

УДК 629.7.028.6

В.С. ЛЕВШАНОВ, В.В. КИРЮШИНА, М.Ю. РУСИН*Обнинское научно-производственное предприятие «Технология», Россия*

ОЦЕНКА ДОПУСТИМОЙ ПРОЧНОСТИ И ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ КЕРАМИЧЕСКИХ ОБТЕКАТЕЛЕЙ

Описаны методы оценки допустимой прочности и прочностной надежности антенных обтекателей из стеклокерамики ОТМ 357. Показано, что на этапе эскизного проекта для нахождения предварительных оценок может применяться метод, основанный на использовании нормального распределения предела прочности материала и максимальных эксплуатационных нагрузок на обтекатель. Однако оценки, полученные этим методом, оказываются несколько завышенными по сравнению с оценками на основе результатов натурных статических испытаний обтекателей. Для более достоверного расчета проектной надежности необходимо использование модели, позволяющей установить взаимосвязь между вероятностью разрушения при различных уровнях напряжения с напряженным состоянием конструкции и нагруженным максимальными напряжениями объемом. Наиболее полно этим требованиям отвечает модель наислабейшего звена Вейбулла.

обтекатель, прочностная надежность, коэффициент запаса прочности, нормальное распределение, теория хрупкого разрушения, модель Вейбулла

Введение

Оценка допустимой прочности материала оболочки обтекателя тесно связана с оценкой его прочностной надежности, как одной из составляющих полной надежности конструкции. Количественно прочностная надежность определяется как вероятность непревышения напряжениями, возникающими в обтекателе за счет действующих во время эксплуатации внешних нагрузок, его несущей способности, т.е. вероятность ненаступления предельного состояния по прочности.

Исходными данными для расчета прочностной надежности являются статистические данные по прочностным характеристикам конструкционного материала оболочки и внешним нагрузкам, действующим на конструкцию.

Условие сохранения прочности записывается как $L \leq R$, где L – нагрузка, действующая на конструкцию, R – несущая способность. Это условие можно использовать в виде $L_n \leq \frac{R_n}{\eta}$, где L_n и R_n – соответственно расчетные (нормативные) нагрузка и несущая способность, η – коэффициент запаса проч-

ности. Расчетные значения нагрузки и несущей способности, являясь детерминированными величинами по сравнению с реальными, имеющими случайный характер, играют роль некоторых средних или вероятных значений.

Выбор той или иной пары параметров в качестве R и L достаточно произволен, например, ими могут быть разрушающее и действующее давления, предел прочности материала конструкции и действующее напряжение в элементе конструкции и т.д. В строительной механике летательных аппаратов в качестве несущей способности используют допустимое напряжение $[\sigma]$, а в качестве нагрузки – эквивалентное напряжение [1].

Для хрупких материалов по критерию наибольших нормальных напряжений вероятность неразрушения, или прочностная надежность определяется следующим образом:

$$P_M = P(R > L) = P\{(R - L) > 0\} = P\{([\sigma] - \sigma_{\max}) > 0\},$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальное из трех главных напряжений.

Без упрощающих предположений задача расчета надежности может быть решена исключительно

только на основе статистического моделирования стохастического напряженно-деформированного состояния конструкции, что из-за громоздкости и сложности модели неприемлемо для инженерной практики.

Одно из упрощений заключается в том, что рассматривается состояние изделия лишь в наиболее опасном сечении и в расчетном случае, представляющем собой фиксированный момент времени, в который нагружение наиболее опасно, т.е. задача решается в квазистатической постановке.

В этом случае достаточно знать закон распределения параметра состояния или его математическое ожидание и дисперсию.

При проектировании, когда обтекателя еще физически не существует, в качестве математических ожиданий нагрузок принимают их номинальные значения, а дисперсии определяют, исходя из на-

значенных допусков. При этом для оценки надежности берут те же расчетные случаи, которые использованы в детерминированных прочностных расчетах.

Учет статистических изменений напряжений и прочности позволяет обеспечить выбор материала, минимизирующий вероятность разрушения, или для конкретного материала оценить уровень допустимых нагрузок, гарантирующих заданную надежность изделия.

