

УДК 536.24

Ю.А. СКОБ

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

*Выполнено численное моделирование процессов нестационарного теплообмена в многосвязных твердых телах сложной формы, окруженных теплопроводной газообразной средой, на основе единого конечно-разностного алгоритма. Проведена верификация математической модели сравнением с аналитическими решениями тестовых задач для бесконечной пластины. Получены трехмерные поля температуры в пространственных твердых телах формы различных примитивов, а также их комбинаций. Проведены расчеты теплообмена в лопатке турбины сплошного сечения и снабженной полостями охлаждения. Трехмерные поля температур можно использовать для оценки теплонапряженного состояния твердых тел.*

**Ключевые слова:** численное моделирование, теплообмен, теплопроводность, твердое тело сложной формы, изотермы.

### Введение

Пусковые и переходные режимы работы авиационных двигателей, холодильников, камер обжига и других энергетических и теплотехнических установок характерны необходимостью оперативно вводить резервную энергетическую мощность, что может приводить к недопустимым изменениям технологических зазоров в их рабочей части из-за неодинакового расширения (охлаждения) или к чрезмерным температурным напряжениям в деталях ротора и статора.

Для оптимального управления такими нестационарными режимами энергетических машин необходимо иметь изменяющиеся во времени трехмерные температурные поля в элементах оборудования. Прогнозирование и анализ тепловых полей позволяет избежать недопустимого превышения температуры или возникновения критических ее перепадов.

Кроме того, нестационарные задачи теплообмена часто возникают в различных процессах экологии атмосферы, связанных с пожарами, когда окружающие объекты подвергаются значительной термической нагрузке, под воздействием которой они нагреваются, тлеют, выделяют в атмосферу вредные вещества и т.д.

Целью данной работы является численное моделирование трехмерных полей температуры в однородных многосвязных твердых телах в процессе их нагревания (охлаждения) в газообразной теплопроводной среде. Аналитические методы решения таких задач оказываются эффективными только для тел простой формы [1, 2]. В этом случае расчетные

нестационарные зависимости поля температур выражаются в виде экспоненциальных рядов, сходимость которых зависит от местоположения контрольной точки внутри тела и времени с момента начала процесса. Численные методы на базе современной вычислительной техники позволяют преодолеть данные проблемы и решать поставленную задачу уже без применения комплексных иерархических методов, таких как поэтапное моделирование [3]. Ряд работ предлагают способ моделирования, который базируется на применении конечно-разностного метода и метода конечных элементов [4], однако, как правило, расчеты проводятся без учета многомерности процесса [5] или только для бесконечно больших интенсивностей теплообмена твердых тел с окружающей средой [6]. Поэтому создание новой математической модели, адекватно описывающей переходные тепловые процессы в твердых телах, построение эффективного метода решения поставленной задачи и реализация его в виде современного программного продукта, который можно использовать в инженерных целях для анализа и прогноза, является актуальной задачей.

## 1. Математическая модель

### 1.1. Основные уравнения

Для описания процессов движения окружающей твердое тело газообразной среды (в общем случае, многокомпонентной смеси газов) используются усеченные уравнения Навье-Стокса, полученные путем отбрасывания вязких членов (приближение Эйлера с источниковыми членами) с допущением о

том, что основное влияние на процесс оказывает конвективный обмен массой, импульсом и энергией [7].

Расчетной областью  $\Omega$  является параллелепипед с прямолинейными образующими, расположенный в правой декартовой системе координат (X, Y, Z) с основанием в плоскости XOZ (ось Y ориентирована в направлении, противоположном действию сил тяжести Земли) (рис. 1). Расчетная область разбивается на пространственные ячейки, причем размеры граней подбираются из условия достаточно полной передачи объема и поверхностей твердого тела.

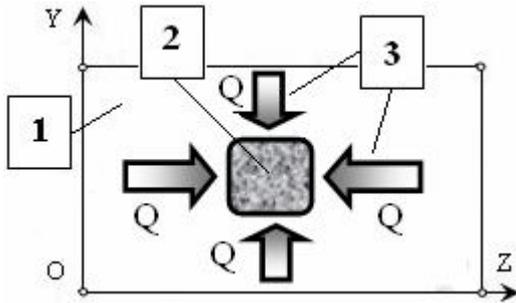


Рис. 1. Общая расчетная схема теплообмена: 1 – окружающая газовая среда; 2 – твердое тело; 3 – тепловые потоки

Закон сохранения энергии для каждой расчетной «твердой» ячейки (без источников тепла) может быть представлен в интегральной форме:

$$\iiint_V \rho \frac{d(C_v T)}{dt} dV = \iiint_V \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) dV. \quad (1)$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса к правой части уравнения (1):

$$\iiint_V \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) dV = \iint_{\sigma} (-\lambda \operatorname{grad} T, \vec{n}) d\sigma, \quad (2)$$

где  $V$  – объем элементарной расчетной ячейки;  $\sigma$  – ограничивающая поверхность данной ячейки, которая имеет внешнюю нормаль  $\vec{n}$  ( $\sigma \vec{n}$ );  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $T$  – температура;  $q$  – тепловой поток, определяемый по закону Фурье  $q = -\lambda \operatorname{grad} T$ .

