УДК 631.7.04-197:631:7.019.12

В.О. ПОВГОРОДНИЙ

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Экспериментально-теоретическое исследование термоупругих и теплофизических характеристик материалов приборов, а также элементов турбостроения осуществляется исходя из решения обратной задачи термоупругости. Обратная задача термоупругости решается с использованием уравнений Дюамеля–Неймана, Фредгольма и гаранично-элементный аналог ядра интегрального оператора позволяет заменить эксперимент. Результаты расчета можно использовать как неотъемлемую часть проектирования объектов приборостроения и энергетического машиностроения (материалов паровых и газовых турбин), а также расчета их ресурса и выбора системы охлаждения.

Ключевые слова: *температура, температуропроводность, обратная задача, термоупругость.*

Введение

Температурные факторы играют важную роль при расчете напряженно-деформированного состояния твердых тел, учет которых базируется на модели связанной термоупругости [1, 2]. В эту модель помимо упругих характеристик входят и теплофизические величины, которые необходимо определять из некоторых теплофизических экспериментов. При этом к уравнениям движения сплошной среды добавляется уравнение притока тепла, которое и служит для определения поля температур. Наиболее популярной является модель несвязанной задачи, когда механические поля и поля температур определяются последовательно, начиная с решения уравнения теплопроводности. Подробно с постановками обратных задач термоупругости (ОЗТУ) для уравнений параболического типа и методах их решения можно познакомиться в монографиях [3, 4].

В настоящем пункте в качестве примера рассматривается простейшая ОЗТУ об определении единственного параметра – постоянного коэффициента температуропроводности. Для конечномерных обратных задач решение ОЗТУ обычно опирается на аналитическое решение прямой задачи, которое строится методом преобразования Лапласа. Для того чтобы найти параметр a, необходимо осуществить некоторый теплофизический эксперимент и создать меняющееся поле температур. Обычно это осуществляется на практике путем внесения в объект исследования (ОИ) нагревательного элемента, который имеет некоторое неизвестное контактное сопротивление и соответственно вносит значительную погрешность в поведение объекта исследования; подобные методы имеют достаточно большую погрешность при игнорировании этого фактора. Значительно более точным зарекомендовал себя метод адиабатного деформирования, который не требует дополнительных нагревательных элементов, а изменение поля температуры происходит за счет механического воздействия на ОИ и связанности полей деформаций и температур [1, 4].

Результаты исследований

В качестве модели рассмотрим стержень длины l и толщины b, который подвергается чистому изгибу за счет приложения к его концам изгибающих моментов величины M. В силу связанности полей напряжений, деформаций и температур и выполнения соотношений Дюамеля-Неймана в термоупругости (α_T – коэффициент температурного расширения)

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha_T(3\lambda + 2\mu)u\delta_{ij} \qquad (1)$$

в образце создается градиент температур, причем в силу того, что отличная от нуля компонента тензора напряжений σ_{11} линейно зависит от координаты x, то в образце в начальный момент времени создается начальное распределение температур $u(x,0) = \gamma_x$, где γ – некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от величины изгибающего момента и изгибной жесткости стержня. Дальнейшее изменение поля температур происходит в соответствии с уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (2)$$

где a – коэффициент температуропроводности. В случае тепловой изоляции образца граничные условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm b/2} = 0 . \qquad (3)$$

Зная граничную температуру $u\left(\frac{b}{2},t\right) = g(t)$ (или ее значения в некоторых точках), можно сформулировать обратную задачу об определении *a*, который войдёт в выражение для граничной температуры нелинейным образом, что типично для коэффициентных ОЗТУ. Для формулировки разрешающего соотношения построим решение прямой задачи методом интегрального преобразования Лапласа.

Введем

$$\bar{u}(x,p) = LU = \int_0^{\infty} u(x,t)\, e^{-pt}\, dt .$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}(p\bar{u} - u(x,0)) ,$$

или, с учетом начального условия

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}(p\bar{u} - \gamma x) . \qquad (4)$$

Решение (1) строится стандартным образом и имеет вид:

$$\bar{u}(x,p) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + \frac{\gamma}{p} x ;$$

$$\lambda = \sqrt{pa^{-1}} ,$$

постоянные A и B определяются из граничных условий (3.7.3) и имеют вид:

$$A = -\frac{\gamma}{2p\lambda \mathrm{ch}(\lambda \cdot b/2)} ;$$

$$B = \frac{\gamma}{2p\lambda \mathrm{ch}(\lambda \cdot b/2)} .$$

Таким образом, находя трансформанту температуры и обращая преобразование Лапласа, имеем следующее представление граничной температуры

$$u\left(\frac{b}{2},t\right) = L^{-1}\bar{u} = \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}\left[\frac{b}{2} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{th}\left(\lambda\frac{b}{2}\right)\right]\frac{e^{pt}}{p}dp .$$

