

УДК 539.3

Л.А. Фильштинский, Т.А. Киричек*Сумской государственный университет, Украина***ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСЧЁТОВ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ
В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ**

Рассмотрены две модели неклассической теплопроводности (гиперболическая и модель с двухфазным запаздыванием), справедливые в условиях высокоскоростных процессов. Исследовано влияние интенсивного нагрева и короткого импульса на тепловые поля в слое с отверстием. Приведены конкретные примеры.

теплопроводность, тепловое поле, силовая конструкция, короткий импульс**Введение**

В связи с быстрым развитием новой техники всё большее значение в инженерных проработках приобретают вопросы нестационарного теплообмена. Правильно организованный теплообмен является непременным условием безопасной и безаварийной работы разнообразного теплового оборудования. Проблема изучения закономерностей развития пространственных нестационарных температурных полей в телах различной геометрической формы тесно связана с решением параболического дифференциального уравнения с разнообразными краевыми условиями. Однако классическая теория теплопереноса Фурье опирается на приближения локального термодинамического равновесия. Такое равновесие может установиться в системе, если скорость изменения её микропараметров за счёт внешних воздействий, т.е. скорость разрушения равновесия, много меньше скорости восстановления равновесия. Приближение локального термодинамического равновесия справедливо для моментов времени, значительно превышающих характерное время релаксации системы к локальному равновесию. При высокоскоростных процессах классическая локально-равновесная теория процессов переноса становится несправед-

ливой и следует пользоваться локально-неравновесными методами описания таких систем. Интенсификация технологических процессов, использование материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), широкое распространение лазерной техники, возможность достижения сверхвысоких и сверхнизких температур и давлений объясняют с практической точки зрения интерес к системам в локально-неравновесных условиях [1].

В настоящей работе будут рассмотрены две неклассические модели теплопроводности — гиперболическая модель и модель с двухфазным запаздыванием, которые можно отнести к локально-неравновесным моделям с памятью. На основе уравнения теплопроводности гиперболического типа будет проведён анализ общих свойств тепловых волн, возникающих в твёрдом теле при действии высокочастотного гармонического и импульсного лазерного нагрева.

1. Параболическое и гиперболическое уравнения теплопроводности

Уравнение теплопроводности Фурье [2] базируется на гипотезе о прямой пропорциональности вектора теплового потока градиенту температуры и неявно содержит допущение о бесконечной скорости распространения термических возмущений. На основе феноменологической теории термодинамики необратимых процессов получена более сложная зависимость между тепловым потоком и градиентом температуры [1]:

$$q + \tau^* \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda_T \text{grad } T. \quad (1)$$

Закон Каттанео-Вернотта (1), связывающий между собой тепловой поток и градиент температуры в среде с тепловой релаксацией, обобщает классический закон Фурье $q = -\lambda_T \text{grad } T$, справедливый в предположении локального равновесия, т.е. $\tau^* = 0$. Физический смысл заключается в том, что процесс теплопереноса в локально-неравновесных средах обладает инерционными свойствами: система реагирует на тепловое воздействие (или тепловой поток откликается на изменение градиента температуры) не в тот же момент времени t , как в классическом локально-равновесном случае, а на время релаксации τ^* позже:

$$q(t + \tau^*) = -\lambda_T \nabla T(t). \quad (2)$$

Разложив левую часть (2) в ряд Тейлора по степеням τ^* , в нулевом приближении получим классический закон Фурье, а в первом – закон Каттанео-Вернотта.

Из закона сохранения энергии и соотношения (1) следует уравнение теплопереноса «телеграфного типа»

$$\lambda_T \Delta T - c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau^* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = - \left(f + \tau^* \frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Оно сочетает в себе свойства волнового уравнения, описывающего распространение незатухающих волн со скоростью $V_T = (\lambda_T / c\rho\tau^*)^{1/2}$, и диффузионного уравнения, соответствующего диссипативному способу передачи энергии.