## 1.2. Граничные условия

Тепловой поток на границе твердой ячейки, сопряженной с газовой ячейкой (рис. 2), можно определить согласно закону Ньютона:

$$q_w = \alpha(T_w - T_e) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (3)$$

где  $T_w$  – температура на стенке;  $T_e$  – температура в сопряженной газовой ячейке;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

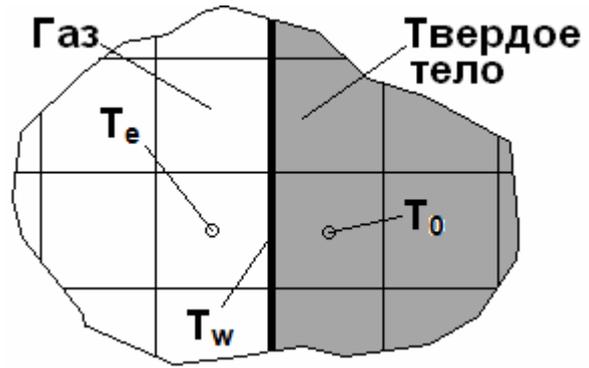


Рис. 2. Расчетная схема теплоотдачи на границе «газ-тело»

Предположив одинаковый размер  $h$  ячеек по всем направлениям, уравнение (3) можно упростить:

$$\alpha(T_w - T_e) \cong -\lambda(T_w - T_0)/h/2. \quad (4)$$

Выполнив ряд тождественных преобразований, получим соотношение для температуры на стенке:

$$T_w = (h\alpha T_e + 2\lambda T_0)/(h\alpha + 2\lambda). \quad (5)$$

Коэффициент температуропроводности для материала твердого тела с теплоемкостью  $C_v$  и плотностью  $\rho$  определяется так:

$$a = \lambda/(C_v \rho). \quad (6)$$

Введем безразмерный параметр  $Bi$  теплообмена для ячейки (число Био):

$$\overline{Bi} = (\alpha h)/\lambda. \quad (7)$$

Тогда соотношение (5) можно преобразовать к виду, удобному для вычислений:

$$T_w = (T_e \overline{Bi}/2 + T_0)/(\overline{Bi}/2 + 1). \quad (8)$$

При постановке граничных условий для «газовых» граней полагается, что расходная составляющая скорости не превосходит скорость звука. Граничные условия на входе будем задавать на поверхностях тех граней, примыкающих к границам расчетной области, через которые в расчетную область поступает атмосферный воздух. Набегающий поток на входе определяется величинами полной энтальпии, функции энтропии, направлением вектора скорости потока, относительной массовой плотностью примеси.

Параметры потока на входе определяются с привлечением соотношения для «левого» инварианта Римана [8]. На непроницаемых участках, ограничивающих расчетную область поверхностей, выполняются условия «непротекания». Граничные условия на выходе будем задавать на поверхностях тех граней конечно-разностных ячеек, которые примыкают к границам расчетной области и через которые предполагается вытекание или втекание газовой смеси. В выходных областях, кроме атмо-

сферного давления использовались соотношения для “правого” инварианта Римана [8].

### 1.3. Начальные условия

В начальный момент времени во всех «газообразных» ячейках расчетной области принимались параметры окружающей среды, а распределение температуры в твердом теле предполагалось равномерным по объему. При интенсивном воздействии температуры внешней среды, что соответствует значению коэффициента теплоотдачи равному бесконечности, температура поверхности тела мгновенно принимала значение, равное температуре среды.

В начальный момент времени во всех «газообразных» ячейках расчетной области принимаются параметры окружающей среды. В ячейках, занимаемых облаком газообразной примеси, которое образовалось в результате мгновенного выброса, относительная массовая концентрация примеси принимается равной  $Q=1$  (100%). В ячейках с испарением или истечением газа задается закон изменения расхода примеси.

### 1.4. Метод численного решения

Законы сохранения массы, импульса, энергии окружающего газа в интегральной форме для каждой расчетной газовой ячейки численно решались с использованием схемы распада произвольного разрыва (метод С.К. Годунова [7]), которая обеспечивает построение разрывных решений без выделения разрывов. Совокупность газодинамических параметров во всех ячейках в момент времени  $t^n$  представляет собой известное решение на временном слое с индексом  $n$ . Параметры в следующий момент времени  $t^{n+1} = t^n + \tau$  рассчитывались посредством применения явных конечно-разностных аппроксимаций. Устойчивость конечно-разностной схемы обеспечивается за счет выбора величины шага по времени  $\tau$ .

Для твердой ячейки с размерами  $h_x, h_y, h_z$  вдоль осей координат условие устойчивости конечно-разностной схемы выглядит так:

$$2a\tau \leq 1 / \left( 1/h_x^2 + 1/h_y^2 + 1/h_z^2 \right). \quad (9)$$

Тогда шаг по времени для явной схемы расчета можно определить из соотношения:

$$\tau \leq 1 / \left( 2a \left( 1/h_x^2 + 1/h_y^2 + 1/h_z^2 \right) \right). \quad (10)$$

Так как шаг по времени для газовых ячеек на порядок меньше, чем шаг для твердых ячеек, в случае неподвижной или установившейся теплопроводной окружающей твердое тело газовой среды, целесообразно «заморозить» по времени параметры

газа. Это позволяет значительно снизить временные затраты на выполнение расчета.