Введем в рассмотрение безразмерный параметр $\beta = 4at/b^2$, который определяет число Фурье, а в интеграле произведем замену переменной $p = z/t$. Тогда имеем

$$u\left(\frac{b}{2},t\right) = \frac{\gamma b}{4\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}\left[1 - \sqrt{\frac{\beta}{z}}\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{z}{\beta}}\right)\right]\frac{e^{z}}{z}dz . \qquad (5)$$

Интеграл в (1) при $\beta > \beta_0 > 0$ эффективно вычисляется с помощью теории вычетов. Для этого находим особые точки подынтегральной функции. Среди них имеется $z = 0$ – устранимая особая точка и счетное множество полюсов $z_n = -\beta\pi^2(1/2+n)^2$, $n = 0,1,...$, расположенных в левой полуплоскости. Замкнем контур интегрирования, параллельный мнимой оси, в левую полуплоскость. Используя лемму Жордана, на основании теории вычетов находим представление граничной температуры в виде ряда

$$u\left(\frac{b}{2},t\right) = \frac{4b\gamma}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-\beta\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2} = g(t) . \quad (6)$$

Из представления (1) видно, что граничное поле температуры описывается быстро сходящимся рядом, причем $g(t) \to 0$ при $t \to 0$, и величина a, связанная с параметром β, входит в это представление нелинейным образом. Фактически в этой задаче для нахождения единственного параметра имеется функциональное уравнение. Отметим, что поставленная задача имеет решение лишь для очень ограниченного множества функций – именно, задающихся рядом типа (1). Для определения параметра a из данных эксперимента необходимо решать некоторое трансцендентное уравнение или использовать метод наименьших квадратов при обработке экспериментальных данных. Возникает естественный вопрос – нельзя ли использовать для описания поля температур и для последующей процедуры идентификации более простые аналитические выражения, упростив соотношение типа (3.7.6)?

Оказывается, что в некоторых областях изменения параметров задачи это сделать можно, что существенно упрощает процедуру решения ОЗ.

Так, например, это возможно при $t \gg t_0$, ($\beta \gg \beta_0$) где t_0 – некоторое значение времени, характеризующее максимум граничной температуры.

В силу того, что элементы ряда в (6) быстро убывают, в этой области можно использовать одночленную асимптотику решения

$$u\left(\frac{b}{2},t\right) \sim \frac{4b\gamma}{\pi^2}e^{-\frac{\pi^2}{4}\beta}$$

и на ее основе обработать результаты эксперимента, измеряя температуру для двух различных моментов времени t_1, t_2.

Тогда имеем

$$u_1 = u\left(\frac{b}{2},t_1\right) = \frac{4b\gamma}{\pi^2}e^{-\frac{\pi^2 a}{b^2}t_1} ;$$

$$u_2 = u\left(\frac{b}{2},t_2\right) = \frac{4b\gamma}{\pi^2}e^{-\frac{\pi^2 a}{b^2}t_2} .$$

Из последних двух соотношений легко можно исключить параметр γ и найти

$$a = \frac{b^2}{\pi^2}\frac{1}{t_2 - t_1}\ln\frac{u_1}{u_2}.$$

При этом оказывается, что величина γ, пропорциональная силовому фактору-моменту, не входит в окончательную формулу. Также на основе этой асимптотики можно далее осуществить статистическую обработку эксперимента для нескольких пар времен измерения температуры t_k.

Отметим, что если $t \to 0$, то и $\beta \to 0$, и все полюса подынтегральной функции в (5) z_n стягиваются к началу координат; решение в виде ряда (1) становится малопригодным для практических расчетов.

Для малых времён $t \ll t_0$ представление (1) (а тем более, одночленная асимптотика (2)) малопригодно для расчета поля температур. Для асимптотического анализа при малых t необходимо построить асимптотику подынтегральной функции в (1) при малых β, учитывая разложение

$$1 - \sqrt{\frac{\beta}{z}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{z}{\beta}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{z}}\left(1 + 2\exp\left(-\sqrt{\frac{z}{\beta}}\right) + \ldots\right),$$

а также, что при $t = 1$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) = 1;$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{z\sqrt{z}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

В этом случае получаем формулу

$$u\left(\frac{b}{2}, t\right) = \frac{\gamma b}{2}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^{\frac{1}{2}} + o\left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)\right],$$

которую можно использовать при обработке результатов при малых t (или малых β). На основе асимптотики (2) также, как и выше, можно построить конечную формулу для определения коэффициента температуропроводности и произвести статистический анализ.

