

УДК 629.7.015.4-142

А.М. АРАСЛАНОВ, М.С. МАХНЕВ

Казанский государственный технический университет "КАИ" им. А.Н.Туполева, Россия

АНАЛИЗ «КВАДРАТУРНЫХ» ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

Последним этапом расчета любой конструкции машины является определение надежности конструкции и сравнении ее с необходимой надежностью. Поэтому проблема заложить необходимую надежность в проектируемую надежность очень важно. Для решения задач проектирования конструкций, как линейных, так и нелинейных стохастических систем, необходимо уметь находить вероятностные меры «выхода» системы по известным вероятностным мерам «входа» системы. Рассматривается дискретный способ повышенной точности для решения задач нахождения вероятностных мер «выхода» системы по известным вероятностным мерам «входа», которые встречаются при проектировании конструкций заданной надежности. Приводятся сравнительные данные по трудоемкости и точности предлагаемого и других дискретных методов и метода Монте-Карло.

Ключевые слова: моделирование, надежность конструкций, проектирование конструкций, интерполяционные полиномы, вероятностные методы.

Введение

В настоящее время общепризнанно, что проведение реальных конструкций обусловлено взаимодействием многих факторов случайной (стохастической) природы. В связи с этим обоснованно подойти к определению надежности и долговечности конструкций можно только с позиций вероятностных методов, которые позволяют при описании показателей надежности проводить их количественный анализ. Поэтому при решении задач проектирования конструкций, подверженных случайным воздействиям, определяющими ограничениями в отличие от детерминистических постановок начинают выступать ограничения по надежности.

Надежностью конструкции по интересующему нас параметру поведения конструкции (напряжению, перемещению, критическим нагрузкам, температуре, радио прозрачности и другим) будем называть способность к событию, состоящему в том, что этот параметр находится в области работоспособных состояний, границы которой в общем случае также могут быть стохастическими. Мерой надежности будет вероятность этого события. Для нахождения такой меры необходимо знание закона распределения данного параметра поведения и закона распределения границ области работоспособных состояний.

При расчете надежности реальных элементов конструкций возникают значительные сложности, в основном связанные с определением закона распределения интересующего нас параметра поведе-

ния как закона распределения функции случайных аргументов. Дело в том, что эта функциональная связь бывает очень сложной, а часто бывает известен лишь алгоритм, позволяющий численно определять значения параметра поведения при каких-то конкретных реализациях аргументов. В связи с этим в [1, 2] предложен приближенный способ решения этой задачи, основанный на замене непрерывных законов распределения аргументов их дискретными аналогами, и решение задачи в дискретной форме.

Метод показал свою эффективность, универсальность и позволил решить ряд интересных с практической точки зрения задач. Но там отсутствовали строгие теоретико-математические оценки точности замены непрерывного закона распределения его дискретным аналогом, а также обоснованные критерии выбора количества разрядов и их «представителей».

1. Исследование квадратур

Основной задачей статистической динамики, решение которой предшествует оценке надежности, является нахождение при известной однозначной детерминистической зависимости

$$Y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

вероятностных характеристик функций y_i случайных аргументов $x_1, x_2, \dots, x_m$ по известному закону распределения $\delta(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Как показано в [3], выбрав систему соответствующих характеристических функций f_k задачу определения вероятностных характеристик «выхода» системы – выходных координат

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = P[Y_1 < y_1, Y_2 < y_2, \dots, Y_n < y_n],$$

можно свести к определению математических ожиданий соответствующих характеристических функций

$$M[f_k(x_1, \dots, x_m)], \quad k = 1, 2, \dots$$

В частности, для математического ожидания выходной координаты такой функцией будет

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = y_i(x_1, \dots, x_m),$$

для дисперсии выходной координаты Y_i –

$$f_2(x_1, \dots, x_m) = (Y_i - M[Y_i])^2,$$

для корреляционного момента выходных координат Y_i и Y_j –

$$f_3(x_1, \dots, x_m) = (Y_i - M[Y_i])(Y_j - M[Y_j]),$$

для центрального момента s -го порядка выходной координаты Y_i –

$$f_4(x_1, \dots, x_m) = (Y_i - M[Y_i])^s,$$

для совместного интегрального закона распределения выходных координат

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = P[Y_1 < y_1, Y_2 < y_2, \dots, Y_n < y_n] -$$

$$- F_5(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[1 - \frac{Y_i - y_i}{|Y_i - y_i|} \right],$$

для вероятности нахождения выходной координаты Y_i в заданной области $[y^*, y^{**}]$ –

$$f_6(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{Y_i - y^*}{|Y_i - y^*|} \right] \frac{1}{2} \left[1 + \frac{Y_i - y^{**}}{|Y_i - y^{**}|} \right].$$

Аналогично могут определяться и более сложные вероятностные характеристики.