## 2. Верификация численной модели

Адекватность разработанной математической модели теплообмена проводилась на основе сопоставления численного моделирования с известными аналитическими решениями одномерных тестовых задач для бесконечной пластины с различными начальными, граничными условиями и переменной интенсивностью теплообмена с теплопроводной газообразной окружающей средой.

### 2.1. Тестовая задача 1

Рассматривается нестационарный процесс остывания бесконечной пластины при условии бесконечно большой интенсивности теплообмена с окружающей газообразной средой (рис. 3).

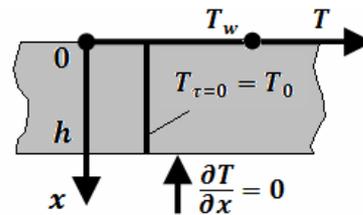


Рис. 3. Расчетная схема теплообмена (задача 1)

В начальный момент времени температура в пластине имеет постоянное значение:

$$T|_{\tau=0} = T_0. \quad (11)$$

На одной границе пластины выполняется условие

$$T|_{x=0} = T_w, \quad (12)$$

а на другой границе –

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} = 0. \quad (13)$$

Аналитическое решение для распределения параметра температуры представлено бесконечным рядом:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n (1-\eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad (14)$$

где коэффициенты  $\mu_n$  и  $A_n$  выглядят так:

$$\mu_n = (2n-1)\pi/2, \quad (15)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n}. \quad (16)$$

В расчетах использовались безразмерные аргументы времени  $F_0 \equiv (a\tau)/h^2$  (число Фурье) и текущей координаты  $\eta \equiv x/h$ .

Результаты сравнения аналитического и численного решений представлены на рис. 4.

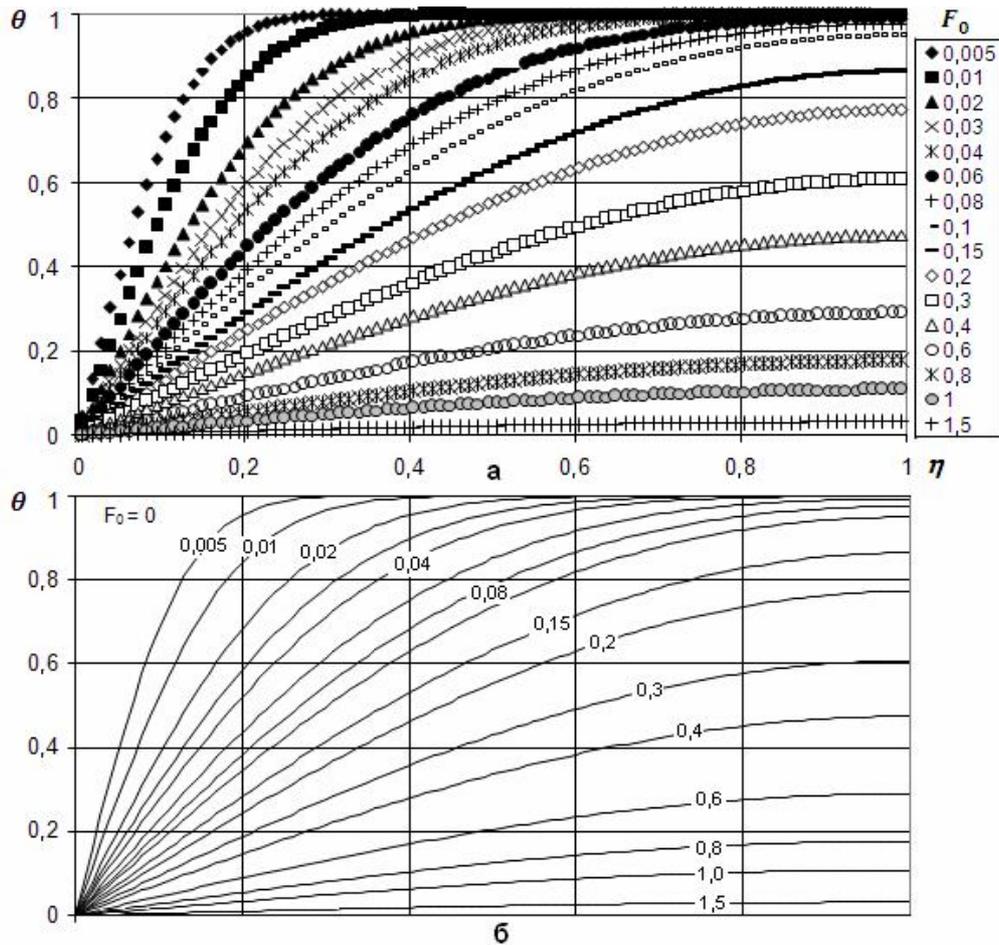


Рис. 4. Результаты расчета теплообмена в бесконечной пластине согласно схеме 1: а – расчет; б – аналитический метод [1]

2.2. Тестовая задача 2

Рассматривается нестационарный процесс теплопроводности в бесконечной пластине с градиентным распределением начальной температуры при условии бесконечно большой интенсивности теплообмена с окружающей газообразной средой (рис. 5).

