

УДК 631.7.04-197:631:7.019.10

В.О. ПОВГОРОДНИЙ

Институт проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного, Украина

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАТЫ С ЭЛЕКТРОННЫМИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассматривается обратная коэффициентная задача для прямоугольной пластины конечной толщины – платы с электрорадиоэлементами. Предлагаемое в статье решение основывается на предположении о том, что термомеханические процессы в плате носят установившийся гармонический характер. Геометрия области и граничные условия позволяют свести рассматриваемую задачу к одномерной задаче термоупругости. При условии малости частоты термомеханических колебаний удается построить разрешающее уравнение, из которого находятся коэффициенты температурных напряжений и тепловыделения при деформировании. Данная задача является актуальной, особенно в области авиационно-космической техники. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процесса экспериментального определения термомеханических характеристик материалов, применяемых в авиаконструкциях и ракетостроении.

Ключевые слова: температура, расчет, градиент, плата, авиация, бортовая аппаратура.

Постановка задачи

Рассматриваемая в статье задача относится к классу обратных коэффициентных задач термомеханики деформируемого твердого тела, суть которой заключается в том, что необходимо определить термомеханические характеристики среды (материала печатных плат), которые являются коэффициентами дифференциальных операторов по измеренным на границе полям перемещений и температуры. Искомыми величинами здесь являются коэффициенты температурных напряжений и тепловыделения при деформировании. Главная проблема при решении подобных задач – это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и граничными полями перемещений. Как правило, такая связь представляется в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода, решение которого требует регуляризации. Рассмотрим обобщенную постановку обратной задачи термоупругости, которая была подробно рассмотрена в [1]. Пусть имеется упругая пластина толщины L . Одна из поверхностей платы $x_3 = 0$ подвергается периодическому (гармоническому) низкочастотному нагреву. С обеих поверхностей происходит теплообмен с внешней средой. Нижняя поверхность $x_3 = L$ предполагается закрепленной, а верхняя поверхность $x_3 = 0$ свободна от напряжений. По имеющейся информации о поле температур на одной из поверхностей платы требуется определить коэффициенты (в общем случае, тензоры) температурных напряжений и тепловыделения при деформировании.

Уравнения в прямоугольной декартовой системе координат, описывающие установившиеся термомеханические процессы в данной среде, и соответствующие краевые условия имеют вид [1, 2]:

$$C_{ijmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_j} - B_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$K_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial t} + D_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial x_i};$$

$$\left(C_{33mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - B_{33} T \right)_{x_3=0} = 0; u_3 \Big|_{x_3=L} = 0;$$

$$\left(C_{13mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right)_{x_3=0} = 0; u_1 \Big|_{x_3=L} = 0;$$

$$\left(C_{23mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right)_{x_3=0} = 0; u_2 \Big|_{x_3=L} = 0; \quad (2)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} + \alpha_1 T \Big|_{x_3=0} = \text{Fe}^{\text{iot}};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=L} + \alpha_2 T \Big|_{x_3=L} = 0,$$

где все величины являются безразмерными, для которых приняты следующие обозначения:

$$x_i = \frac{x_i^*}{Z}; u_i = \frac{u_i^*}{Z}; t = \frac{Ct^*}{Z}; T = \frac{T^*}{T_0};$$

$$C_{ijmn} = \frac{C_{ijmn}^*}{\rho C^2}; B_{ij} = \frac{B_{ij}^* T_0}{\rho C^2}; k_{ij} = \frac{k_{ij}^*}{k_{33}^*};$$

$$D_{ij} = D_{ij}^* / (\rho c T_0); L = L^* / Z;$$

$$\alpha_k = \frac{\alpha_k^* Z}{k_{33}} (k=1, 2); F = \frac{Z}{T_0 k_{33}^*} F^*; \\ C^2 = \frac{C_{3333}^*}{\rho}; Z = \frac{k_{33}^*}{c\rho C}; \omega = \frac{Z\omega^*}{C};$$

где x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; u_i^* – координаты вектора перемещений; t^* – время; T^* – приращение температуры; C_{ijmn}^* – тензор упругих характеристик среды; B_{ij}^* – тензор тепловых (температурных) напряжений; k_{ij}^* – тензор теплопроводности; D_{ij}^* – тензор, характеризующий тепловыделение при деформировании; ρ – плотность среды; c – теплоемкость; α_i^* – коэффициент теплообмена с внешней средой; T_0 – начальная температура платы (пластины); L^* – толщина платы (пластины); C – скорость распространения волны растяжения-сжатия вдоль оси Ox_3 ; Z – линейный масштаб; ω^* – частота; F^* – амплитуда теплового импульса.

