

УДК 631.7.04-197:631:7.019.11

**В.О. ПОВГОРОДНИЙ***Институт проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного, Украина***ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ**

*Экспериментально – теоретическое исследование термоупругих характеристик материалов приборов, а также элементов турбостроения осуществляется исходя из решения обратной задачи термоупругости. Обратная задача термоупругости решается с использованием уравнения Фредгольма и гранично-элементный аналог ядра интегрального оператора позволяет заменить эксперимент. В качестве примера рассмотрим неметаллические материалы, используемые для изготовления печатных плат. Результаты расчета можно использовать как неотъемлемую часть проектирования объектов приборостроения и энергетического машиностроения (материалов паровых и газовых турбин), а также расчета их ресурса и выбора системы охлаждения.*

**Ключевые слова:** температура, обратная задача, термоупругость, стеклотекстолит.

**Введение**

В уравнениях МГЭ, которые на этапе дискретизации записываются для каждого граничного узла пластины и боковой поверхности пластины, неизвестными есть напряжения на поверхности пластины, граничные условия задаются перемещениями узлов на поверхности пластины.

Наиболее трудоемкой частью решения является вычисление коэффициентов подматриц. Коэффициенты этих подматриц исчисляются численным интегрированием решения Миндлина с помощью квадратурных формул Гаусса.

Для решения задачи боковая поверхность пластины дискретизировались десятью граничными элементами. Проводилась линейная аппроксимация напряжений по длине каждого граничного элемента. Для каждого граничного узла записывалось уравнение (1), что привело к образованию системы линейных алгебраических уравнений пятнадцатого порядка. Для числовой реализации задачи составлена программа на алгоритмическом языке Fortran. В программе корни системы линейных алгебраических уравнений находились по методу единого деления Гаусса. Так решалась прямая задача термоупругости, т.е. задача определения характеристик НДС пластины.

### 1. Использование метода регуляризации А.Н. Тихонова для решения обратной задачи термоупругости

Пусть  $U, F$  – гильбертовы пространства;  $D$  – замкнутое выпуклое множество априорных ограни-

чений задачи ( $D \subseteq U, 0 \in D$ ).  $A, A_h$  – линейные ограниченные операторы, где  $A_h$  – аппроксимирующий оператор,  $h \geq 0$  – погрешность аппроксимации, т.е.  $\|A - A_h\| \leq h$ .

Построим приближенное решение уравнения (4.3), принадлежащее множеству  $D$ , по заданному набору данных  $\{A_h, f_\delta, \eta\}$ ,  $\eta = (\delta, h)$ , где  $\delta > 0$  – погрешность задания правой части уравнения (4.3), т.е.  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ .

Введем сглаживающий функционал [1]

$$M^\alpha[u] = \|A_h u - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2 \quad (1)$$

( $\alpha > 0$  – параметр регуляризации) и рассмотрим экстремальную задачу о минимизации функционала  $M^\alpha[u]$ :

$$M^\alpha[u] \rightarrow \min_{u \in D} \quad (2)$$

Имеет место следующий результат [см.1]. Для любых  $\alpha > 0$ ,  $f_\delta \in F$  и линейного ограниченного оператора  $A_h$  задача (4.3) разрешима и имеет единственное решение  $u_\eta^\alpha \in D$ , причем  $\|u_\eta^\alpha\| \leq \frac{\|u_\eta\|}{\sqrt{\alpha}}$ .

#### 1.1. Выбор параметра регуляризации

Выбор параметра регуляризации осуществляется в соответствии с принципом обобщенной невязки [1], т.е.  $\alpha$  находится из уравнения

$$\rho(\alpha) = \|A_h u_\eta^\alpha - f_\delta\|^2 - (\delta + h \|u_\eta^\alpha\|)^2 - \mu^2 (f_\delta, A_h) = 0, \quad (3)$$

где

$$\mu(f_\delta, A_h) = \inf_{u \in D} \|A_h u - f_\delta\| - \quad (4)$$

мера несовместности уравнения (4.3) с приближенными данными.

При этом если выполнено условие

$$\|f_\delta\|^2 \geq \delta^2 + \mu^2(f_\delta, A_h), \quad (5)$$

то уравнение (1) имеет один положительный корень, который выбирается в качестве параметра регуляризации в методе А.Н. Тихонова.