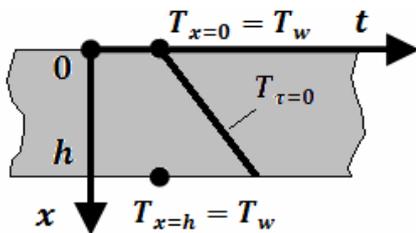


Рис. 5. Расчетная схема теплообмена в бесконечной пластине (задача 2)

В начальный момент времени температура в пластине меняется по закону:

$$T|_{\tau=0} = T_w + \Delta T x/h. \tag{17}$$

На обеих границах пластины выполняется условие:

$$T|_{x=0} = T|_{x=h} = T_w. \tag{18}$$

Аналитическое решение для распределения параметра температуры представлено бесконечным рядом:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin[\mu_n \eta] \exp(-\mu_n^2 F_0), \tag{19}$$

где коэффициенты  $\mu_n$  и  $A_n$  выглядят так:

$$\mu_n = n\pi, \tag{20}$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n}. \tag{21}$$

Результаты сравнения аналитического и численного решений представлены на рис.6.

2.3. Тестовая задача 3

Рассматривается процесс теплообмена в бесконечной пластине с постоянным распределением начальной температуры при конечной величине коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  с окружающей газообразной средой с температурой  $T_e$  (рис. 7).

В начальный момент времени температура в пластине имеет постоянное значение:  $T|_{\tau=0} = T_0$ . На одной границе пластины выполняется условие:

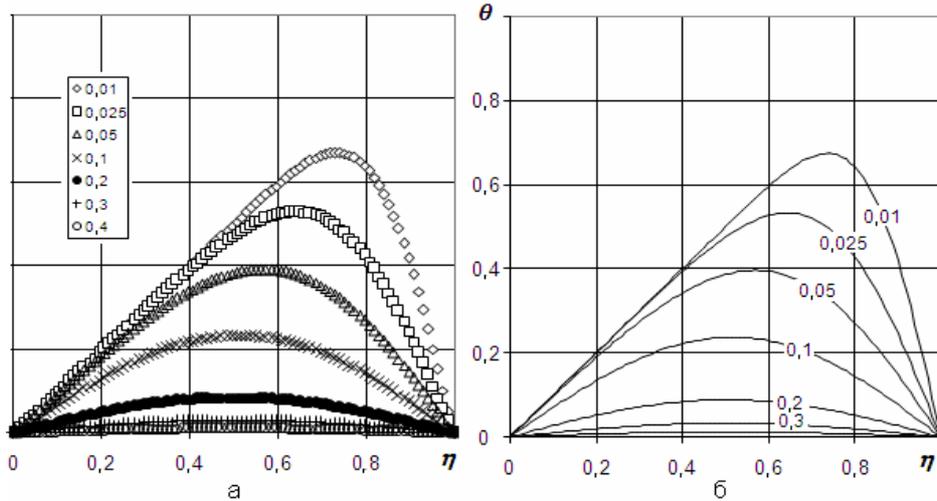


Рис. 6. Результаты расчета теплообмена в бесконечной пластине согласно схеме 2: а – расчет; б – аналитический метод [1]

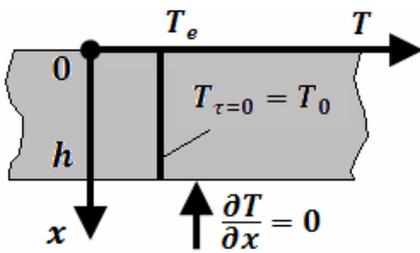


Рис. 7. Расчетная схема теплообмена в бесконечной пластине (задача 3)

$$\Gamma - \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha (T_e - T_{x=0}), \quad (22)$$

де температура окружающей среды  $T_e = \text{const}$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности для материала пластины;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи для системы «газ-материал». На другой границе  $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} = 0$ .

Аналитическое решение распределения параметра температуры представлено бесконечным рядом:

$$\Theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n (1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad (23)$$

где соотношения для коэффициентов  $\mu_n$  и  $A_n$  выглядят так:

$$\text{ctg } \mu_n = 1/\text{Bi}, \quad (24)$$

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} (2\text{Bi} \sqrt{\mu_n^2 + \text{Bi}^2})}{(\mu_n (\mu_n^2 + \text{Bi}^2 + \text{Bi}))}. \quad (25)$$

В расчетах использовался безразмерный критерий теплообмена – число Био  $\text{Bi} \equiv (\alpha h)/\lambda$ .

Результаты сравнения аналитического и численного решений представлены на рис. 8 – 11. Данные численных расчетов с приемлемой точностью согласуются с аналитическими данными, что позволяет использовать математическую модель для решения поставленной задачи.