Пусть, кроме того, имеется некоторая информация о полях перемещений и температуры одного из следующих видов:

$$T(0, t) = f_1(t); u_3(0, t) = f_2(t). \quad (3)$$

Требуется определить B_{ij} и D_{ij} .

Алгоритм решения

Поставленная задача решается в два этапа. На первом этапе решается «прямая» задача. Далее с учетом условий (1), (20) строятся соотношения, из которых находятся коэффициенты B_{ij} и D_{ij} . Как правило, такие соотношения представляются в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Введенное предположение о том, что внешнее тепловое воздействие на поверхность пластины носит гармонический характер при малых частотах, позволяет получить приближенные определяющие соотношения для i в виде системы алгебраических уравнений. Для неограниченной в плоскости ортотропной пластины прямая задача является одномерной:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + D_{33} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \quad (4)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} + \alpha_1 T \Big|_{x_3=0} = F e^{i\omega t}; \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=L} + \alpha_2 T \Big|_{x_3=L} = 0. \quad (5)$$

Ее решение для установившегося режима с учетом граничных условий будем искать в виде

$$u_3(x_3, t) = U_3(x_3) e^{i\omega t}; T(x_3, t) = \theta(x_3) e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Подстановка дает

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} - B_{33} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = -\omega^2 U_3; \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = i\omega \frac{\partial \theta}{\partial t} + i\omega D_{33} \frac{\partial U_3}{\partial x_3}.$$

Далее, выполняя преобразования

$$U_3 = U_3 e^{\lambda x_3}, \theta = \theta e^{\lambda x_3}, \quad (7)$$

приводим систему (8) к виду

$$(\lambda^2 + \omega^2) U_3 - B_{33} \lambda \theta = 0; \quad (8)$$

$$-i\omega D_{33} U_3 + (\lambda^2 - i\omega) \theta = 0,$$

откуда находим

$$T = \sum_{i=1}^4 C_i e^{(\lambda_i x_3 + i\omega t)}; u_3 = \sum_{i=1}^4 \frac{B_{33} \lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} C_i e^{(\lambda_i x_3 + i\omega t)}, \quad (9)$$

где λ_i – корень характеристического уравнения, который исходя из правила раскрытия определителя записывается, как

$$\lambda^4 + (\omega^2 - i\omega - iB_{33} D_{33} \omega) \lambda^2 - i\omega^3 = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты C_i находятся из граничных условий. Тогда эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{B_{33} \lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \omega^2} - B_{33} \right) C_i = 0; \sum_{i=1}^4 \frac{B_{33} \lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} C_i e^{(\lambda_i x_3 + i\omega t)},$$

где λ_i – корень характеристического уравнения (10)

Эта задача сводится к решению системы алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{B_{33} \lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \omega^2} - B_{33} \right) C_i = 0; \sum_{i=1}^4 C_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} e^{\lambda_i L} = 0; \\ \sum_{i=1}^4 (-\lambda_i + \alpha_1) C_i = F; \sum_{i=1}^4 (\lambda_i + \alpha_2) C_i e^{\lambda_i L} = 0. \quad (11)$$

Корни уравнения (10) имеют вид

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \left[\frac{-\omega^2 + i\omega(1 + B_{33} D_{33}) \pm \sqrt{\omega^4 - 2i\omega(1 - B_{33} D_{33})^2}}{2} \right]^{1/2}, \quad (12)$$

в связи с чем нахождение C_i вызывает затруднения. Данная задача может быть решена либо численно, либо аналитически с помощью асимптотического подхода.

При достаточно малых частотах ω можно воспользоваться следующими приближенными формулами для корней уравнения (10):

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \sqrt{\omega} \left(1 + i \frac{B_{33} D_{33}}{2(1 + B_{33} D_{33})^2} \omega \right) \pm \frac{i\omega}{\sqrt{1 + B_{33} D_{33}}} \omega, \omega \rightarrow 0.$$