Для отыскания корня уравнения (1) можно использовать модификацию метода хорд. Опишем кратко итерационную процедуру нахождения параметра регуляризации.

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Зададим начальное значение параметра регуляризации  $\alpha_0$  и выберем следующее значение  $\alpha_1$  ( $\alpha_1 > \alpha_0$ ,  $|\alpha_1 - \alpha_0| > \varepsilon$ ), полагая  $\alpha_1 = \alpha_0 / 2$  и вычислим соответствующие значения функции  $\rho(\alpha_0), \rho(\alpha_1)$ .

Далее, до тех пор, пока выполняется условие  $|\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}| \geq \varepsilon$ , строим итерационную последовательность по следующей рекуррентной формуле

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-2}}{1 - \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} \frac{\rho(\alpha_{n-2})}{\rho(\alpha_{n-2}) - \rho(\alpha_{n-1})}}, \quad (6)$$

причем, если

$$\rho(\alpha_{n-2})\rho(\alpha_{n-1}) > 0,$$

то

$$\alpha_{n-2} = \alpha_{n-1}, \quad \alpha_{n-1} = \alpha_n,$$

Если

$$\rho(\alpha_{n-2})\rho(\alpha_{n-1}) < 0,$$

то

$$\begin{cases} \text{если } \rho(\alpha_{n-2})\rho(\alpha_n) < 0, \text{ то } \alpha_{n-1} = \alpha_n, \\ \text{если } \rho(\alpha_{n-1})\rho(\alpha_n) < 0, \text{ то } \alpha_{n-2} = \alpha_n. \end{cases}$$

В качестве подходящего значения параметра регуляризации выбирается  $\alpha = \alpha_{n-1}$ .

## 2. Метод регуляризации А.Н.Тихонова для уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I-ого рода с гладким ядром  $K(x, s)$  [1]:

$$Au = \int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [c, d]; \quad (7)$$

$$K(x, s) \in C([c, d] \times [a, b]);$$

$$f(x) \in L_2[c, d].$$

Пусть вместо  $f$  нам известно такое ее приближенное значение  $f_\delta$ , что

$$\|f - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta.$$

Предположим, что из априорных соображений известно, что  $u(s)$  – кусочно-гладкая, тогда выберем  $U = W_2^1[a, b]$ . Пусть вместо  $K(x, s)$  известна такая функция  $K_h(x, s)$ , что  $\|K - K_h\| \leq h$ , тогда

$$\|A - A_h\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq h, \quad (8)$$

где  $A_h$  – интегральный оператор, соответствующий ядру  $K_h(x, s)$ .

Используя схему построения регуляризирующего алгоритма А.Н. Тихонова, перейдем от (3) к минимизации стабилизирующего функционала  $M^\alpha[u]$ .

Строим конечномерную аппроксимацию функционала  $M^\alpha[u]$ , используя квадратурные формулы, для чего вводим равномерные сетки по  $x$  и по  $s$  шагами

$$h_s = (b - a) / n, \quad h_x = (d - c) / m;$$

$$s_j = a + (j - 1)h_s, \quad x_i = c + (i - 1)h_x.$$

Обозначая

$$u(s_j) = u_j, \quad f(x_i) = f_i, \quad k(x_i, s_j) = a_{ij},$$

используем квадратурную формулу прямоугольников для вычисления интегралов и аппроксимируем производную конечной разностью

$$u'(s) = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_s}.$$

Таким образом, аппроксимация функционала имеет вид

$$M^\alpha(u_i) = h_x \times \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n h_s a_{ij} u_j - f_i \right)^2 + \alpha h_s \sum_{j=1}^n [u_j^2 + u_{j+1}^2] h_s. \quad (9)$$

Используя необходимое условие минимума функционала

$$\frac{\partial M^\alpha[u_j]}{\partial u_k} = h_x \sum_{j=1}^m \left( h_s \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i - f_j \right) 2h_s a_{jk} + \alpha h_s \left[ 2u_k + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_j - u_{j+1}}{h_s} (\delta_{j+1k} - \delta_{jk}) \right] = 0,$$

