УДК 629.735(045)

Н.С. КУЛИК, А.А. ТАМАРГАЗИН, И.И. ЛИННИК

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВИАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Рассмотрены теоретические основы нахождения погрешностей математических моделей авиационных газотурбинных двигателей при построении систем оценки их технического состояния.

авиационный двигатель, модель, погрешность, диагностика

1. Формулирование проблемы

Изучение минимально возможной погрешности модели авиационного двигателя, возникающей при приближенном решении задачи диагностирования технического состояния конкретного экземпляра двигателя, начнем с рассмотрения частного случая. Предположим, что априорное множество корректности модели является параллелепипедом вида [1]:

$$L_T = Q_T^{-1}\left(TA^*\right) = T\left(E + FT\right)^{-1} A^* R^{-1} \in \Im\left(Y, X\right),$$

порожденным ядерным оператором состояния B, перестановочным с информационным оператором F.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис собственных векторов оператора B; $\{b_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – соответствующие наборы собственных чисел операторов B и F соответственно. Рассмотрим задачу оценки снизу погрешности произвольной допустимой решающей процедуры $d \in D$ относительно функционала погрешности Ω_2 [2].

Согласно [2] функция риска произвольной допустимой решающей процедуры удовлетворяет следующему неравенству для всех $x \in W$:

$$\Re(x,d) \geq \left\| S(x,d) - x \right\|^2 + \sum_{k \in J(x)} \frac{\left(\partial S(x,d)\varphi_k, \varphi_k\right)^2}{F\varphi_k, \varphi_k}. \quad (1)$$

Ввиду того, что базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является собственным для оператора B, порождающего множество корректности W, каждый вектор φ_k будет допустимым направлением для всех точек $x \in W$. Таким образом, из (1) получаем

$$\Re(x,d) \geq \left\| S(x,d) - x \right\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\partial S(x,d)\varphi_k, \varphi_k\right)^2}{f_k}. \quad (2)$$

Отметим, что правая часть неравенства (2) зависит только от математического ожидания решающей процедуры $d \in D$.

2. Решение проблемы

Пусть X_n – подпространство, натянутое на векторы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$; E_n – соответствующее ему арифметическое евклидово пространство (E_n – подпространство $R^{(\infty)}$). Обозначим через P_n: $X \to E_n$ оператор ортогонального проектирования, а через z_k – координаты точек $z \in E_n$ ($k = 1, 2,\ldots, n$). Пусть $g\{z\}$ – непрерывно дифференцируемое отображение проекции множества корректности P_nW во все E_n. Тогда среднее от функционала

$$\Re_n\left(g(z), z\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(g_k(z) - z_k\right)^2 + \frac{1}{f_k} \left(\frac{\partial g_k(z)}{\partial z_k} \right)^2 \right]$$

по множеству $P_nW \subset E_n$

$$\Omega_2^{(n)}\left(\Re_n\left(g(\cdot), \cdot\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2^{2n} \det P_n B}} \int_{P_nW} \Re_n\left(g(z), z\right) dz$$

удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Omega_2^{(n)}\left(\Re_n\left(g(\cdot),\cdot\right)\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k}\left(1 - \frac{th\left(b_k\sqrt{f_k}\right)}{b_k\sqrt{f_k}}\right). \quad (3)$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим функционал $\Omega_2^{(n)}$ как функционал от отображения $g: P_nW \to E_n$. Запишем систему уравнений Эйлера для экстремального отображения $v(z)$ функционала $\Omega_2^{(n)}(g(\cdot))$:

$$-\frac{1}{f_k}\frac{\partial^2 v_k(z)}{\partial z_k^2} + v_k(z) - z_k = 0;$$

$$\left.\frac{\partial v_k(z)}{\partial z_k}\right|_{z_k = \pm b_k} = 0. \quad (4)$$

Из (4) следует, что система уравнений распадается. Пусть $u_k(z_k) = v_k(b_k z_k) - b_k z_k$, тогда $u_k(z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 u_k}{dz^2} - f_k b_k^2 u_k = 0; \quad \left.\frac{du_k}{dz}\right|_{z=\pm 1} = -b_k,$$

