

УДК 539.3

В.І. КРАВЦОВ, О.М. НЕДБАЙЛО, С.В. ДУБОВЕНКО*Херсонський національний технічний університет, Україна***ПРОСТОРОВЕ ДЕФОРМУВАННЯ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ**

Наведено метод числового розв'язку задачі нелінійного деформування гнучкого елемента, що обертається як жорстко закріплений одним кінцем. Розв'язок здійснено спільним методом продовження за параметром і методом Ньютона-Канторовича. Описано способи задавання крайових умов. Приведено результати розв'язань у вигляді комп'ютерної графіки.

гнучкий елемент, просторове нелінійне деформування, напружено-деформований стан, квазістатичне навантаження, змінна жорсткість, комп'ютерна графіка

Вступ

Двигуни різного призначення та принципу дії завжди мають обертові частини, які постійно удосконалюються з метою підвищення їх технологічності, надійності або економічності. Одним з напрямків їх удосконалення є перехід в деяких випадках до виготовлення деталей частин, що обертаються, з урахуванням їх роботи з великим нелінійним переміщенням в пружній стадії.

Формулювання проблеми. Для оптимізації механічних властивостей, а також змісту матеріалу, з якого виготовлена обертаюча частина, підвищення її технологічних якостей часто застосовуються елементи змінної жорсткості, деформування яких може відбуватися як у площині, так і у просторі. Їх можна розглядати як гнучкий стержень зі змінною або ступінчастою по довжині жорсткістю, що закріплений одним кінцем, а другий – вільний. Гнучкі системи являють собою конструкції з ускладненою геометричною структурою. Складні і важкі режими їх експлуатації пов'язані, як правило, з необхідністю спеціального вивчення і визначення діючих на них сил, урахування сильної нелінійності розв'язувальних рівнянь. Розв'язання таких задач виявляється можливим тільки сучасними методами нелінійного аналізу, застосування яких спонукає до вибору модифікації розв'язувальних рівнянь, що за-

безпечують алгоритмічність і ефективність підходів, що використовуються.

Основні диференціальні рівняння, що визначають пружну рівновагу стержня, були отримані Г. Кірхгофом [1], який виходячи із загальних рівнянь теорії пружності дав в диференціальній формі теорію вигину і крутіння тонких стержнів і встановив кінематичну аналогію між вигином тонкого стержня силами і моментами, прикладеними до його кінців, і рухом твердого тіла навколо нерухомої точки. Повний аналіз деформації стержня, коли переміщення точок осі стержня паралельні одній площині, показані в монографії Є.П. Попова [2]. Йому вдалося створити досить простий в математичному відношенні метод, що дозволяє розв'язувати велике число вельми різноманітних задач аналітичним і графоаналітичними методами. У останні десятиріччя найбільш повні і глибокі результати з проблеми, що розглядається, отримано В.О. Светліцким [3]. Інтерес, що зріс останнім часом до дослідження гнучких пружних стержнів, спричинив появу ряду публікацій зарубіжних авторів. У [4] розвинена теорія нелінійного деформування природно викривлених і закручених стержнів, заснована на введенні вектора кінцевих кутів повороту. Аналізуючи огляд досліджень, можна зробити висновок, що до теперішнього часу не розроблено досить універсальних і

алгоритмічних методів розрахунку механіки гнучких елементів, враховуючих весь вектор силових і деформаційних факторів, впливаючих на їх роботу. У більшості робіт, як правило, застосовуються допущення, що обмежують їх використання на практиці, і тим більше в реальному режимі часу.

Рішення проблеми

У цій статті дослідження задачі напружено-деформованого стану гнучких елементів продовжені в напрямі вибору найбільш зручної математичної моделі і розвитку методів побудови розв'язання розв'язувальних рівнянь з метою алгоритмізації обчислень і адаптованості їх до сучасних ПЕОМ.

Як базова розрахункова модель для дослідження гнучких елементів в даній роботі пропонується теорія гнучких просторово викривлених стержнів. Розвиток цієї моделі в плані застосування сучасних обчислювальних алгоритмів дозволяє створити уніфіковані методи дослідження гнучких конструкцій будь-якого призначення, що дозволяють враховувати необмеженість просторового пружного деформування гнучкого елемента, фізико-геометричні параметри елементів з довільними значеннями згинальної і крутильної жорсткості, дію довільних статичних, квазістатичних або динамічних навантажень, як бажано розташованих в просторі по довжині елемента.

Система рівнянь, що описує геометрію та силові співвідношення у гнучкому елементі складає повну систему диференціальних рівнянь п'ятнадцятого порядку [5]. У загальному випадку нелінійна крайова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь записується у вигляді нелінійної вектор-функції. У найпростіших випадках граничні умови можуть бути сформульовані окремо в граничних точках і крайова задача зводиться до задачі Коши. Для числового дослідження процесу деформування гнучких елементів запропонований метод, не пов'язаний попереднім пониженням порядку

розв'язальної системи рівнянь і заснований на спільному застосуванні методу продовження по параметру розв'язань нелінійних диференціальних рівнянь і методу Ньютона–Канторовича. Його відмінною особливістю є те, що розв'язання послідовності лінеаризованих крайових задач при кроковому збільшенні параметра навантаження будується без попередньої лінеаризації початкових нелінійних диференціальних рівнянь.

Ліві частини отриманої системи рівнянь являють собою похідні від шуканих змінних, що визначають напружено-деформований стан. Ці рівняння придатні тільки на тих ділянках інтервалу $0 \leq s \leq S$, на яких ці похідні існують (s – довжина частини кривої). Якщо деякі з функцій, що розглядаються, є кусково-неперервними, то область $0 \leq s \leq S$ потрібно розбити точками зламу і розриву на підобласті, в яких розв'язок володіє необхідною гладкістю. При цьому від двоточнової крайової задачі здійснюється перехід до багатоточнової з відповідними граничними умовами розривів. Розглянемо гнучкий елемент, осьова лінія якого лежить в площини xOy (рис. 1), а кінець $s = 0$ суміщений з початком системи координат $Oxyz$.

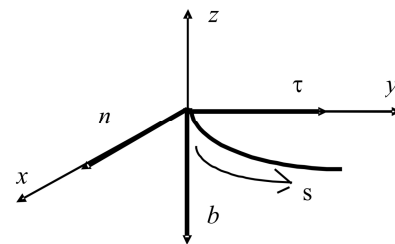


Рис. 1. Орієнтація осьової лінії елемента

Нехай на цьому кінці гнучкий елемент жорстко закріплений. Тоді при $s = 0$ маємо

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0. \quad (1)$$

Оскільки поворот елемента при затисненні виключений, то при його вигині орієнтація орта τ не змінюється і

$$\tau_x = 0; \quad \tau_z = 0. \quad (2)$$

Напрямок орта n визначається положенням дотичної площини, в якій лежить елемент, що розглядається. Оскільки із зміною кривизни в процесі деформування просторово викривленого елемента дотична площина в загальному випадку повертається, орт n в точці $s = 0$ повернеться на кут χ , в той час як осі u і v збережуть свої напрями незмінними. Тому можна записати

$$n_z = -\sin\chi = -\sin \arctg p/q = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad (3)$$

де p і q – кривизни відповідних площин.

За допомогою рівності (3) сформуємо також рівняння:

$$\tau_y = 1, \quad n_x - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} = 0, \quad n_y = 0. \quad (4)$$

Співвідношення (1) – (4) складають систему де-в'яти крайових рівнянь на затиснутому кінці. Однак лише шість рівнянь є незалежними і можуть застосовуватися при постановці крайової задачі, оскільки ці рівняння витікають з перших інтегралів і тому є допоміжними.

Якщо край $s = 0$ вільний від зовнішніх сил, то крайові умови мають вигляд $F_u = 0$, $F_v = 0$, $F_w = 0$, $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, де F_u , F_v , F_w – подовжні зусилля відповідно своїх осей, p_0 , q_0 , r_0 – кривизни в недеформованому стані.

У випадку, коли до вільного краю прикладена зберігаюча в просторі напрям зовнішня сила P з компонентами P_x , P_y , P_z , за допомогою відповідних матриць переходу складальні F_u , F_v , F_w потрібно виразити через P_x , P_y , P_z і граничні умови записати у вигляді:

$$\begin{aligned} F_u &= (P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z) q / \sqrt{p^2 + q^2} + \\ &+ (P_x b_x + P_y b_y + P_z b_z) p / \sqrt{p^2 + q^2}; \\ F_v &= -(P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z) \times \\ &\times p / \sqrt{p^2 + q^2} + (P_x b_x + P_y b_y + P_z b_z) q / \sqrt{p^2 + q^2}; \\ F_w &= P_x \tau_x + P_y \tau_y + P_z \tau_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Комбінацією рівнянь (1) – (5) можна описати і інші, не охоплені вище, умови опирання країв гнучкого елемента. Потрібно зазначити, що при нелінійній постановці задачі граничні рівняння в загальному випадку виявляються нелінійними. Тут потрібно підкреслити, що проста підстановка і заміна граничних умов ще не забезпечує автоматичний перехід від однієї задачі до іншої; в кожному новому випадку з'являються свої особливості розв'язків (задавання навантажень, величина кроку інтегрування, кількість кроків тощо).

Розглянемо способи задавання змінної жорсткості для числового розрахунку, вказаному в [1]. A , B , C – жорсткості при вигині і крутінні. Для обчислення A , B , C використовуються рівності: $A = EI_u$, $B = EI_v$, $C = Gi_p$, де E – модуль пружності матеріалу, G – модуль зсуву, I_u , I_v – моменти інерції площі поперечного перерізу відносно осей u , v рухомого тригранника u , v , w , що описує просторове деформування елемента кривої; I_p – полярний момент інерції. Нехай довжина елемента рівна S . Тоді можна розглядати два варіанти задавання змінної жорсткості: 1) ступінчасто змінювана жорсткість на інтервалах $0 \leq s \leq s_1$, $s \leq s_1 \leq s_2$, $s_1 \leq s_2 \leq s_3$, $s_{n-1} \leq s_n \leq s_{n+1}$ (наприклад, $A_1 = 2A_3$, $A_3 = 3A_4$, $A_n = k_i A_{n-1}$, де k – коефіцієнт змінювання значення поточної жорсткості у відношенні до попередньої, причому $A = B = 1,2C$); 2) функціонально (безперервно або кусково) змінювані жорсткості на інтервалі $0 \leq s \leq S$ або на будь-якому іншому інтервалі інтегрування (будь-яка лінійна лінійна або нелінійна функція), тобто $A = f(s)$, $B = f(s)$, $C = f(s)$. Для першого випадку підстановка необхідних значень жорсткості на ділянці інтегрування реалізовується програмними методами і числовий розв'язок особливих ускладнень не викликає. Нехай елемент по всій довжині змінюється таким чином, що $A_1 = 0,1A_2$; $A_3 = A_1$; $A_4 = 0,1A_3$ і т.д. У рамках методики, що використовується авторами, результат чи-

слового розрахунку при такому навантаженні показано на рис. 2. Тут зображено просторове деформування елементу ступінчатої жорсткості при навантаженні рівномірно розподіленим навантаженням покровою через деякий дискретний проміжок.

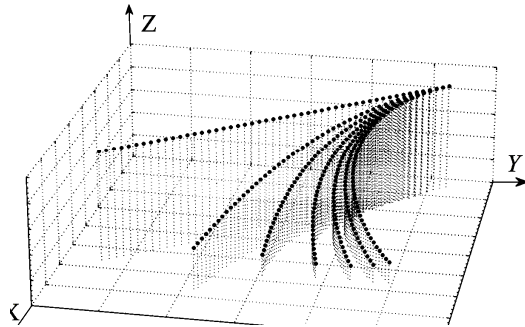


Рис. 2. Просторове деформування жорстко закріпленого елемента змінної жорсткості

На рис. 3 зображені внутрішні зусилля по всій довжині елемента на кожному кроці навантаження у безрозмірних величинах.

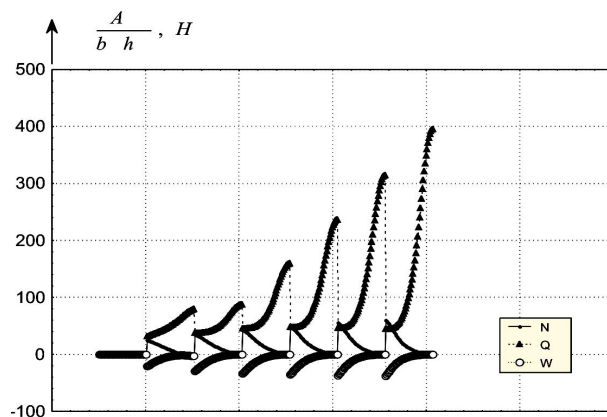


Рис. 3. Внутрішні зусилля за довжиною елемента по мірі навантаження

Характер кривих підкреслює значну нелінійність процесу деформування. Розподілене навантаження виникає за рахунок сил інерції при обертанні елементу, тому його можна вважати квазістатичним.

Висновки

Описана методика реалізована у вигляді комплексу програм для ЕОМ. Для інтегрування рівнянь стану використовується метод Рунге-Кутта четвертого порядку. За даною методикою можливе визначення напружено-деформованого стану, стійкості та закритичної поведінки гнучкого елемента будь якої просторової геометрії подовжньої осі при довільному векторі навантажень. При цьому можливо визначення характеристик напружено-деформованого стану у реальному часі у будь-якому числовому або графічному вигляді. Розвиток цих методів дозволить значно зменшити час для проектування нових елементів обертаючих частин двигунів, а також підвищити їх надійність та довговічність.

Література

1. Кирхгоф Г. Механика. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 402 с.
2. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. – М.: ОГИЗ, 1948. – 178 с.
3. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. для вузов. В 2-х ч. – М.: Высш. шк., 1987. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 304 с.
4. Antman S.S. Kirchhoff's problem for non-linear elastic rods // Quarterly of Applied Mathematics. – 1974. – Vol. 32, № 3. – P. 221-240.
5. Кравцов В.И. Механика гибких лубоково-дных систем. – К.: Наук. думка, 1997. – 237 с.

Надійшла до редакції 2.06.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.В. Шарко, Херсонський національний технічний університет, Херсон.