В зависимости от выбора параметра состояния в виде разности $Z = R - L$, либо в виде коэффициента запаса $\eta = R / L$, вероятность неразрушения вычисляется

$$P_M = P(Z > 0) = \int_0^{\infty} p(z) dz = P(\eta > 1) = \int_1^{\infty} p(\eta) d\eta,$$

где $p(z)$ и $p(\eta)$ – соответствующие плотности вероятности (рис. 1).

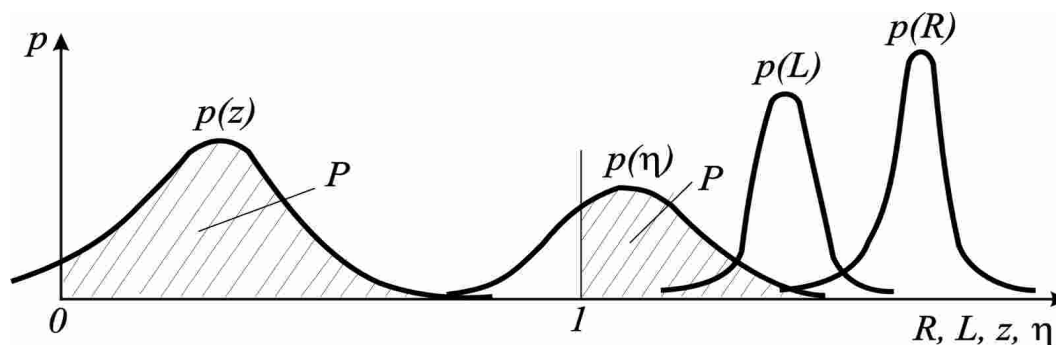


Рис. 1. Надежность P и плотности распределения нагрузки, несущей способности и параметров состояния Z и η

В случае разностного параметра состояния Z и нормального распределения нагрузки и несущей способности вероятность неразрушения вычисляется по выражению

$$P_M = P(Z > 0) = \Phi \left(\frac{m_R - m_L}{\sqrt{s_R^2 + s_L^2 - 2r_{RL}s_Rs_L}} \right), \quad (1)$$

где m_R , s_R^2 и m_L , s_L^2 – математические ожидания и дисперсии соответственно несущей способности и нагрузки; r_{RL} – коэффициент корреляции этих величин; $\Phi()$ – функция Лапласа.

При использовании безразмерной величины η в качестве параметра состояния и некоррелированности нагрузки и несущей способности вероятность неразрушения можно рассчитать как

$$P_M = P(\eta > 1) = \Phi \left(\frac{\bar{\eta} - 1}{\sqrt{\bar{\eta}^2 v_R^2 + v_L^2}} \right), \quad (2)$$

где $\bar{\eta} = m_R / m_L$ – средний коэффициент запаса; $v_R = s_R / m_R$ и $v_L = s_L / m_L$ – коэффициенты вариации несущей способности и нагрузки соответственно.

Построенная по формуле (2) зависимость вероятности безотказной работы от коэффициента запаса прочности (рис. 2) для нормального закона распределения нагрузки и несущей способности, показывает, что при вариации последних, например, большей 20%, для достижения вероятности $P_M > 0,99$ необходим коэффициент запаса $\bar{\eta} > 2$.

На стадии проектных работ при разработке конструкции оценка максимального напряжения σ_{max} находится расчетом напряженно-деформированного состояния обтекателя, при этом величина его детерминирована алгоритмом расчета. Для оценки же прочностной надежности необходимы статистические характеристики σ_{max} , которые можно найти,

используя, например, метод статистических испытаний.

Имея из паспортных данных на материал величину среднего значения прочности m_R и ее среднеквадратического отклонения s_R в качестве параметров несущей способности, а в качестве параметров нагрузки – полученные методом статистических испытаний значения m_L и s_L , по уравнениям (1) или (2) можно получить предварительную оценку прочностной надежности оболочки на стадии эскизного проекта.