2. Уравнение с двухфазным запаздыванием

Пытаясь получить более устойчивую модель, исследователи предложили следующее:

$$q(r, t + \tau_q) = -\lambda_T \nabla T(r, t + \tau_T), \quad (4)$$

где τ_q и τ_T — два несвязанных времени запаздывания. Антаки [3] применил линеаризованную и усечённую форму

$$q + \tau_q \partial_t q = -\lambda_T \nabla T - \tau_T \lambda_T \partial_t \nabla T, \quad (5)$$

и объединил её с уравнением энергии для получения следующего соотношения:

$$\frac{1}{a^2} \partial_t T + \frac{\tau_q}{a^2} \partial_t^2 T = \nabla^2 T + \tau_T \partial_t \nabla^2 T, \quad a^2 = \lambda_T / c\rho. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется уравнением с двухфазным запаздыванием, так как оно основано на том, что тепловой поток зависит от двух времён запаздывания. Уравнение с двухфазным запаздыванием сводится к неклассической модели Каттанео-Вернотта (1), если положить $\tau_T = 0$, и сводится к уравнению теплопроводности Фурье, если положить $\tau_q = \tau_T = 0$.

По сравнению с гиперболическим уравнением теплопроводности (3),

уравнение с двухфазным запаздыванием (6) содержит дополнительный член со смешанной производной. Здесь также, как в гиперболической модели, время запаздывания связано с тепловым потоком по причине волнового поведения. Однако член со смешанной производной приводит к сильному ослаблению острого волнового фронта, редуцируя уравнение к параболическому, а это означает, что температурные возмущения в среде будут распространяться с бесконечной скоростью, как в уравнении теплопроводности Фурье [3]. Температура в гиперболической и двухфазной модели чувствительна к температурной интенсивности. Хотя, из-за сильной диссипации, обусловленной смешанными производными, степень возможного температурного скачка в двухфазной модели, вызванного начальными изменениями температуры, не так велика, как в гиперболической модели [1]. Таким образом, даже если уравнение с двухфазным запаздыванием (6) физически невыполнимо из-за его параболической природы, оно всё же может быть лучше аппроксимировано, чем гиперболическая модель (3) в инженерных целях из-за физически реалистичной диссипации, которая появляется благодаря смешанной производной.

3. Периодические во времени решения гиперболического уравнения теплопроводности для слоя с полостью

В качестве примера рассмотрим изотропный (в смысле теплофизических свойств) слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, содержащий сквозную туннельную полость. Предполагаем, что контур поперечного сечения Γ – простая замкнутая достаточно гладкая кривая. Задача состоит в интегрировании уравнения

$$\Delta T - \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

при выполнении граничных условий на поверхности полости

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\sigma} = -\frac{1}{\lambda_T} \left(q(\xi, t) + \tau^* \frac{\partial q(\xi, t)}{\partial t} \right), \quad t > 0, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, x_3) \in \sigma, \quad (8)$$

граничных условий на основаниях слоя

$$T|_{x_3=\pm h} = 0, \quad (9)$$

начальных условий

$$T|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

и условия на бесконечности

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} T(x, t) = 0. \quad (11)$$

В соотношениях (7) – (11) функция $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$ – распределение температуры; τ^* – время релаксации теплового потока; $V_T = \sqrt{a^2/\tau^*}$ – скорость распространения термической волны; $a^2 = \lambda_T / c\rho$ – коэффициент температуропроводности; ρ , λ_T – плотность материала и коэффициент его теплопроводности; q – заданная поверхностная плотность теплового потока, действующего на поверхности σ ; Δ – оператор Лапласа в R^3 .

Предполагая гармоническое изменение температуры и потока во времени, положим:

$$T = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} U), \quad U = U(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3); \quad (12)$$

$$q = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} Q), \quad Q = Q(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, x_3) \in \sigma. \quad (13)$$

Тогда после исключения времени t граничная задача (7) – (9) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \left(\nabla^2 + i \frac{\omega}{a^2} + \frac{\omega}{V_T^2} \right) U = 0; \quad (14)$$

$$U|_{x_3=\pm h} = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{\sigma} = -\frac{Q(\xi)}{\lambda_T} (1 - i\omega\tau^*). \quad (16)$$

Симметричное относительно серединой плоскости решение однородной задачи (14), (15) определяется равенством [4]:

$$U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(x_1, x_2) \cos \mu_j x_3, \quad \mu_j = \frac{2j+1}{2h} \pi, \quad (17)$$

в котором содержится полная система метегармонических функций $U_j(x_1, x_2)$, удовлетворяющих уравнению

$$\left(\nabla^2 + v_j^2\right)U_j = 0, \quad v_j^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2} + i\frac{\omega}{a^2} - \mu_j^2. \quad (18)$$

Справедливо представление U_j в виде обобщённого потенциала простого слоя

$$U_j = \int_{\Gamma} g_j(\zeta) H_0^{(1)}(v_j r) dS, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (19)$$

где Γ – контур поперечного сечения цилиндрической поверхности σ , $g_j(\zeta)$ – функции, подлежащие определению на Γ , dS – элемент дуги контура Γ .