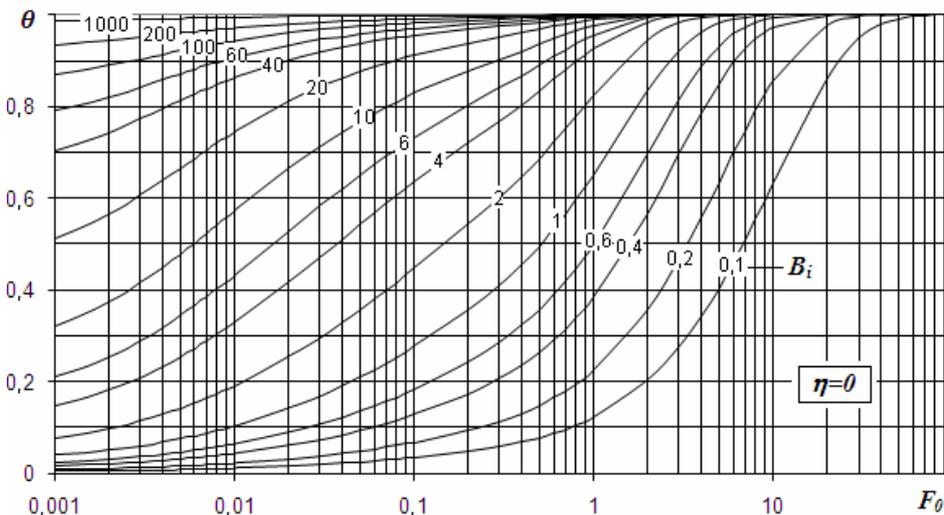


Рис. 8. Результаты аналитического решения задачи теплообмена в бесконечной пластине согласно схеме 3 при  $\eta=0$  [1]

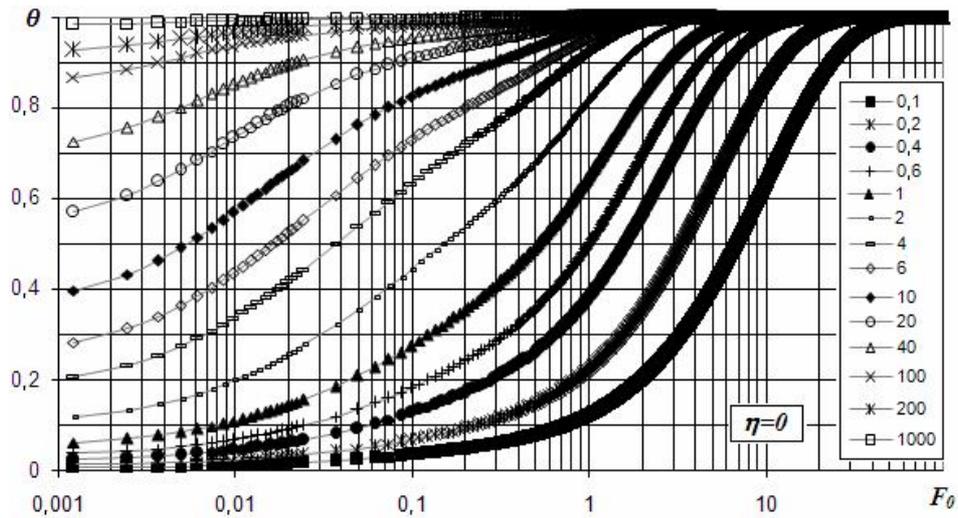


Рис. 9. Результаты расчета теплообмена в бесконечной пластине согласно схеме 3 при  $\eta=0$

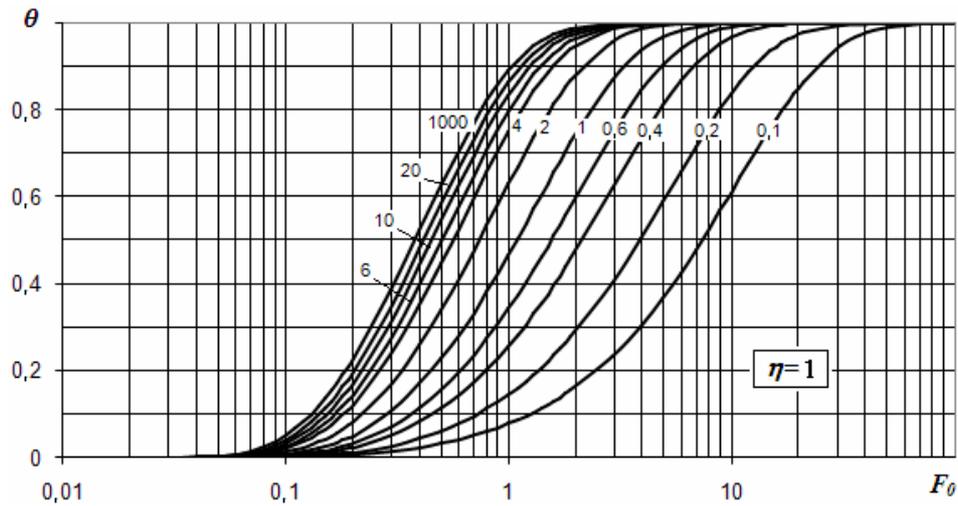


Рис. 10. Результаты аналитического решения задачи теплообмена в бесконечной пластине согласно схеме 3 при  $\eta=1$  [1]