С использованием этих же уравнений можно оценить величину допустимой прочности материала оболочки для заданной вероятности неразрушения.

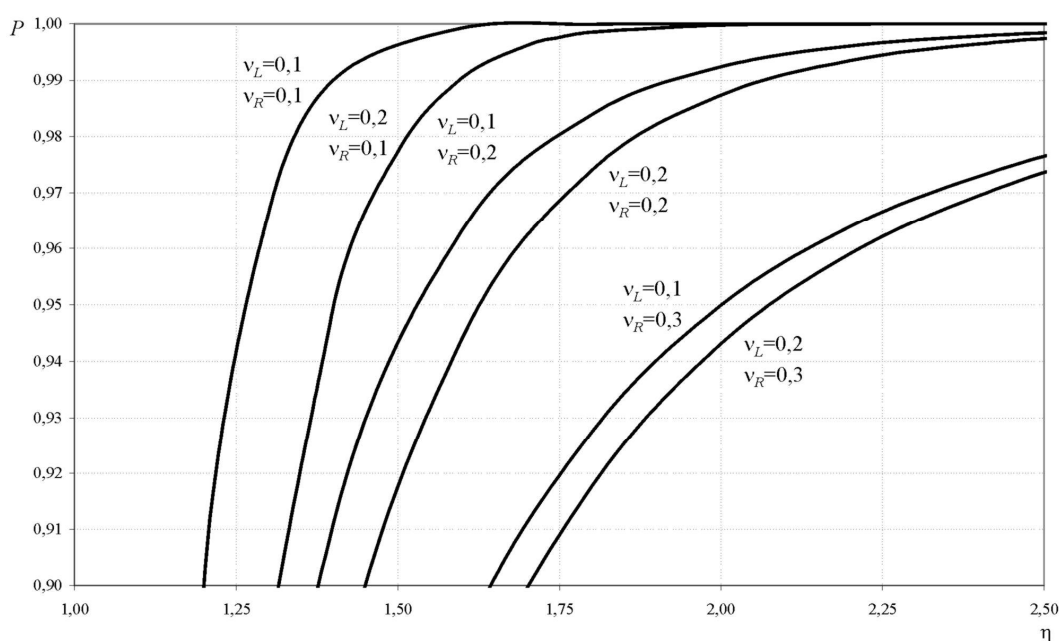


Рис. 2. Зависимость прочностной надежности P_M от коэффициента запаса η для различных коэффициентов вариации нагрузки v_L и несущей способности v_R

В этом случае уравнение (1) будет выглядеть как

$$P_M = P(\sigma_{max} < [\sigma]) = \Phi\left(\frac{[\sigma] - m_L}{s_L}\right). \quad (3)$$

Задаваясь вероятностью P_M , можно вычислить соответствующий этой вероятности квантиль $[\sigma]$ из распределения предела прочности материала.

Изложенный подход был применен для уточнения минимально допустимой прочности материала

ОТМ 357 и оценки прочностной надежности головного обтекателя из этого материала ракеты класса РВВ-АЕ.

Теплопрочностной расчёт обтекателя проводился на основе модели напряженно-деформированного состояния замкнутых оболочек вращения, соединенных внахлестку, под действием произвольной нагрузки и нагрева с учётом поперечного сдвига.

Методом статистических испытаний случайное варьирование силовых и температурных нагрузок проводили в диапазонах $\pm 20\%$ от номинальных, при числе реализаций равным 100. Полученное в результате такой серии расчетов, проведенных аналогично работе [2], распределение максимальных растягивающих напряжений σ_{max} , возникающих в материале и направленных по меридиану оболочки, описывается функцией нормального распределения с параметрами $m_L = 2,2$ кгс/мм² и $s_L = 0,27$ кгс/мм² (коэффициент вариации $v_L = 0,12$). На основании ранее проведенных испытаний на растяжение образцов материала ОТМ 357 были получены параметры нормального распределения прочности, равные $m_R = 6,8$ кгс/мм² и $s_R = 1,4$ кгс/мм² (коэффициент вариации $v_R = 0,21$). Отсюда среднее значение коэффициента запаса прочности равно 3,1, а прочностная надежность, определенная по уравнению (2), $P_M = 0,99962$.