Соответственно, при больших частотах

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)\sqrt{\omega} \pm \omega \left(1 + \frac{B_{33}D_{33}}{2\omega}\right), \omega \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим случай, когда ω мало. Тогда постановка корней (12) в систему (11) дает следующие приближенные выражения для коэффициента

$$C_1 = -\frac{\alpha_2(1-i)F}{2\sqrt{2}\sqrt{1+B_{33}D_{33}}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)\sqrt{\omega}} - \frac{i(1+L\alpha_2)}{2(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)};$$

$$C_2 = -\frac{\alpha_2(1-i)F}{2\sqrt{2}\sqrt{1+B_{33}D_{33}}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)\sqrt{\omega}} - \frac{i(1+L\alpha_2)}{2(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)};$$

$$C_3 = \frac{\alpha_2 B_{33} D_{33} F}{2(1+B_{33}D_{33})^{3/2}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)};$$

$$C_4 = \frac{\alpha_2 B_{33} D_{33} F}{2(1+B_{33}D_{33})^{3/2}(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)}.$$

Для температуры θ и перемещений U_3 с точностью до членов порядка ω находим

$$\theta = F \frac{\alpha_2(L-x_3)+1}{\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2} - \frac{i(1+B_{33}D_{33})F\omega}{6(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} (\alpha_2 x_3^3 - 3(1+L\alpha_2)x_3^2 + \frac{2L_1(3+3L\alpha_2+L^2\alpha_2^2)(\alpha_1 x_3+1)}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)})$$

Окончательно переходя к действительной форме, имеем

$$\begin{aligned} T(x_3, t) = & 2F \frac{\alpha_2(L-x_3)+1}{\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2} \cos \omega t + \\ & + \frac{(1+B_{33}D_{33})F\omega}{3(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} (\alpha_2 x_3^3 - \\ & - 3(1+L\alpha_2)x_3^2 + \\ & + \frac{2L_1(3+3L\alpha_2+L^2\alpha_2^2)(\alpha_1 x_3+1)}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)}) \sin \omega t; \\ u_3(x_3, t) = & -\frac{2(L-x_3)+\alpha_2(L-x_3)^2}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} B_{33}F \cos \omega t - \\ & - \frac{(1+B_{33}D_{33})B_{33}FL^2\omega}{12(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)^2} \times \\ & \times (L^3\alpha_1\alpha_2^2 + 5L^2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + 24) \sin \omega t + \\ & + \frac{(1+B_{33}D_{33})B_{33}F\omega}{12(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} (\alpha_2 x_3^4 - 4(1+L\alpha_2)x_3^3) + \\ & + \frac{4L(3+3L\alpha_2+L^2\alpha_2^2)(\alpha_1 x_3^2 + 2x_3)}{(\alpha_1+\alpha_2+L\alpha_1\alpha_2)} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Поле температур платы, полученное путем численного решения системы (11) при частоте =10 Гц приведено на плакате.

Сравнительный анализ показывает очень хорошее совпадение численного и приближенного решений, что можно увидеть на плакатах.

Для решения обратной задачи имеем соответственно

$$\begin{aligned} f_1(t) &= T(0, t) = B + A(1 + B_{33}D_{33}); \\ f_2(t) &= u_3(0, t) = DB_{33} + C(1 + B_{33}D_{33})B_{33}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов температурного напряжения и тепловыделения при деформировании D_{33} необходимо решить систему (13).

Решение ее имеет вид:

$$\begin{aligned} B_{33} &= \frac{Af_2(t)}{C(f_1(t)-B)+AD}; \\ D_{33} &= \frac{(f_1(t)-B-A)(C(f_1(t)-B)+AD)}{A^2f_2(t)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует, что при стремлении частоты к нулю и невысокой погрешности измерения, полученные решения сходятся соответственно к

$$B_{33} = \frac{f_2(t)}{D}; \quad D_{33} = -\frac{D}{f_2(t)} \leq 0. \quad (15)$$

В качестве модели ортотропной среды рассматривалась осредненная слоистая среда (стеклотекстолит) со следующими эффективными безразмерными характеристиками:

$$B_{33} = 0,013123; \quad D_{33} = 1,419488;$$

$$\alpha_1 = 0,300743 \cdot 10^{-8}; \quad \alpha_2 = 0,794292 \cdot 10^{-8}.$$

В момент времени $t = 210$ С при частоте $\omega = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ были измерены приращение температуры (15,2 К) и перемещение (−0,00137 см) на поверхности платы $x_3 = 0$.