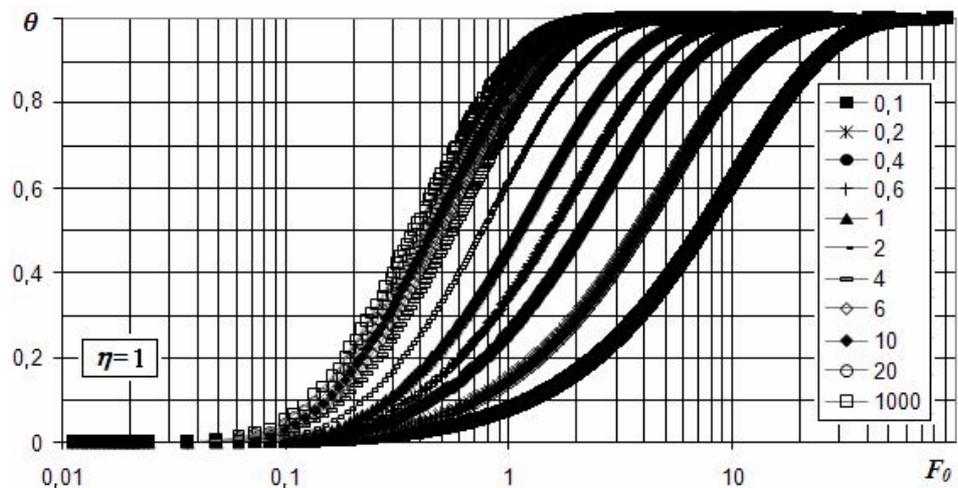


Рис. 11. Результаты расчета теплообмена в бесконечной пластине согласно схеме 3 при  $\eta=1$

### 3. Расчет теплопроводности в твердых телах сложной формы

На основе математической модели создана компьютерная подсистема инженерного анализа теплопроводности в многосвязных твердых телах с однородными теплофизическими свойствами, подвергающихся охлаждению (нагреву) при мгновенном погружении их в теплопроводную газовую среду. Эта подсистема является составной частью исследовательского программного комплекса «Fige» [9]. Программа позволяет прогнозировать изменение концентрации примеси во времени и пространстве в расчетной области с использованием персональных компьютеров в практически приемлемое время.

#### 3.1. Расчет твердых объектов простых форм

Были проведены расчеты температурных полей в трехмерных твердых телах примитивных геометрических форм: сфера, цилиндр, параллелепипед, призма с основанием правильного многогранника и произвольного полигона. Есть возможность произвольного расположения данных фигур в пространстве относительно заданной системы координат.

Для упрощения расчетов предполагалось, что окружающая газовая среда неподвижна и интенсивность теплоотдачи от газа к телу является бесконечно большой. Результаты расчетов представлены на рис. 12.

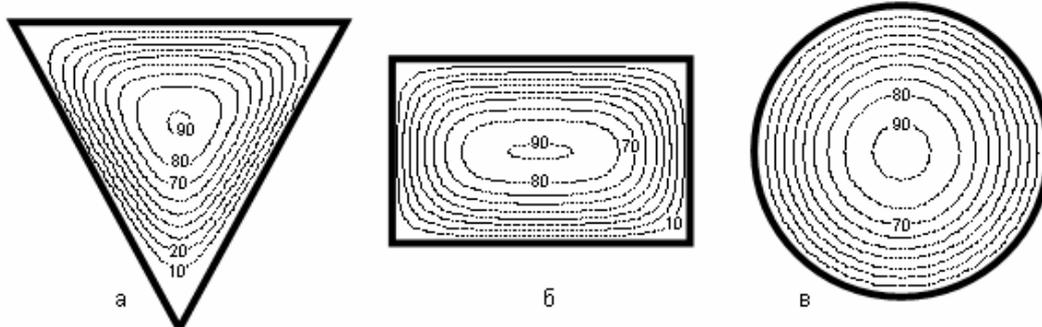


Рис. 12. Изотермы в сечении: а – трехгранной призмы; б – параллелепипеда; в – цилиндра

#### 3.2. Расчет объектов с полостями

Кроме сплошных твердых тел разработанная компьютерная система позволяет рассматривать твердые тела с полостями, заполненными газовой средой.

Перечисленные ранее геометрические формы представлены в компьютерной программе как система родственных классов, что позволяет использо-

вать их для конструирования полостей в твердых телах. Результаты охлаждения цилиндрического тела с полостью в форме параллелепипеда представлены на рис. 13.

Видно, что форма твердых тел и наличие полостей разных геометрических форм существенно влияют на характер полей температур и скорость процесса охлаждения.