Для найденных параметров нагрузок оценка по уравнению (3) допустимой прочности материала при растяжении, обеспечивающей заданную в ТЗ величину надежности $P_T = 0,99$, составила $[\sigma] = 3,1$ кгс/мм². Возможности технологического процесса обеспечивают получение материала с прочностью, не ниже допустимой с вероятностью $P(\sigma > [\sigma]) = 0,996$.

При статических механических испытаниях обтекателей на теплопрочностном стенде, когда нагрузка на обтекатель, создаваемая в виде изгибающего момента, последовательно увеличивается вплоть до наступления его разрушения, вероятность неразрушения также может быть оценена по уравнениям (1) или (2). Но при этом в качестве математического ожидания и дисперсии несущей способности выступают соответственно среднее значение разрушающего изгибающего момента M_p и его дисперсия $s_{M_p}^2$.

В качестве математического ожидания нагрузки используется величина заданного эксплуатационного изгибающего момента M_e , умноженная на коэф-

фициент безопасности f . В предположении, что нагрузка распределена по нормальному закону, а ее предельные отклонения укладываются в область, ограниченную коэффициентом безопасности, и равны трем среднеквадратическим отклонениям, дисперсия нагрузки составляет $s_e^2 = [M_e(f-1)/3]^2$.

Тогда прочностная составляющая эксплуатационной надежности обтекателя, или вероятность того, что заданная эксплуатационная нагрузка не превысит разрушающую, определяется как

$$P_M = P(M_p > M_e) = \Phi \left(\frac{M_p - fM_e}{\sqrt{s_{M_p}^2 + [M_e(f-1)/3]^2}} \right).$$

Для того же стеклокерамического обтекателя по результатам стендовых испытаний запас прочности оказался равным 2,4 и соответственно значение прочностной эксплуатационной надежности $P_M = 0,9913$.

Кроме вышеописанных методов оценки допустимой прочности на практике часто используют модель наислабейшего звена Вейбулла. Дело в том, что прочностная надежность обтекателей, изготовленных из керамических материалов, очень сильно зависит от дефектов микроструктуры керамики. Следствием этого является хрупкость, а соответственно, низкая трещиностойкость керамики. От концентрации и степени опасности дефектов структуры, а соответственно размеров образца, зависит хрупкая прочность керамического материала и ее значительный статистический разброс. Это приводит к снижению точности прогнозирования прочностных характеристик реальных изделий по результатам испытаний образцов материала, поскольку измеряемые значения прочности зависят от объема материала, находящегося под действием максимальных растягивающих напряжений, и от напряженно-деформированного состояния.

Согласно модели Вейбулла, предполагается, что прочность изделия определяется локальной прочностью его наиболее слабого элемента, т.е. процесс

разрушения материала отождествляется с разрушением цепи, звенья которой образуют элементы объема [3]. Прочность тела определяется местным, а не средним напряжением. В этом случае вероятность разрушения тела при напряжении равном или меньшем σ определяется как

$$P(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \int_V \frac{1}{V_0} \left[\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_c} \right]^m dV \right\},$$

где V_0 – единичный объем (например, объем стандартного образца); m , σ_0 , σ_c – параметры распределения. При этом m – параметр формы (модуль Вейбулла), являющийся количественной мерой рассеяния экспериментально измеряемых значений прочности и характеризующий однородность материала; σ_0 – параметр положения, представляющий собой нижнюю границу прочности (напряжение, при котором вероятность разрушения независимо от объема равна нулю); σ_c – параметр масштаба с размерностью напряжений (напряжение, при котором вероятность разрушения равна 0,63).

В случае нулевой минимальной прочности σ_0 и для единичного объема V_0 :

$$P(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -kV \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^m \right\}, \quad (4)$$

где σ – наибольшее главное напряжение в образце; k – коэффициент нагрузки.