Таким образом, решение основной задачи статистической динамики для квазистатистического случая сводится к вычислению математического ожидания соответствующей характеристической функции:

$$P_k = \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} p(x) dx.$$

Для наглядности рассуждений далее рассмотрим случай одной входной и одной выходной координат, т.е. одну функцию одного случайного аргумента $y = y(x)$.

Определение математического ожидания сводится к вычислению интеграла

$$M[f] = \int_a^b f(x)p(x)dx,$$

где $p(x)$ – закон распределения случайного аргумента x .

Следовательно, пришли к задаче приближенного интегрирования некоторой функции $f(x)$ с весовой функцией $p(x)$. Квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)w(x)Q(x)dx = 0.$$

Формула содержит $2n$ параметров p_k и x_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Соответствующим выбором этих параметров будем стремиться сделать равенство точным для всяких многочленов, имеющих степень выше $(2n - 1)$.

В [1, 2] узлы назначались в серединах интервалов, на которые разбивалась вся область изменения входного параметра x , и тогда для коэффициентов и узлов

$$p_k = \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} p(x)dx, \quad x = a+(k+0,5)h,$$

где $h = (b - a) / n$.

Для получения наивысшей алгебраической точности в качестве узлов необходимо брать корни x полиномов, ортогональных на $[a, b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ со степенью меньше n :

$$\int_a^b f(x)w(x)Q(x)dx = 0,$$

а в качестве коэффициентов p_k :

$$p_k = \int_a^b \frac{p(x)w(x)dx}{(x - x_k)w'(x_k)}.$$

Для ряда частных случаев весовых функций $p(x)$ такие полиномы построены. В частности, для равномерного закона распределения это полиномы Лежандра, для нормального закона распределения – полиномы Чебышева-Эрмита, для экспоненциального распределения – полиномы Чебышева-Лагерра.

В [3] представлены таблицы корней этих классических полиномов до 16 степени x_k включительно и соответствующих им значений весов p_k :

$$x \in (0, \infty).$$

Для полиномов Лежандра они вычислены для интервала $[-1; 1]$, а для произвольного промежутка $[a, b]$ корни необходимо пересчитать по формуле

Для полиномов Чебышева-Эрмита они вычислены для случая $m_x = 0$; $\sigma_x = 1$, а для произвольных

значений m_λ и σ_λ корни необходимо пересчитать по формуле

$$\lambda_k = m_\lambda + \sigma_\lambda \cdot x_k.$$

Для полиномов Чебышева-Лагерра они вычислены для экспоненциального закона распределения

$$p(x) = e^{-x}, x \in (0, \infty),$$

а для произвольного экспоненциального закона распределения

$$p(t) = \mu e^{-\mu(t-\alpha)}, t \in (\alpha, \infty),$$

корни необходимо пересчитать по формуле

В табл. 1 для сравнения представлены узлы и веса для нормального и равномерного законов распределения для дискретных аналогов из работ [1, 2] и рассчитанных из «квадратурных» соотношений наивысшей алгебраической точности для p_3

$$t_k = \alpha + \frac{x_k}{\mu}.$$

Таблица 1

Анализ законов распределения

	Равномерное распределение			Нормальное распределение		
	«Квадратурный» аналог					
x _n	-0,774	0	0,774	-1,732	0	1,732
p _k	0,277	0,444	0,277	1/6	2/3	1/6
	Дискретный аналог [1,2]					
x _n	-2/3	0	2/3	-2	0	2
p _k	1/3	1/3	1/3	0,158	0,682	0,158

При произвольных законах распределения необходимо либо строить свою систему ортогональных по весу полиномов, либо использовать идею ψ -преобразования [3], которая позволяет путем пересчета находить узлы и веса произвольного закона распределения при известных узлах и весах классических ортогональных полиномов.

Суть идеи состоит в следующем. Строится некоторое, в общем случае нелинейное, преобразование $\lambda = \psi(x)$, где $\psi(x)$ – некоторая нелинейная функция; x – случайная величина, имеющая плотность распределения с известными узлами типа Чебышева (например, нормальное, равномерное, экспоненциальное).

Функция ψ определяется таким образом, чтобы в результате преобразования случайной величины x при помощи этой функции получилась случайная величина λ , имеющая заданную плотность распределения $p(\lambda)$. После того как функция $\psi(x)$ определена, вместо случайной λ используется преоб-

разование $\psi(x)$ и соответственно узлы для случайной величины x . Функция $\psi(x)$ должна непрерывно отображать все возможные значения случайной величины $x \in [a, b]$ на промежуток случайной величины $\lambda \in [c, d]$, причем должны быть выполнены граничные условия $c = \psi(a)$; $d = \psi(b)$.