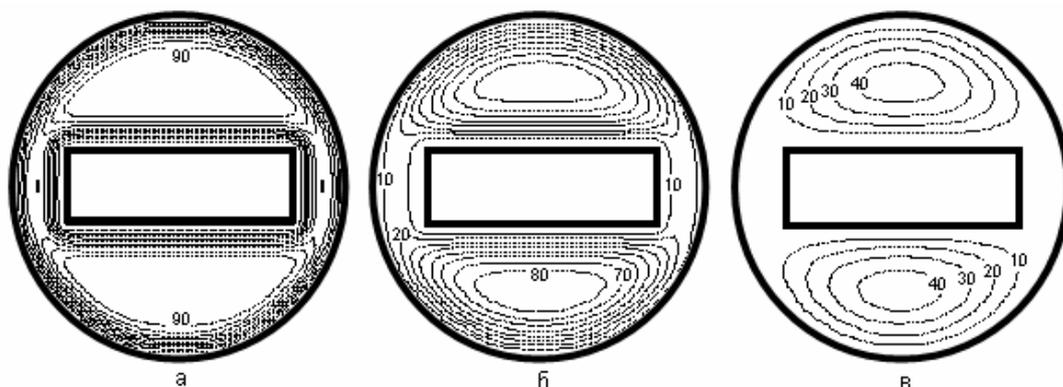


Рис. 13. Изотермы в сечении: цилиндра с полостью в разные моменты времени охлаждения: а – 0,5 с; б – 1,5 с; в – 2,5 с

#### 3.3. Расчет объектов сложных форм

В реальной инженерной практике детали машин, подвергающиеся тепловой нагрузке, имеют сложные формы.

Поэтому в компьютерной системе предусмотрена возможность обрабатывать твердые тела, форма которых может быть совокупностью тел перечисленных примитивных форм. Температурное поле в сечении тела-комбинации призмы с двумя парал-

лелепидами в определенный момент процесса охлаждения представлено на рис. 14.

Часто теплонапряженные детали имеют совершенно произвольную форму, которая не может быть компиляцией фигур простых геометрических форм. Примером такого тела может служить лопатка турбины (ротора или статора).

Для такого рода тел система предлагает использовать тела с основанием произвольного полигона. Координаты плоского сечения лопатки турбины и формируют такой полигон.

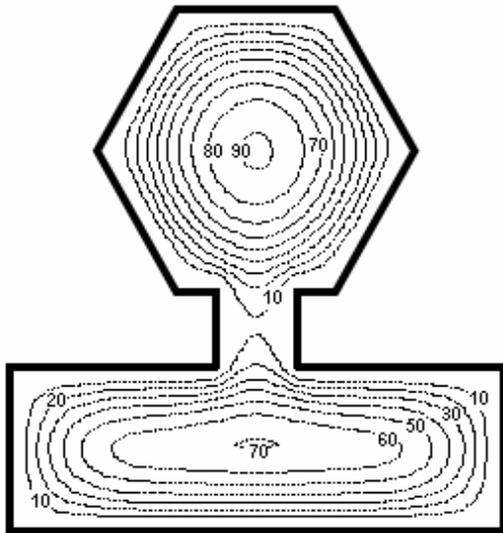


Рис. 14. Изотермы в сечении тела сложной формы в некоторый момент охлаждения (1,49 с)

Были проведены модельные расчеты процесса охлаждения типовой сплошной лопатки турбины (рис. 15) и с полостями охлаждения (рис. 16) при бесконечно большой интенсивности теплообмена. Видно, что наличие полостей ускоряет теплообмен.

### Заключение

Разработана трехмерная математическая модель переходных процессов теплообмена в однородных многосвязных твердых телах произвольной формы, окруженных теплопроводной газообразной средой. Конечно-разностная схема развита для случая трехмерной системы уравнений движения газовой динамики, дополненной законом сохранения внутренней энергии для твердого тела. Разработан единый алгоритм сквозного счета для нахождения теплофизических параметров газа и сплошного твердого тела на основе явной конечно-разностной схемы первого порядка аппроксимации. Разработана компьютерная система, моделирующая нестационарные процессы теплообмена в твердых телах произвольной формы. Верификация математической модели показала приемлемую ее точность, в сравне-

нии с известными аналитическими решениями для ряда тестовых задач теплообмена.

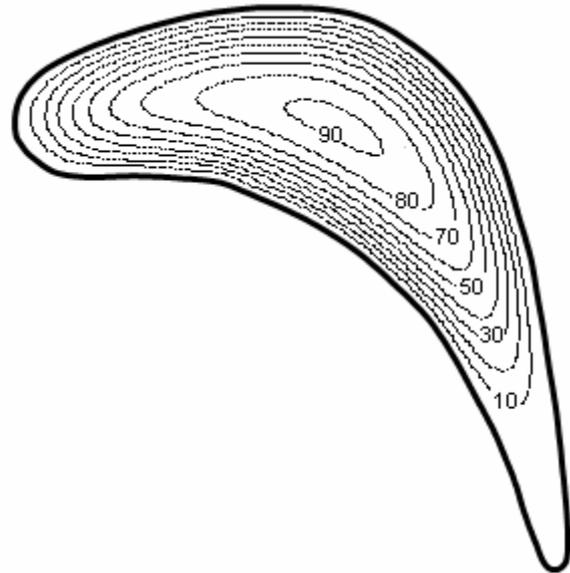


Рис. 15. Изотермы в сечении сплошной лопатки турбины (8,5 с)