откуда следует, что

$$u_k(z) = \frac{-sh\left(b_k z\sqrt{f_k}\right)}{\sqrt{f_k}\,ch\left(b_k\sqrt{f_k}\right)}.$$

Таким образом, экстремальная функция

$$v(z) = \langle v_1,\ldots,v_n\rangle,$$

$$v_k(z) = z_k - \frac{-sh\left(z_k\sqrt{f_k}\right)}{\sqrt{f_k}\,ch\left(b_k\sqrt{f_k}\right)},$$

$$k = 1,2,\ldots,n$$

является гладкой функцией, которая реализует абсолютный минимум функционала $\Omega_2^{(n)}$. Действительно, приводя его к сумме положительных квадратичных форм, получим

$$\Omega_2^{(n)}\left(g(\cdot)\right) = \Omega_2^{(n)}\left(v(\cdot)\right) + \frac{1}{2^n\sqrt{\det P_n B}} \times$$
$$\times \int_{-b_n}^{b_n} \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{f_k}\left(\frac{\partial g_k(z)}{\partial z_k} - \frac{\partial v_k(z)}{\partial z_k}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(g(z) - v(z)\right)^2\right\} dz_1 \ldots dz_n.$$

Отсюда следует, что для всех $g(z)$ $\Omega_2^{(n)}\left(g(\cdot)\right) \geq \Omega_2^{(n)}\left(v(\cdot)\right)$. Вычислим

$$\Omega_2^{(n)}\left(v(\cdot)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{f_k b_k^2}\left(\frac{du_k}{dz} + b_k\right)^2 + u_k 2\right\} dz =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{1}{f_k b_k}\left(\frac{du_k}{dz} + b_k\right) dz + \int_{-1}^{1} u_k^2 dz + \right.$$
$$+ \int_{-1}^{1}\frac{1}{f_k b_k^2}\left(\frac{du_k}{dz} + b_k\right)\frac{du_k}{dz} dz =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{b_k z + u_k(z)}{f_k b_k}\right]_{-1}^{1} + \right.$$
$$+ \int_{-1}^{1}\left(u_k - \frac{1}{f_k b_k}\frac{d^2 u_k}{dz_k^2}\right) u_k dz +$$
$$\left. + \left[\frac{u_k(z)\left(\frac{du_k}{dz}(z) + b_k\right)}{f_k b_k^2}\right]_{-1}^{1}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1 - \frac{th\left(b_k\sqrt{f_k}\right)}{b_k\sqrt{f_k}}}{f_k}.$$

Что и требовалось доказать.

Неравенства (3) позволяет показать, что погрешность произвольной допустимой решающей процедуры относительно функционала погрешности удовлетворяет неравенству

$$\inf_{d \in D}\Omega_2(d) \geq \Omega_2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1 - \frac{th\left(b_k\sqrt{f_k}\right)}{b_k\sqrt{f_k}}}{f_k}.$$

Из неравенства (2) вытекает, что для всех $d \in D$ и для всех n

$$\Re(x,d) \geq \Re_n\left(P_n S(x,d), P_n x\right).$$

Следовательно, согласно (3),

$$\Omega_2\left(\Re(\cdot,d)\right) \geq \Omega_2\left(\Re_n\left(P_n S(\cdot,d),\cdot\right)\right) =$$
$$= \Omega_2^{(n)}\left(P_n S(\cdot,d),\cdot\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1 - \frac{th\left(b_k\sqrt{f_k}\right)}{b_k\sqrt{f_k}}}{f_k}. \quad (5)$$

Ввиду того, что неравенство (5) справедливо для всех n, получим следующую оценку для погрешности произвольной решающей процедуры $d \in D$:

$$\Omega_2(d) \geq \Omega_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1 - \frac{th\left(b_k\sqrt{f_k}\right)}{b_k\sqrt{f_k}}}{f_k},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Погрешность произвольной допустимой решающей процедуры $d \in D$ относительно функционала погрешности Ω_1 удовлетворяет неравенству

$$\inf_{d\in D} \Omega_1(d) = \inf_{d\in D} \sup_{x\in W} \Re(x,d) \ge \Omega_2 .$$

Доказательство следует из того, что среднее значение не превосходит наибольшего значения функции.