Обезразмеривая полученные значения, находим коэффициенты B_{33} и D_{33} :

$$B_{33} = 0,013096; \quad D_{33} = 90,3098;$$

$$B_{33} = 0,0131359; \quad D_{33} = -76,1272.$$

Как видно, значения коэффициента B_{33} , полученного по формулам (15), достаточно хорошо совпадают с точными значениями. Наоборот, коэффициенты D_{33} , полученные по формулам (15), сильно отличаются друг от друга и от точного значения. Данные результаты позволяют сделать вывод о том, что при малых частотах возможно только определение коэффициента температурных напряжений.

Графически результаты определения температурного поля показаны на рис. 1.

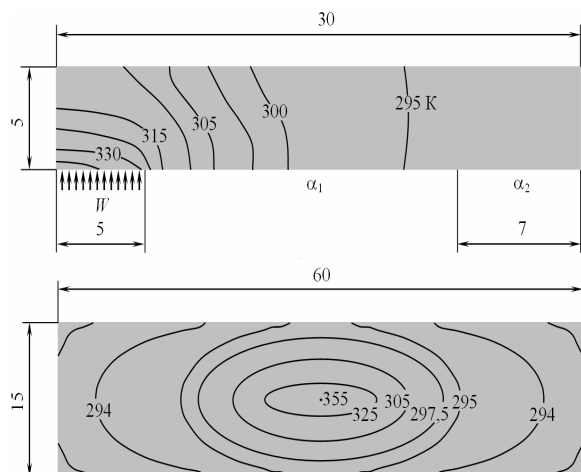


Рис. 1. Результаты определения температурного поля

Выводы

Выполненные расчеты позволяют сделать вывод о том, что низкочастотные колебания являются малоинформативными с точки зрения определения физико-механических характеристик материала (среды). Несмотря на это, предложенная методика

позволяет для ряда характеристик (в частности коэффициента температурных напряжений) построить устойчивые решения.

Полученные результаты возможно использовать для приближенного решения двух- трехмерных задач. Обратные (коэффициентные) задачи термоупругости нашли широкое применение в теории неоднородных покрытий, сейсмологии, в различных видах машиностроения (энергетическом машиностроении, приборостроении), а также в наномеханике.

Литература

1. Бакушинский А.Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 320 с.
2. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 360 с.
3. Алексеев В.А. Расчет нестационарной теплопередачи многослойной стенки с неодинаковыми площадями контакта между слоями / В.А. Алексеев // Инж.-физ. журнал. – Минск, 1985. – Т. XLIX, № 3. – С. 491-496.

Поступила в редакцию 27.05.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры П.Д. Доценко, Харьковский аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ ЗВОРОТНОЇ КОЕФІЦІЄНТНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАТИ З ЕЛЕКТРОННИМИ РАДІОТЕХНІЧНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

В.О. Повгородний

Розглядається зворотне коефіцієнтне завдання для прямокутної пластини кінцевої товщини – плати з електрорадіоелементами. Пропоноване в статті рішення ґрунтується на припущенні про те, що термомеханічні процеси в платі носять сталий гармонійний характер. Геометрія області і граничні умови дозволяють звести дане завдання до одновимірного завдання термопружності. За умови трох частоти термомеханічних коливань вдається побудувати вирішуюче рівняння, з якого знаходяться коефіцієнти температурної напруги і тепловиділення при деформації. Дане завдання є актуальним, особливо в області авіаційний-космічної техніки. Отримані результати можуть бути використані при моделюванні процесу експериментального визначення термомеханічних характеристик матеріалів, вживаних в авіаконструкціях і ракетобудуванні.

Ключові слова: температура, розрахунок, градієнт, плата, авіація, бортова апаратура.

NUMERAL-ANALYTICAL DECISION OF REVERSE COEFFICIENT TASK OF THERMOELASTICITY FOR PAY WITH ELECTRONIC RADIO ENGINEERINGS ELEMENTS

V.O. Povgorodniy

A reverse coefficient task is examined for the rectangular plate of eventual thickness are pays with radio-frequency component. The solution offered in the article is based on supposition that thermomechanical processes in a pay take set harmonic character. Geometry of area and terms of scopes allow to take the examined task to the one-dimensional task of thermoelasticity. On condition of trifle of frequency of thermomechanical vibrations it is succeeded to build settling equalization from which coefficients of temperature tensions and heat build-up are at deformation. This task is actual, especially in area of space system engineering. Can be drawn on got results at the design of process of experimental determination of thermomechanical descriptions of materials, applied in airconstructions and rocket production.

Key words: temperature, calculation, gradient, pay, aviation, side apparatus.

Повгородний Владимир Олегович – канд. техн. наук, младший научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: povgorod@ipmach.kharkov.ua.