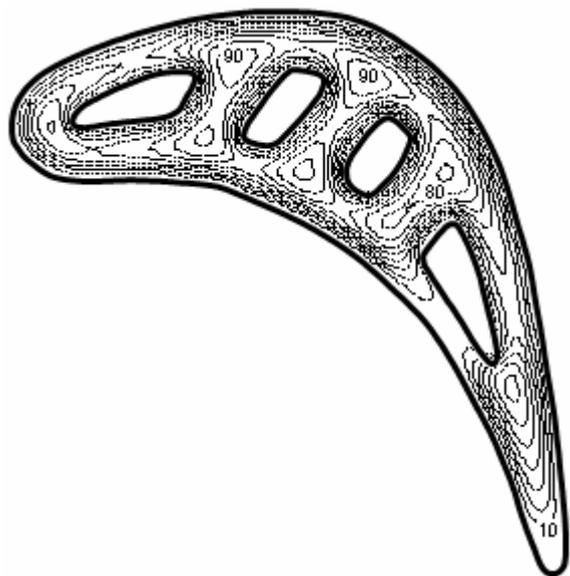


Рис. 16. Изотермы в сечении лопатки турбины с полостями охлаждения (1,98 с)

Выполнено численное моделирование переходных процессов остывания трехмерных твердых тел примитивных геометрических форм сплошного сечения и снабженных полостями, заполненными газом. Проведены расчет и анализ температурных полей в плоском сечении неохлаждаемой и охлаждаемой турбинной лопатки.

Полученные результаты численного моделирования могут быть использованы для последующего расчета напряженного состояния твердого тела, которое подвергается термической нагрузке.

## Литература

1. Пехович А.И. Расчеты теплового режима твердых тел / А.И. Пехович, В.М. Жидких. – Л.: Энергия, 1976. – 352 с.
2. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 302 с.
3. Дульнев Г.Н. Методы расчета теплового режима приборов / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов. – М.: Радио и связь, 1990. – 312 с.
4. Дульнев Г.Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов. – М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.
5. Ярышев Н.А. Приближенный анализ одномерных процессов теплопроводности / Н.А. Ярышев // Изв. Вузов. Приборостроение. – 2000. – Т. 43, №3. – С. 54-61.
6. Золотухин Ю.А. Моделирование и расчет температурных полей в переходных процессах теплопроводности / Ю.А. Золотухин // Современные технологии: Сб. научных статей Санкт-Петербур-

бургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – СПб.: ГИТМО (ТУ), 2001. – №1(15). – С. 249-256.

7. Numerical Modeling of Hydrogen Release, Mixture and Dispersion in Atmosphere / E.A. Granovskiy, V.A. Lyfar, Yu.A. Skob, M.L. Ugryumov // Abstracts Book and CD-ROM Proceedings the International Conference on Hydrogen Safety. – Pisa (Italy). – 2005. – 10 p. (ICHS Paper No. 110021).

8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

9. Скоб Ю.А. Комп'ютерна програма «Комп'ютерна інтерактивна система інженерного аналізу та прогнозу руху хімічно реагуючих газоповітряних сумішей в задачах промислової аеродинаміки та екології атмосфери «FIRE»»: Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 30079 / Ю.А. Скоб, М.Л. Угрюмов, К.П. Коробчинський (Україна). – Дата реєстрації 28.08.2009.

Поступила в редакцию 1.06.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. кафедры информатики М.Л. Угрюмов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

### ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛООБМІНУ В ТВЕРДИХ ТІЛАХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

*Ю.О. Скоб*

Виконано чисельне моделювання процесів нестационарного теплообміну в багатозв'язаних твердих тілах складної форми, які розташовані у теплопровідному газоподібному середовищі на основі єдиного алгоритму. Проведена верифікація математичної моделі порівнянням з аналітичними розв'язаннями модельних тестових задач для пластини. Отримані тривимірні поля температури в просторових твердих тілах з формою примітивів, а також їх комбінації. Проведені чисельні розрахунки теплообміну в лопатці турбіни сполушеного перетину та з отворами охолодження. Тривимірні поля температур можуть бути використані для оцінки тепло напруженого стану твердих тіл.

**Ключові слова:** чисельне моделювання, теплообмін, теплопровідність, тверде тіло складної форми, ізотерми.

### HEAT TRANSFER NUMERICAL MODELING IN COMPLEX SHAPED SOLIDS

*Y.A. Skob*

A time-dependent heat transfer processes numerical modeling in complex-shaped solids surrounded by heat-conducting gaseous environment was carried out. A mathematical model was validated by some test analytical solutions. Three-dimensional temperature fields in spatial solids of simple forms and their arbitrary combinations were calculated. Numerical calculations of heat transfer in the turbine blade with and without cooling caves were conducted. The calculated three-dimensional temperature fields can be used during engineering evaluation of the high-beat area of the solids.

**Key words:** numerical modeling, heat transfer, thermal conductivity, solid, complex shape.

**Скоб Юрий Алексеевич** – канд техн. наук, доцент, доцент кафедры информатики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: skob@ic.kharkov.ua.