В качестве замечания можно отметить, что из ядерности оператора B имеем

$$\Omega_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\dfrac{th\left(b_k\sqrt{f_k}\right)}{b_k\sqrt{f_k}}}{f_k} \le$$

$$\le \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{3} tr(B) < \infty.$$

Для рассмотрения более общего случая оценки погрешности требуется обобщение одного результата вариационного исчисления для непрерывно дифференцируемых функций в конечномерном арифметическом (евклидовом) пространстве.

Пусть E_n – n-мерное арифметическое пространство, а $M_\rho \subset E_n$ – шар радиуса ρ с центром в точке нуль. Обозначим через C_ρ^n множество всех непрерывно дифференцируемых (по Гато) отображений шара M_ρ во все E_n. Пусть Q и G – два положительно определенных симметричных линейных оператора (матрицы), действующие в E_n. Рассмотрим на множестве C_ρ^n положительный функционал

$$\Psi_n\left(u(z),z\right) = \left\|u(z)-Qz\right\|_{E_n}^2 + \frac{1}{n}\left[div\left(Gu(z)\right)\right]^2 , \quad (6)$$

определенный для всех $u \in C_\rho^n$, $z \in M_\rho$. Для всех $u \in C_\rho^n$ функционал (6) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{z\in M_\rho} \Psi_n\left(u(z),z\right) \ge \left(\frac{\rho \cdot th(QG)}{\rho\sqrt{n} + \sqrt{n\cdot tr\left(G^2\right)}}\right)^2 .$$

Доказательство этого утверждения опирается на следующее положение. Если на поверхности шара M_ρ отображение $u \in C_\rho^n$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{z\in\partial M_\rho} \left\|u(z)-Qz\right\|_{E_n} \le \varepsilon\rho,\ \varepsilon > 0 , \quad (8)$$

то

$$\max_{z\in M_\rho} \left|div\left(Gu(z)\right)\right| \ge tr\left(GQ\right) - \varepsilon\sqrt{n\cdot tr\left(G^2\right)} . \quad (9)$$

Здесь ∂M_ρ – поверхность шара M_ρ [3].

Пусть V_ρ – гиперобъем шара M_ρ, а $\partial\sigma(z)$ – элемент поверхности ∂M_ρ шара M_ρ. Согласно П.Леви [2], имеем

$$V_\rho = \frac{\rho}{n} \int_{\partial M_\rho} d\sigma(z) . \quad (10)$$

Далее, для любой матрицы G: $E_n \to E_n$

$$\frac{1}{V_\rho} \int_{M_\rho} div(GZ)dz = tr(G) . \quad (11)$$

С другой стороны, из (11), используя формулу Грина, легко получить, что для любой матрицы G: $E_n \to E_n$

$$\frac{1}{V_\rho} \int_{\partial M_\rho} \left\|Ge(z)\right\|_{E_n}^2 d\sigma(z) = \frac{1}{\rho} tr\left(GG^*\right), \quad (12)$$

где $e(z)$ – вектор единичной нормали к поверхности ∂M_ρ шара M_ρ. Используя формулу Грина, симметричность матрицы G и неравенства Копта – Буняковского, для любого $u \in C_\rho^n$ получим, что

$$\left\{\frac{1}{V_\rho} \int_{M_\rho} div\left(G\left(u(z)-Qz\right)\right)dz\right\}^2 =$$

$$= \left\{\frac{1}{V_\rho} \int_{\partial M_\rho} \left[G\left(u(z)-Qz\right)\right]_{E_n} d\sigma(z)\right\}^2 \le$$

$$\le \left\{\frac{1}{V_\rho} \int_{\partial M_\rho} \left\|u(z)-Qz\right\|_{E_n}^2 d\sigma(z)\right\} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{V_\rho} \int_{\partial M_\rho} \left\|Ge(z)\right\|_{E_n}^2 d\sigma(z)\right\}.$$

Далее, используя соотношения (10), (12) и неравенство (8), найдем

$$\left|\frac{1}{V_\rho} \int_{M_\rho} div\left(G\left(z(u)-Qz\right)\right)dz\right| \le \varepsilon\sqrt{n\cdot tr\left(G^2\right)}. .$$

Таким образом, с учетом (11) будем иметь

$$\left|\frac{1}{V_\rho}\int\limits_{M_\rho} div(Gz(u))dz\right| = \left|\frac{1}{V_\rho}\int\limits_{M_\rho} div(GQz)dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{V_\rho}\int\limits_{M_\rho} div(G(z(u) - Qz))dz\right| \geq$$

$$\geq \left|\frac{1}{V_\rho}\int\limits_{M_\rho} div(GQz)dz\right| -$$

$$-\left|\frac{1}{V_\rho}\int\limits_{M_\rho} div(G(z(u) - Qz))dz\right| \geq$$

$$\geq tr(GQ) - \varepsilon\sqrt{n \cdot tr(G^2)}.$$

Отсюда, учитывая, что среднее значение непрерывной функции не превышает ее максимального значения, получим требуемое неравенство (9).

Из утверждения (3) следует следующее: либо максимум первого слагаемого функционала (6) на шаре M_ρ не превышает величины $\varepsilon^2\rho^2$, либо максимум второго слагаемого на шаре M_ρ не меньше, чем

$$\frac{1}{n}\left[tr(GQ) - \varepsilon\sqrt{n \cdot tr(G^2)}\right]^2$$

для всех

$$\varepsilon \in \left[0, \frac{tr(GQ)}{\sqrt{n \cdot tr(G^2)}}\right].$$

Следовательно, для всех $u \in C_\rho^n$

$$\sup_{z \in M_\rho} \Psi_n(u(z), z) \geq$$

$$\geq \min\left[\varepsilon^2\rho^2, \frac{1}{n}\left[tr(GQ) - \varepsilon\sqrt{n \cdot tr(G^2)}\right]^2\right]. \quad (13)$$

Ввиду того, что неравенство (13) справедливо для всех

$$\varepsilon \in \left[0, tr(GQ) - \varepsilon\sqrt{n \cdot tr(G^2)}\right],$$

получим, что максимум функционала (6) на шаре M_ρ для всех $u \in C_\rho^n$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{z \in M_\rho} \Psi_n(u(z), z) \geq$$

$$\geq \max_\varepsilon \min\left[\varepsilon^2\rho^2, \frac{1}{n}\left[tr(GQ) - \varepsilon\sqrt{n \cdot tr(G^2)}\right]^2\right] =$$

$$= \left[\frac{\rho \cdot tr(GQ)}{\rho\sqrt{n} + \sqrt{n \cdot tr(G^2)}}\right]^2,$$

что и требовалось доказать.

Заключение

Таким образом, полученные результаты позволяют оценить погрешность любой модели авиационного двигателя и тем самым оптимизировать модельные и натурные испытания по отработке систем оценки технического состояния как отдельных узлов, так и всего двигателя.

Литература

1. Иванов В.К., Королюк Т.И. Об оценке погрешности при решении линейных некоренных задач // Журн. вычислит. мат. и мат. физ. – 1969. – Т. 9, № 1. – С. 30-41.

2. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.

3. Кулик Н.С., Тамаргазин А.А. Перспективные направления диагностирования авиационных двигателей // Авіаційно-космічна техніка і технології: Зб. наук. праць. – Х.: ХАІ, 2001. – Вип. 23. Теплові двигуни та енергоустановки. – С. 163-166.

Поступила в редакцию 31.05.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.А. Дмитриев, Национальный авиационный университете, Киев.