Представленный в пункте простейший пример является весьма показательным с точки зрения общей теории идентификации [1, 2]. В этом случае задаваемая функция $g(t)$ имеет строго определенный вид, и полностью определяется двумя параметрами β и $b\gamma$.

В данном случае, сокращая объем экспериментальной информации (например, ограничиваясь временами $t \gg t_0$), и используя простую асимптотику для описания поля температур (2), можно получить более устойчивые результаты при определении коэффициента температуропроводности, нежели при использовании общей формулы в виде ряда для расчета температуры, справедливой для любых времен.

Выводы

В первую очередь, обратные ретроспективные задачи термоупругости имеют важные применения в разных областях знания при идентификации различных динамических объектов, для которых для некоторой информации о траектории движения требуются установить начальное его состояние в предшествующий момент времени.

В механике деформируемого твердого тела наиболее актуальны и важны ретроспективные постановки для моделей термоупругости и вязкоупругости. Для этих моделей обращение временных зависимостей вызывает наибольшие трудности. Соответствующие операторные уравнения, связывающие начальные условия и текущие значения полей, оказываются линейными и непрерывно зависящими от начальных данных.

Обращение соответствующих операторных уравнений приводит к линейным некорректным задачам, требующим регуляризации. При этом наиболее часто используется метод регуляризации А.Н. Тихонова, метод усеченных сингулярных разложений и предложенный сравнительно недавно Латтессом и Лионосом метод квазиобращения. Кроме того, методы определения модулей упругости, формы полостей и включений в упругом теле по измеренным на его границе полям смещений при частотном зондировании играют большую роль в процессе идентификации объектов в различных областях естествознания.

Главная проблема при исследовании задач подобного типа – это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов упругости и граничными полями перемещений. Если соответствующие операторы имеют переменные коэффициенты, то построить фундаментальные решения сложно.

Обратные ретроспективные задачи термоупругости имеют несколько типов постановок, среди котлрых наиболее часто встречается концепция несвязанной задачи, модель которой основана на анализе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при разных способах измерения температуры.

В настоящее время изучение поведения конструкций производится с использованием компьютерной техники. Причина этого очевидна и заключается в низкой стоимости численных экспериментов в сравнении с дорогим экспериментальным моделированием.

Численное моделирование может использоваться для изучения структур с различными геометрическими конфигурациями и под воздействие разнообразных нагрузок, а также для определения оптимальных проектных решений до их воплощения в конструкциях, в том числе и для создаваемых приборных и энергетических конструкций.

Литература

1. *Калинин В.А. Экспериментальное изучение явлений связанной термоупругости и теплопроводности твердых тел / В.А. Калинин, А.О. Ватульян. – Ростов: УПЛ РГУ, 1983. – 322 с.*
2. *Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач / А.Л. Бухгейм. – Н-ск: Наука, 1988. – 224 с.*
3. *Романов В.Г. Обратные задачи математической физики / В.Г.Романов – М.: Наука, 1984.– 261 с.*
4. *Ватульян А.О. Математические модели и обратные задачи / А.О. Ватульян // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 11. – С. 143-148.*

Поступила в редакцию 22.05.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Н. Доценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТУ ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ НЕЗВ'ЯЗНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

В.О. Повгородній

Експериментально-теоретичне дослідження термопружних та теплофізичних характеристик матеріалів приладів, а також елементів турбобудування здійснюється виходячи з розв'язків оберненої задачі термопружності. Обернена задача термопружності вирішується за допомогою рівнянь Дюамеля – Неймана, Фредгольма та методу гранично-елементний аналог ядра інтегрального оператора дозволяє замінити експеримент. Результати розрахунку можна використовувати, як невід'ємну частину проектування об'єктів приладобудування та енергетичного машинобудування (матеріалу парових та газових турбін), а також розрахунку їх ресурсу та вибору системи охолодження.

Ключові слова: температура, температуропровідність, обернена задача, термопружність.

THE DETERMINANION OF THE TEMPERATUTURESITY INCLUDING SOLUTION INVERSE PROBLEM OF THERMOELASTICITY

V.O. Povgorodny

The experimental and theoretical investigation of thermal and elastical characteristics of the material's considered by discussed inverse problem of the thermoelasticity. An inverse quotients thermoelasticity problem is discussed by Duamel – Neiman's and Fredhol'ms equation without experiment.. Assuming thermomechanical oscillation frequency small enough a solving equation was produced.. Obtained results can be used to simulate the process of experimental determination of physical-mechanical properties of the materials used in aero- and spacecraft manufacturing and of the energetic machinebuidings.

Key words: temperature, temperaturesticity, inverse problem, thermoelasticity

Повгородний Владимир Олегович – канд. техн. наук, доцент, докторант, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина.