру следящей системы. Модель имеет нулевую статическую ошибку моделирования относительно полиномиально заданных СХ, а динамика отклонений от них задается семейством матриц градиентов  $A_k$  для каждого из исследуемых установившихся режимов. Математическая модель (14) имеет меньшую, по сравнению с (2), вычислительную сложность ввиду исключения вектора градиентов по режимной переменной, что определяет ее преимущества.

Для оценки точности предлагаемых ММ выполнена их компьютерная реализация для силовой установки на базе трехвального газотурбинного двигателя в режиме “приемистость” в сопоставлении с реальными базами данных и проведена численная оценка точности моделей (рис. 2).

На рис. 2 обозначены pikZ – заданное значение степени повышения давления за компрессором  $\pi_k$ , pikReal – измеренное значение  $\pi_k$ , pikModel – моделируемое значение  $\pi_k$ . Степень повышения давления является косвенно измеряемым параметром и инструментально фиксируется системой измерения давления двигателя.

В результате проведенного компьютерного моделирования установлено, что среднеквадратическая ошибка модельных значений измеряемой режимной переменной в виде степени повышения давления за компрессором  $\pi_k$  относительно фактически измеренных составляет для ММСС 0,72 %, что подтверждает высокую точность предлагаемых новых ММ.

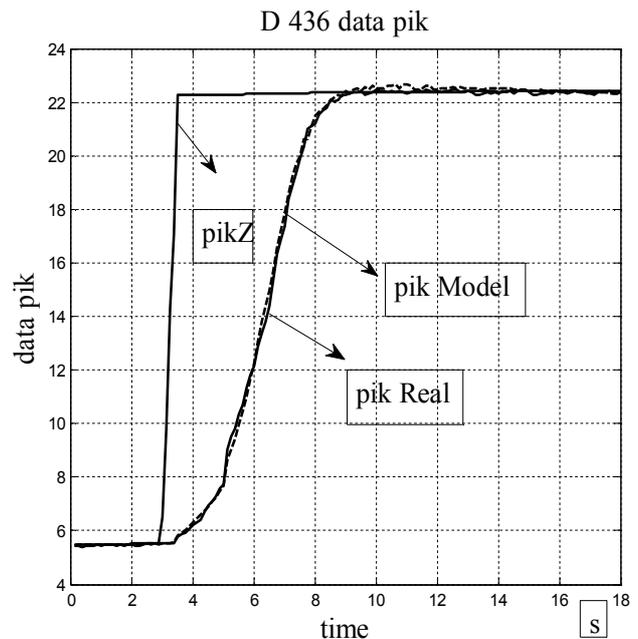


Рис. 2. Изменение параметра  $\pi_k$  газотурбинного двигателя

### Заключение

Таким образом, предложенные новые формы математических моделей изменения состояния сложных нелинейных динамических объектов, какими являются газотурбинные двигатели и силовые установки на их основе, обеспечивают необходимый уровень соответствия реальным экспериментальным данным.

Преимущества предложенных математических моделей заключаются в упрощении численной реализации, уменьшении ошибок моделирования, по

сравнению с КЛДМ, использовании априорной информации о виде статических характеристик.

Указанные преимущества предложенных математических моделей достигнуты за счет структурной декомпозиции исходной нелинейной модели пространства состояний к модели Гаммерштейна с нелинейной безинерционной частью в виде вектор-функции, отображающей статические характеристики двигателя, и линейной частью в виде многомерной следящей системы с астатизмом первого порядка.

Перспективы дальнейших исследований заключаются в оценке таких выходных переменных управляемых объектов, которые характеризуют их энергетическую эффективность, но не могут быть измерены непосредственно (тяга, располагаемая мощность и другие параметры).

## Литература

1. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей / С.В. Епифанов, В.И. Кузнецов, И.И. Богаенко и др. – К.: Техника, 1998. – 312 с.
2. Оптимизация многомерных систем управления газотурбинных двигателей / А.А. Шевяков, Т.С. Мартынова и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 256 с.
3. Гольберг Ф.Д. Математические модели газотурбинных двигателей как объектов управления / Ф.Д. Гольберг, А.В. Батенин. – М.: МАИ, 1999. – 80 с.
4. Лейбов Р.Л. Системы с неопределенными собственными значениями / Р.Л. Лейбов. – М.: Изд. асс. строит. вузов, 2006. – 184 с.

Поступила в редакцию 1.06.2011

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.Н. Крылов, Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина.

## НОВІ ФОРМИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗМІНИ СТАНУ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

*В.Ф. Миргород, І.М. Гвоздева, О.Ю. Кузьменко*

Для вирішення завдань управління режимами за непрямими параметрами і контролю стану стосовно до бортової апаратури пропонуються нові апроксимаційні форми математичних моделей нелінійних динамічних об'єктів. Запропоновані моделі засновані на безпосередньому обліку виду статичних характеристик об'єктів, одержуваних при стендових випробуваннях. Динамічна частина запропонованої моделі Гаммерштейна організована у вигляді астатичної стежить системи, що забезпечує підвищення точності моделювання та спрощує реалізацію при збереженні високого ступеня адекватності. Виконано зіставлення модельованих параметрів газотурбінного двигуна з даними бортової реєстрації.

**Ключові слова:** математична модель, нелінійний об'єкт, управління, динаміка, комп'ютерна реалізація.

## NEW FORMS OF MATHEMATICAL MODELS OF STATE CHANGE FOR NONLINEAR DYNAMIC OBJECTS

*V.F. Mirgorod, I.M. Gvozdeva, A.Y. Kuzmtnko*

For the tasks decision of modes management by indirect parameters and the control of a state over the onboard equipment are offered new approximated forms of mathematical models for nonlinear dynamic objects. Offered models are based on the direct account of a static characteristics type of the objects received at bench test. The dynamic part of offered Hammershtein model is organized in the form of the astatic servo-mechanism, that provides increase of modelling accuracy and simplifies realization at preservation of a high-scale of adequacy. Comparison of modeling parameters of gas turbine engine with onboard registration data was executed.

**Keywords:** mathematical model, nonlinear object, management, dynamics computer realization.

**Миргород Владимир Федорович** – канд. техн. наук, доцент, заместитель директора по научной работе, ОАО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.

**Гвоздева Ирина Маратовна** – д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Одесского национального политехнического университета, Одесса, Украина, e-mail: onophenko@mail.ru.

**Кузьменко Алексей Юлианович** – ведущий инженер ГП ЗМКБ «Ивченко – Прогресс», Запорожье, Украина.