Преобразование $\psi(x)$ можно получить, используя доказанное в [3] утверждение, что если

$$F_x(x) = F_y(y),$$

где $F_x(x)$, $F_y(y)$ – интегральные законы распределения случайных величин x , y , однозначно разрешимо относительно y и $y = y(x)$ дифференцируемо всюду, за исключением, может быть, конечного числа точек, и удовлетворяет граничным условиям:

$$c = y(a); d = y(b),$$

$$\text{то} \quad y(x) = \lambda = \psi(x).$$

В силу свойств интегрального закона распределения $F_\lambda(y)$ является монотонно возрастающей функцией и, следовательно, она имеет однозначную обратную функцию.

2. Тестовые расчеты

Были проведены сравнительные расчеты тестовых задач по определению вероятностных характеристик различных функций случайных аргументов с использованием дискретных аналогов из [1, 2], дискретных аналогов из «квадратурных» соотношений наивысшей алгебраической точности и метода Монте-Карло при различных значениях p .

Рассматривались функции:

1) $Y = x$; закон распределения x – нормальный, с параметрами $m_x = 100$; $\sigma_x = 10$.

2) $Y = e^{3x}$, закон распределения x – нормальный с параметрами $m_x = 2$; $\sigma_x = 0,25$.

3) $Y = x_1 + x_2 + x_3$, закон распределения переменных x_1, x_2, x_3 – нормальный с параметрами

$$m_{x1} = 100; \sigma_{x1} = 10; m_{x2} = 1000; \sigma_{x2} = 100; \\ m_{x3} = 400; \sigma_{x3} = 40.$$

4) $Y = x_1 / x_2$.

Закон распределения x_1, x_2 – нормальный с параметрами $m_{x1} = 180$; $\sigma_{x2} = 15$; $m_{x2} = 50$; $\sigma_{x2} = 8$.

Результаты этих расчетов сведены в табл. 2, где n – количество реализаций случайной величины, m – математическое ожидание, σ – среднее квадратичное отклонение, A – коэффициент вариации, S – асимметрия, E – эксцесс.

Таблица 2

Расчеты тестовых задач
по определению вероятностных характеристик различных функций случайных аргументов

Функция	Способ расчета	n	m	σ	A	S	E	Размах значений	
								Min	Max
$Y = e^{3x}$	Монте-Карло	100	500,2	440,6	0,8796	2,102	4,825	63,65	2517
		300	482,9	392,1	0,8119	2,05	5,318	59,03	2833
		900	510,5	413,2	0,8095	2,099	5,76	41,92	3264
	Дискретный	9	547	499,4	0,913	3,371	22,7	20,09	2041
	Квадратурный	9	534,5	464,4	0,8689	3,363	23,43	13,67	11900
	Квадратурный	3	533,8	436	0,8169	1,526	0,8328	11,5	1479
	точный	-	534,45	464,41	0,8689	-	-	$-\infty$	$-\infty$
$Y = x_1 + x_2 + x_3$	Монте-Карло	100	712	105,9	0,1487	0,041	-0,094	408,7	957
		300	699,7	101,7	0,1453	-0,196	0,238	402,2	957
		900	706	106,9	0,1514	-0,019	0,1542	401,2	1043
	Дискретный	9	700	112,6	0,1608	0,00038	-0,006976	100	1300
	Квадратурный	9	700	108,2	0,1545	0,0000725	-0,000006581	23,09	1377
	Квадратурный	3	700	108,2	0,1545	-0,0000079	0,000008991	440,2	959,8
	точный	-	700	108,16	0,1545	0	0	$-\infty$	$-\infty$
$Y = x_1 / x_2$		300	3,754	0,7438	0,1981	0,9774	0,9841	2,295	6,35
		900	3,72	0,7146	0,1921	0,9353	1,302	2,29	6,698
	Дискретный	9	3,71	0,7558	0,2037	1,173	3,204	1,5	13,33
	Квадратурный	9	3,7	0,7201	0,1946	1,109	3,108	1,304	17,82
	Квадратурный	3	3,7	0,7121	0,1925	0,8394	0,5371	2,412	5,699
$Y = X$	Монте-Карло	10	100,7	8,546	0,08488	0,3539	-1,037	88,42	116,9
		100	99,11	9,713	0,098	0,3902	-0,2	75,38	124,4
		300	98,88	9,599	0,09707	0,155	-0,321	74,37	124,4
		600	99,21	9,653	0,0973	0,838	-0,1911	74,37	124,4
		900	99,59	9,75	0,0979	0,0247	-0,1456	69,81	127,9
	Дискретный	9	100	10,41	0,1041	0,000196	-0,00937	60	140
	Квадратурный	9	100	10	0,1	0,00003806	-0,000002543	54,87	145,1
	Квадратурный	3	100	10	0,1	0,000001	0,000012	82,68	17,3
	точный	-	100	10	0,1	0	0	$-\infty$	∞

Были проведены сравнительные расчеты тестовых задач по определению показателей надежности для различных комбинаций законов распределения с использованием различных дискретных аналогов и метода Монте-Карло. Рассматривались комбинации «параметр поведения V – параметр границы R»:

нормальный-нормальный (Н-Н), экспоненциальный-нормальный (Э-Н) при $m_v = 10$, $\sigma_v = 1$, $\sigma_R = 2$ и варианты $m_R = 15$, $m_R = 20$, $m_R = 16$ (для экспоненциального).

Результаты этих расчетов сведены в табл. 3.

Таблица 3

Анализ различных комбинаций законов распределения

Комбинация	Способ расчета	n	$m_R = 15(16)$	$m_R = 20$
Н-Н	Точный	-	0,987322	0,999996125
	дискретный	9	0,986715	0,9999954
	дискретный	3	0,9851214	0,99999477
	Квадратурный	9	0,9873263	0,9999961
	Квадратурный	3	0,9872747	0,9999968
	Монте-Карло	10	1,0	1,0
		300	0,983333	1,0
		1000	0,987000	1,0
Э-Н	Точный	-	0,9934796	0,99987652
	Дискретный	9	0,99259093	0,99983751
	Дискретный	3	0,9882425	0,99980324
	Квадратурный	9	0,9934788	0,9998763
	Квадратурный	3	0,9933	0,999901
	Монте-Карло	10	1,0	1,0
		300	0,996667	1,0
		1000	0,994000	1,0

Литература

1. Арасланов А.М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях / А.М. Арасланов. – М.: Машиностроение, 1987. – 128 с.

2. Арасланов А.М. Вероятностные подходы к силовому проектированию элементов конструкций /

А.М. Арасланов. – Казань, Казанский авиационный институт, 1992. – 92 с.

3. Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления / В.И. Чернецкий. – М.: Машиностроение, 1968. – 246 с.

Поступила в редакцию 23.04.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. «Авиационные двигатели и энергоустановки» Б.Т. Мингазов, Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева «КАИ», Казань, Россия.

АНАЛІЗ «КВАДРАТУРНИХ» ДИСКРЕТНИХ АНАЛОГІВ БЕЗПЕРЕРВНИХ РОЗПОДІЛІВ ЙМОВІРНОСТІ ПРИ ВИРІШЕННІ ЗАВДАНЬ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ

А.М. Арасланов, М.С. Махнев

Останнім етапом розрахунку будь-якої конструкції машини є визначення надійності конструкції і порівняння її з необхідною надійністю. Тому проблема закласти необхідну надійність в проєктовану надійність є дуже важливо. Для вирішення завдань проєктування конструкцій, як лінійних, так і нелінійних стохастичних систем, необхідно уміти знаходити імовірнісні заходи «виходу» системи по відомих імовірнісних заходах «входу» системи. Розглядається дискретний спосіб підвищеної точності для вирішення завдань знаходження імовірнісних мерів «виходу» системи по відомих імовірнісних заходах «входу», які зустрічаються при проєктуванні конструкцій заданої надійності. Наводяться порівняльні дані по трудомісткості і точності пропонованого і інших дискретних методів і методу Монте-Карло.

Ключові слова: моделювання, надійність конструкцій, проєктування конструкцій, інтерполяційні поліноми, імовірнісні методи.

ANALYSIS OF «QUADRATURES» DISCRETE ANALOGS OF CONTINUOUS DISTRIBUTIONS OF PROBABILITY IN DESIGNING OF INDICATED RELIABILITY CONSTRUCTIONS

A.M. Araslanov, M.S. Makhnev

The last stage of calculations for any type of constructions is reliability determination and comparison with the necessary level of reliability. That is why, a problem of including the necessary level of reliability into designed construction is very important. To solving design problems of stochastic linear and nonlinear systems it's necessary to find probabilistic measures system "output" on the basis of known probabilistic measures of "input". A discrete way of higher accuracy is being considered for solving problems of finding probability measures of an output" of the system according to the known probability measures of an "input" which we can come across during the process of projecting of the indicated reliability constructions. Comparative data on labor-intensiveness and accuracy of both the proposed method and other discrete methods as well as a Monte Carlo method, are given.

Key words: simulation, probabilistic methods, stochastic systems, construction's design problem, interpolation polynomials

Арасланов Анвар Мидхатович – д-р техн. наук, профессор, зав. каф. основ конструирования Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева «КАИ», Казань, Россия.

Махнев Мирослав Сергеевич – студент Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева «КАИ», Казань, Россия.