приходим к линейной алгебраической системе с симметричной матрицей

$$B^\alpha u = F, \quad (10)$$

где

$$B^\alpha = B + \alpha C,$$

$$B = \{b_{ik}\}, \quad b_{ik} = h_x h_s \sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk},$$

$$F = \{f_k\},$$

$$M^\alpha [u] = \|A_h u - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|u\|_{W_2^1}^2 =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \left( \int K_h(x,s) u(s) ds - f_\delta(x) \right)^2 dx +$$

$$+ \alpha \int_a^b \left[ u^2(s) + (u'(s))^2 \right] ds;$$

$$f_k = h_x \sum_{j=1}^m f_{j k} a_{jk}, \quad (11)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h_s^2} & \frac{2}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{h_s^2} \\ \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{h_s^2} & \frac{1}{h_s^2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Для решения системы линейных уравнений (12) можно использовать различные численные методы. При этом следует учитывать, что матрица системы является симметричной и положительно определенной. Одним из наиболее эффективных методов решения таких систем является метод квадратного корня [1] и вышеупомянутый МГЭ.

В методе квадратного корня симметричная положительно определенная матрица  $B^\alpha$  представляется в виде произведения верхней и нижней треугольных матриц

$$B^\alpha = (T^\alpha)^T T^\alpha,$$

где

$$T^\alpha = \begin{pmatrix} t_{11}^\alpha & t_{12}^\alpha & \dots & t_{1n}^\alpha \\ 0 & t_{22}^\alpha & \dots & t_{2n}^\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn}^\alpha \end{pmatrix},$$

причем элементы матрицы  $T^\alpha$  находятся по формулам:

$$t_{11}^\alpha = \sqrt{b_{11}^\alpha}, \quad t_{1j}^\alpha = \frac{b_{1j}^\alpha}{t_{11}^\alpha}, \quad (j > 1),$$

$$t_{ii}^\alpha = \left( b_{ii}^\alpha - \sum_{k=1}^{i-1} (t_{ki}^\alpha)^2 \right)^{1/2}, \quad (i = 2, \dots, n), \quad (13)$$

$$t_{ij}^\alpha = \frac{\left( b_{ij}^\alpha - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^\alpha t_{kj}^\alpha \right)}{t_{ii}^\alpha}, \quad (i < j); \quad t_{ij}^\alpha = 0, \quad (i > j),$$

Таким образом, от системы (10) приходим к решению системы

$$(T^\alpha)^T T^\alpha u_\alpha = F,$$

либо, введя соответствующее обозначение, к решению двух систем с треугольными матрицами

$$\begin{cases} (T^\alpha)^T y = F, \\ T^\alpha u_\alpha = y. \end{cases} \quad (14)$$

Следует заметить, что при выборе параметра регуляризации по принципу обобщенной невязки, решая (1), приходится неоднократно при различных  $\alpha$  решать системы (10), при этом правая часть системы  $F$  и матрица  $B$  не зависят от  $\alpha$ . Это позволяет строить специальные экономичные методы многократного решения систем (10).

Пусть для различных  $\alpha > 0$  необходимо решить систему (10) или

$$(A_h^* A_h + \alpha C) u^\alpha = A_h^* f, \quad (15)$$

где  $A_h^*$  – матрица, транспонированная к  $A_h$  ( $m \times n$ ),  $u^\alpha \in R^n, f \in R^m$ .

Матрица  $C$  определяется согласно (12).

При помощи метода квадратного корня матрицу  $C$  представим в виде

$$C = S^* S,$$

где  $S$  – двухдиагональная матрица.

Сделав замену в (15)

$$y^\alpha = S u^\alpha, \quad (u^\alpha = S^{-1} y^\alpha),$$

получим

$$(A_h^* A_h + \alpha C) S^{-1} y^\alpha = A_h^* f. \quad (16)$$

Умножим это уравнение слева на  $(S^{-1})^*$ , получим

$$(D^* D + \alpha E) y^\alpha = D_h^* f,$$

$$D = A_h S^{-1}. \quad (17)$$

Представим матрицу D в виде

$$D = QPR,$$

где Q (m × m), R (n × n) – ортогональные матрицы, P – правая двухдиагональная матрица [2].

Теперь в уравнении (17) сделаем замену переменных  $x^\alpha = Ry^\alpha, (y^\alpha = R^{-1}x^\alpha)$ , в результате получим

$$(R^* P^* Q^* QPR + \alpha E)R^{-1}x^\alpha = D_h^* f$$

или

$$(P^* P + \alpha E)x^\alpha = RD_h^* f = F, \quad (18)$$

Здесь матрица P\*P – трехдиагональная и уравнение (18) без труда решается, например методом прогонки [3].

Исходный неизвестный вектор  $u^\alpha = S^{-1}R^{-1}x^\alpha$ , однако, часто нет необходимости возвращаться к вектору  $u^\alpha$ , поскольку, например, если h=0, то необходимо лишь проверить условие

$$\|A_h u^\alpha - f\| = \delta,$$

которое эквивалентно условию

$$\|Px^\alpha - Q^* f\| = \delta.$$

### 3. Одновременное определение коэффициента теплопроводности и модуля упругости. Задача об определении модуля упругости (Юнга) E(x)

Решим обратную задачу термоупругости на примере стеклотекстолита СТЭФ. Рассмотрим случай, когда ρ – постоянная величина. Уравнение колебаний и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(E(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + \rho \omega^2 u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l) &= -p^*, \end{aligned} \quad (19)$$

где ρ – плотность;

ω – собственная частота;

u – перемещение.

Найдем E(x) по информации

$$u(l, \omega) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (20)$$

Предположим, что

$$E(x) = E_0 + E_1(x),$$

причём

$$\max \frac{E_1(x)}{E_0} \ll 1.$$

Введем в рассмотрение волновое число

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{E_0}$$

и представим

$$\frac{E(x)}{E_0} = 1 + \varepsilon \eta(x) \quad (21)$$

Отметим, что в задаче (21), E(x) – произвольная кусочно-непрерывная функция, однако строить решение прямой задачи (21) с произвольным законом изменения модуля аналитически сложно. Поэтому, метод линеаризации – один из эффективных методов исследования коэффициентной ОЗТМ (21). Подставим представление (21) в исходную задачу и будем отыскивать ее решение в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}((1 + \varepsilon \eta(x)) \frac{\partial}{\partial x}(u_0 + \varepsilon u_1)) + k^2(u_0 + \varepsilon u_1) &= 0, \\ (u_0 + \varepsilon u_1)|_{x=0} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_0 + \varepsilon u_1)|_{x=l} &= -p^*. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее выпишем множитель при одинаковых степенях ε, получим следующие краевые задачи:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k^2 u_0 = 0, \\ u_0(0) = 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x}(l) = -p^*. \end{cases} \quad (23)$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k^2 u_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\eta(x) \frac{\partial u_0}{\partial x}) = 0, \\ u_1(0) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(l) = -\eta(l) \frac{\partial u_0}{\partial x}(l). \end{cases} \quad (24)$$

Решение задачи (24) имеет вид

$$u_0 = A \sin kx + B \cos kx,$$

причем из граничных условий находим

$$A = -\frac{p^*}{k \cos kl}, B = 0,$$

и тогда

$$u_0 = -\frac{p^*}{k \cos kl} \sin kx. \quad (25)$$

В силу того, что для удовлетворения условию (24), нам требуется лишь значение  $u_1(l)$ , возможен следующий приём, который может оказаться весьма эффективным и в других, более сложных задачах.

Применим к краевой задаче (4.26) конечное интегральное преобразование Фурье, для чего умножим уравнение на  $e^{i\alpha x}$  и проинтегрируем по отрезку  $[0, 1]$ . Тогда получим следующее равенство

$$\begin{aligned} & (-\alpha^2 + k^2) \tilde{u}_1 + u_1'(1) e^{i\alpha l} - \\ & - u_1'(0) - i\alpha (u_1(1) e^{i\alpha l} - u_1(0)) + \\ & + \int_0^1 e^{i\alpha x} \frac{d}{d\xi} (\eta(\xi) u_0'(\xi)) d\xi = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\tilde{u}_1 = \int_0^l e^{i\alpha x} u_1(x) dx.$$

Заметим, что для дальнейшего исследования обратной задачи достаточно исключить из рассмотрения  $\tilde{u}_1$  трансформанту. Подставляя в (26) значения  $\alpha = \pm k$  и учитывая граничные условия в задаче (25), получим линейную алгебраическую систему относительно  $u_1(1)$  и  $u_1'(0)$ , решая которую, находим

$$u_1(1) = p_* \int_0^1 \eta(\xi) \frac{\cos^2 k \xi}{\cos^2 k l} d\xi.$$

Теперь легко сформулировать операторное уравнение относительно  $\eta(x)$

$$\int_0^1 \eta(\xi) \cos^2 k \xi d\xi = f_0(k) \cos^2 kl + \frac{\sin 2kl}{2k}, \quad (27)$$

$$f_0(k) = p_*^{-1} f(k), \quad k \in [k_1, k_2],$$

где (27) – интегральное уравнение Фредгольма I-го рода с гладким ядром, следовательно, для его решения необходимо применить один из методов регуляризации, например метод Тихонова.

Результаты расчета для модуля упругости (Юнга) с использованием МГЭ и метода Тихонова для стеклотекстолита СТЭФ и сравнение с экспериментальными данными приведены далее на рис. 1.

Экспериментальная зависимость для стеклотекстолита СТЭФ получена из справочника:

$$E(t) = 2702416 - 1725328t - 34,5t^2,$$

где  $t$  – температура, °С.

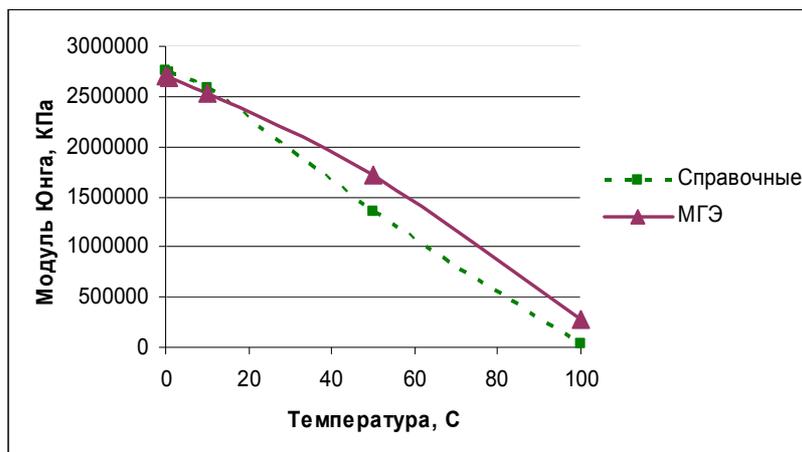


Рис. 1. Сравнение расчетных данных модуля Юнга, полученных с применением метода граничных элементов и экспериментальных для стеклотекстолита СТЭФ

#### 4. Задача об определении коэффициента теплопроводности $\lambda(x)$

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v = 0, \quad (28)$$

где

$$T(0) = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(l) = -q_v.$$

Постановка обратной коэффициентной задачи: найти  $\lambda(x)$  по информации  $T(l, \omega) = f(l, \omega)$ ,  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ .

Далее аналогично предыдущей задаче.

Результаты расчета для коэффициента теплопроводности для стеклотекстолита СТЭФ и сравнение с экспериментальными данными приведены далее на рис. 2. Экспериментальная зависимость для стеклотекстолита СТЭФ получена из справочника:

$$\lambda(t) = 0,3 + 0,00188t + 0,000051t^2,$$

где  $t$  – температура, °С.

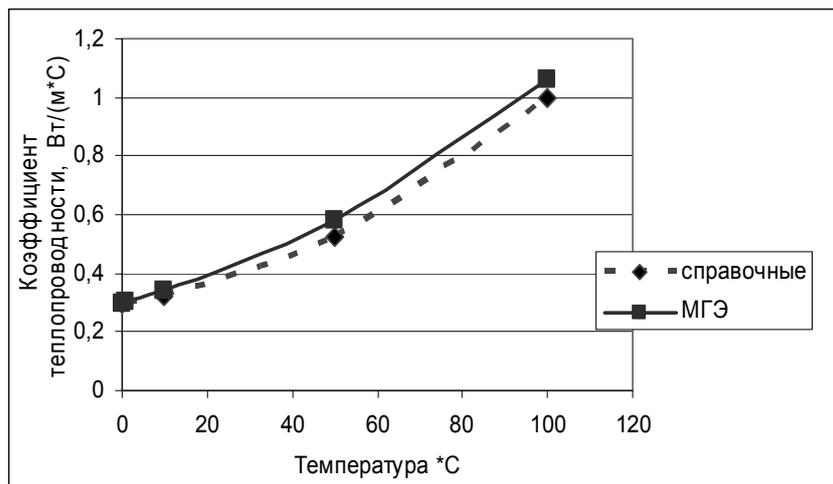


Рис. 2. Сравнение расчетных данных коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , полученных с применением метода граничных элементов и экспериментальных для стеклотекстолита СТЭФ

### 5. Сравнение механических характеристик неметаллических материалов, полученных путем решения обратных задач термоупругости, с аналогичными справочными данными. Технология производства стеклопластов и изделий на их основе

Производство стеклопластов и изделий на их основе осуществляется различными технологическими методами. Правильный выбор метода изготовления материала или изделий является важной задачей, определяющей очень часто преимущества стеклопластов перед другими материалами. При выборе способа изготовления изделий необходимо учитывать их назначение и требования, предъявляемые к ним, а также количество и габариты изделий. Следует при этом иметь в виду, что основная масса изделий изготавливается не из стеклопластов, а из компонентов, составляющих их. Так, например, металлическая труба изготавливается из листа металла, а труба из стеклопласта. Поэтому, важным фактором является выбор необходимых механических и ТМХ свойств материалов, а также в случае необходимости и их уточнение.

Ряд деталей из стеклопластов изготавливается механическим путем на фрезерных и токарных станках или штамповкой на пресечных штампах. В этом случае, как правило, используется листовый или плиточный стеклотекстолит, анизотропные стеклопласты на фенолформальдегидных или кремнийорганических смолах.

Технология изготовления стеклотекстолита мало отличается от технологии, принятой в производ-

стве текстолитов на основе хлопчатобумажной и асбестовой ткани.

Процесс изготовления стеклотекстолита заключается в пропитке стеклянной ткани на обычных пропиточных машинах, последующей ее сушке, раскрой стеклянной ткани и сборке из нее пакетов, прессовании и в некоторых случаях термообработке отпрессованного стеклотекстолита.

Прессование листового или плиточного стеклотекстолита производится в многоэтажных гидравлических прессах при давлении от 2,5 до 15 МПа. Аналогичным путем из стеклянного шпона, получаемого на первом этапе производства анизотропного материала, прессуются листы стеклофанеры.

Из пропитанной ткани или стеклянного шпона в пресс-формах при давлении от 10 до 60 МПа изготавливают сравнительно небольшие детали сложной формы, например лопатки, панели. Наиболее важной операцией при изготовлении сложных изделий из пропитанной стеклоткани или стеклошпона является правильный раскрой ткани или шпона и сборка пакета.

При неправильной конструкции пакета трудно получить изделия необходимой формы без механической доработки, и, кроме того, при высоких давлениях и температуре возможны разрушения стекловолоконного наполнителя, что ведет к снижению механической прочности и термочности в особенности.

Температура и время прессования листового материала и сложных деталей зависят от типа используемого связующего. Следует, однако, иметь в виду, что теплопроводность стеклопластов небольшая, поэтому на прогрев и на охлаждение их в процессе прессования необходимо достаточно продолжительное время.

При использовании медленно отверждающихся смол прибегают к дополнительной термической обработке готового изделия или материала. Этот процесс заключается в нагревании изделия до температуры 200 °С в случае применения модифицированных фенолформальдегидных смол и до температуры 250 °С.

В связи с этим задача определения коэффициента теплопроводности таких материалов актуальна.

## 6. Сравнение механических характеристик

Сравнение результатов свидетельствует об их незначительных расхождениях (погрешность порядка 2,1 %). Заметим, однако, что при решении прямой задачи (задачи определения НДС) с использованием МГЭ пришлось решать 4 алгебраических уравнения, в то время как решение этой же задачи с использованием МКЭ потребовало решения 160 алгебраических уравнений.

### Выводы

Развитие техники самолето- и ракетостроения, приборостроения, энергетических установок и ядерных реакторов и технологии производства в других областях современной практики привели к бурному развитию теории и методов анализа нестационарных температурных напряжений. Математическое моделирование этих процессов тесно связано с определением механических и ТМХ материалов, где происходят изучаемые процессы [2]. В предыдущих работах по этой теме был решен ряд обратных задач об определении переменных термомеханических характеристик. Но в этих работах, в основном, рассматриваются режимы, допускающие явные решения обратных задач.

В более общей постановке решение этой задачи требует применение более универсальных методов.

МГЭ и МКЭ – численные методы, которые находят широкое применение, но естественно, имеют каждый свои достоинства и недостатки.

Достоинства МГЭ: дискретизации подвергается не вся область, занятая телом, как в МКЭ, а только граница, что облегчает численное моделирование и на порядок сокращает число неизвестных; для бесконечных областей задача просто формулируется как внешняя и фундаментальное решение должно удовлетворить некоторым условиям на бесконечности, например, лучевому условию Зоммерфельда в задачах динамики; МГЭ особенно эффективен для вычисления производных функции (например, потоков, деформаций, напряжений, моментов), а также можно с легкостью оперировать сосредоточенными силами и моментами как в области, так и на границе; МГЭ позволяет вычислять значения решения и его производных в любой точке рассматриваемой области и в любой момент времени, так как метод использует интегральное представление решения как аналитическое выражение, которое можно дифференцировать и интегрировать, а также использовать как математическую формулу, что удобно в некоторых типах задач.

В настоящее время изучение поведения конструкций производится с использованием компьютерной техники. Причина этого очевидна и заключается в низкой стоимости численных экспериментов в сравнении с дорогим экспериментальным моделированием.

Численное моделирование может использоваться для изучения структур с различными геометрическими конфигурациями и под воздействие разнообразных нагрузок, а также для определения оптимальных проектных решений до их воплощения в конструкциях, в том числе и для создаваемых приборных и энергетических конструкций.

### Литература

1. Бахышев Ш.М. Обратные задачи термоупругости / Ш.М. Бахышев. – М.: Прометей, 2002. – 152 с.
2. Крысько В.А. Оптимизация формы термоупругих тел / В.А. Крысько, В.А. Павлов. – Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2000. – 160 с.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики / В.Г. Романов. – М.: Наука, 1984. – 261 с.

Поступила в редакцию 2.06.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. кафедры П.Д. Доценко, Национальний аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

**ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛІВ  
НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНИХ  
ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ**

*В.О. Повгородній*

Експериментально-теоретичне дослідження термопружних характеристик матеріалів приладів, а також елементів турбобудування здійснюється виходячи з розв'язків оберненої задачі термопружності. Обернена задача термопружності вирішується за допомогою рівняння Фредгольма та методу гранично-елементний аналог ядра інтегрального оператора дозволяє замінити експеримент. В якості приклада розглянемо неметалічні матеріали, які використовуються для виготовлення печатних плат. Результати розрахунку можна використовувати, як невід'ємну частину проектування об'єктів приладобудування та енергетичного машинобудування (матеріалу парових та газових турбін), а також розрахунку їх ресурсу та вибору системи охолодження.

**Ключові слова:** температура, обернена задача, термопружність, склотекстоліт.

**THE INFLUENCE OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS AND TEMPERATURE FIELD  
OF THE DAMPTIONS ON THE DAMPTION'S PROPERTIES  
OF THE AVIATION'S AIRBORNE CONSTRUCTIONS**

*V.O. Povgorodny*

An inverse quotients thermoelasticity problem for a finite thickness layer is considered. The proposed solution is based on the assumption that thermo-mechanical processes in the layer have a stationary harmonic character. The area geometry and boundary conditions allow reducing the problem to a one-dimensional thermoelasticity problem. Assuming thermomechanical oscillation frequency small enough a solving equation was produced. This equation allows determining quotients of temperature stresses and heat release under deformation. Obtained results can be used to simulate the process of experimental determination of physical-mechanical properties of the materials used in aero- and spacecraft manufacturing and of the energetic machinebuildings.

**Key words:** temperature, reverse task, thermoelasticity, fiberglass.

**Повгородній Владимир Олегович** – канд. техн. наук, младший научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: povgorod@ipmach.kharkov.ua.