Вероятность разрушения образца при трехточечном изгибе равна

$$P(\sigma) = 1 - \exp \left[- \frac{V}{2(m+1)^2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^m \right] = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma}{G} \right)^m \right\}, \quad (5)$$

где $G = \sigma_c \sqrt[m]{2(m+1)^2 / V}$. В параметре G таким образом учитываются свойства материала, объем изделия и вид нагружения.

Отсюда вытекает такой важный момент использования распределения Вейбулла для оценки проч-

ности реальных изделий, как учет масштабного фактора, дающий возможность экстраполировать значения прочности в зависимости от величины напряженного объема материала

$$\frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} = \left(\frac{V_{ef2}}{V_{ef1}} \right)^{1/m}, \quad (6)$$

где $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$, V_{ef1} и V_{ef2} – средние значения прочности при растяжении и эффективные объемы (произведение коэффициента нагрузки и объема) соответственно образца и изделия.

Кроме того, имеется соотношение между вероятностями разрушения P_1 и P_2 при заданном напряжении двух элементов с различными эффективными объемами

$$P_1 = 1 - (1 - P_2)^{V_{ef1}/V_{ef2}}. \quad (7)$$

Это уравнение относится к эффективным объемам и не зависит от распределения напряжения в каком-либо элементе. Задаваясь вероятностью разрушения образца P_1 и соотношением эффективных объемов керамического изделия и образца, можно найти вероятность разрушения изделия P_2 и по соотношению P – σ соответствующую этой вероятности величину напряжения. Эта величина напряжения будет соответствовать максимальному допустимому растягивающему напряжению для этого изделия.

В масштабных уравнениях (6) и (7) вместо эффективных объемов могут быть использованы эффективные площади поверхностей.

Прочность керамического материала обычно оценивается по среднему разрушающему напряжению для серии образцов, что соответствует уровню вероятности разрушения, равному 0,5. Очевидно, что при проектировании ошибочно было бы полагаться на такую большую вероятность разрушения. Поэтому, как вытекает из вышеприведенных формул, если допустимая вероятность разрушения меньше 0,5, то допустимое напряжение должно быть меньше среднего на величину, зависящую от модуля Вейбулла для данного материала.

Кроме этого, если эффективный размер изделия больше эффективного размера образца, то это также понизит допустимое напряжение (независимо от допустимой вероятности разрушения), причем степень понижения также зависит от модуля Вейбулла.

Для анализа функции распределения прочности стеклокерамического материала ОТМ 357 были использованы результаты определения предела прочности прямоугольных образцов размером $7 \times 7 \times 60$ мм методом трехточечного изгиба при расстоянии между опорами 50 мм. Полученные экспериментальные значения прочности были описаны распределением Вейбулла (5) с параметрами $m = 9,8$ и $\sigma_c = 13,8$ кгс/мм².

Исходя из полученных оценок этих параметров и среднего значения прочности материала ОТМ 357 при изгибе, равного $13,2$ кгс/мм², среднее значение прочности при растяжении образца такого же объема составляет величину

$$\bar{\sigma}_p = \bar{\sigma}_u [2(m+1)]^{-1/m} = 7,5 \text{ кгс/мм}^2.$$

При условии постоянства функции распределения, используя полученные оценки и учитывая, что отношение напряженных объемов конструкции обтекателя и образца не превышает величины 5×10^2 , по уравнению (6) получаем среднее значение прочности при растяжении в объеме керамической оболочки, равное $\sigma_f = 4,2$ кгс/мм².

При величине максимального напряжения, возникающего в керамическом материале оболочки, $\sigma_{\max} = 2,2$ кгс/мм² коэффициент запаса прочности составляет величину 1,9. Эта величина значительно отличается от рассчитанной, исходя из нормального распределения средней величины коэффициента запаса прочности, равной 3,1, но близка к полученной в результате статических механических испытаний натурных изделий, равной 2,4.

Используя модель (5), записанную в виде $P(\sigma) = 1 - \exp\left\{-\left(\sigma_{\max}/\sigma_f\right)^m\right\}$, получим значение

вероятности разрушения $P(\sigma) = 0,0058$ и, соответственно, величину прочностной надежности данной конструкции обтекателя $P_M = 0,9942$.

С помощью модели Вейбулла, учитывающей масштабный эффект и распределение напряжений в испытываемом образце, можно получить выражение для допустимой минимальной прочности керамической оболочки $[\sigma]$ при заданной вероятности ее разрушения P и с учетом эффективного объема, эквивалентного равномерному растяжению

$$[\sigma] = \frac{\bar{\sigma}}{\Gamma(1+1/m)} \left[\frac{V_{ef1}}{V_{ef2}} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{1-P}\right)}{2(m+1)^2} \right]^{1/m} \quad (8)$$

где $\Gamma(\)$ – гамма-функция; $\bar{\sigma}$ – среднее значение прочности, полученное на призматических образцах при трехточечном изгибе.

При $V_{ef1}/V_{ef2} \approx 0,002$ и вероятности разрушения 0,01 допустимая прочность при растяжении по уравнению (8) не должна быть меньше $3,1$ кгс/мм² (запас прочности 1,4).

Полученные различными методами оценки допустимой прочности материала ОТМ 357 и прочностной надежности обтекателя из этого материала приведены в табл. 1.

На основании проведенного исследования можно сформулировать следующие выводы и рекомендации.

1. Использование метода статистических испытаний при нормальном распределении нагрузки и несущей способности является вполне приемлемым на этапе эскизного проектирования для предварительной оценки коэффициента запаса прочности и прочностной надежности керамической оболочки. Недостатком является необходимость иметь для расчетов функцию распределения прочности керамического материала оболочки на растяжение, что не всегда выполнимо из-за трудоемкости этого вида испытаний. Кроме того, полученные оценки η и P_M оказываются завышенными.

2. Более приемлемым на этапе эскизного проектирования является применение модели хрупкого разрушения Вейбулла. Эта модель имеет преимущество в том, что позволяет учесть масштабный эффект при переходе от образца к изделию, а также

вид нагружения, т.е. по результатам испытаний на прочность при изгибе определить прочность при растяжении. Полученные по этой модели значения η и P_M достаточно близки к значениям, оцененным по результатам испытаний натурных изделий.

Таблица 1

Оценка прочностной надежности стеклокерамического обтекателя различными методами

Метод оценки	Испытания	Коэффициент запаса прочности η	Прочностная надежность P_M	Допустимая прочность $[\sigma]$ при вероятности разрушения 0,01, кгс/мм ²
Нормальное распределение несущей способности и нагрузки + метод статистических испытаний	Испытания образцов на растяжение	3,1	0,9996	3,1
Нормальное распределение несущей способности и нагрузки	Стендовые испытания изделий	2,4	0,9913	—
Модель наислабейшего звена Вейбулла	Испытания образцов на трехточечный изгиб	1,9	0,9942	3,1

3. Очевидно, что наиболее близкими к истинным значениям являются оценки коэффициента запаса прочности и показателя надежности, полученные по результатам механических испытаний натурных изделий на теплопрочностном стенде. Однако данный способ оценки можно использовать лишь в качестве подтверждения ранее полученных расчетных значений, так как оценки основаны на малых выборках разрушенных изделий и отсутствует возможность оценить допустимую прочность материала.

4. Рекомендуется на стадии эскизного проекта оценку прочностной надежности проводить по модели хрупкого разрушения Вейбулла, на стадии ПСИ – по методике, основанной на нормальном законе распределения нагрузки и несущей способности в виде изгибающего момента.

5. Допустимую прочность $[\sigma]$ при растяжении для заданной вероятности разрушения рекомендуется

оценивать по уравнению (8), вытекающему из распределения Вейбулла.

Литература

1. Балабух Л.И. и др. Основы строительной механики ракет. – М.: Высш. шк., 1969. – 496 с.
2. Левшанов В.С., Кирюшина В.В., Русин М.Ю. Оценка проектной надежности антенных обтекателей летательных аппаратов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 3 (11). – С. 5-10.
3. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. – М.: Стройиздат, 1965. – 279 с.

Поступила в редакцию 27.03.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Е. Гайдачук, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.