Подстановка предельных значений нормальной производной функции (19) в граничное условие (16) приводит к системе регулярных интегральных уравнений второго рода

$$\begin{aligned} g_j(\zeta_0) + \frac{v_j}{2i} \int_{\Gamma} g_j(\zeta) \cos(\alpha_0 - \psi_0) H_1^{(1)}(v_j r) dS = \\ = \frac{2iQ_j(\zeta_0)}{\omega\tau^* + i}, \quad (j = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (20)$$

где Q_j – известные коэффициенты Фурье функции Q , ψ_0 – угол между нормалью к контуру Γ в точке ζ_0 и осью Ox_1 , $\zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$.

Таким образом, температурное поле в слое полностью определяется интегральными уравнениями (20) и представлениями (12), (17).

4. Влияние теплового импульса на температурные поля в слое с полостью

Используя описанную ранее методику, можно получить решение нестационарной задачи теплопроводности в слое при условии, что на поверхности полости действует тепловой поток в виде прямоугольного импульса [5]:

$$q_n|_{\sigma} = q(\xi) \cdot (\eta(t) - \eta(t - t_0)), \quad \xi \in \sigma, \quad (21)$$

где t_0 – длина импульса, $\eta(t)$ – функция Хевисайда.

В этом случае искомая температурная функция определяется с помощью преобразования Лапласа при однородных начальных условиях (10).

5. Результаты расчетов и их обсуждение

В качестве первого примера рассмотрим гармоническое возбуждение слоя с туннельной полостью эллиптического поперечного сечения $\left(\Gamma : \zeta = R \cos \gamma + \frac{R}{2} i \sin \gamma \right)$. К поверхности отверстия осуществляется подвод тепла по параболическому закону

$$Q(\xi) = P \left(1 - \frac{x_3^2}{h^2} \right), \quad P = \text{const}.$$

На рис. 1, 2 представлено распределение относительной величины $\delta = \frac{\lambda_T}{h} \left| \frac{U}{P} \right|$ по контуру сечения слоя его срединной плоскостью для случая, когда $\tau^* = 10^{-5}$ с (пунктирная линия) и без учёта релаксации (сплошная линия). В приведённых вариантах расчётов задавались следующие параметры: $R/h = 0,01$; $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ (рис. 1); $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ (рис. 2).

Во втором примере рассматривается импульсный тепловой нагрев поверхности полости. Пространственное изменение поверхностной плотности теплового потока задавалось функцией

$$q(\xi) = P \left(1 - \frac{x_3^2}{h^2} \right).$$

Интегральные уравнения (20) решались численно с последующим обращением преобразования Лапласа [6].

На рис. 3 изображена зависимость безразмерной температуры $\delta = \frac{\lambda_T T}{h|P|}$ от времени в различных точках слоя $(\rho_0 + R, 0, 0)$ при следующих значениях параметров: $R/h = 0,01$; $q_0 = 1$; $\tau^* = 10^{-5}$ с, $P = 105 \text{ Вт/м}^2$. Длина импульса $t_0 = 10^{-5}$ с. На рис. 4 приведено сравнение решений параболической и гиперболической модели для случая, когда характерное время импульсного процесса несоизмеримо со временем релаксации ($t_0 = 1 \text{ мс}$).

Термодинамические характеристики материала (полистирола) взяты из [7]: $c = 1,08 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$, $\rho = 1,07 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\lambda_T = 0,16 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$.

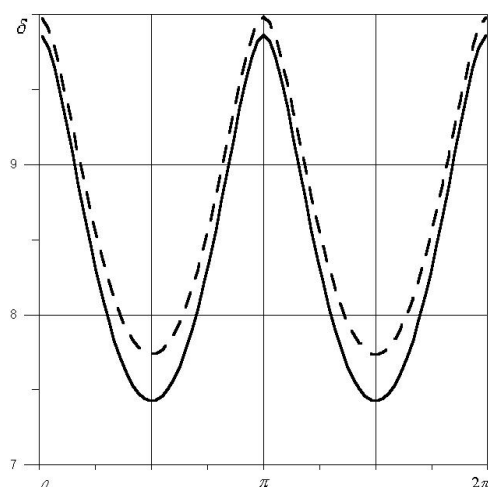


Рис. 1. Распределение относительной величины δ по контуру Γ при $\omega = 10^4 \text{ c}^{-1}$

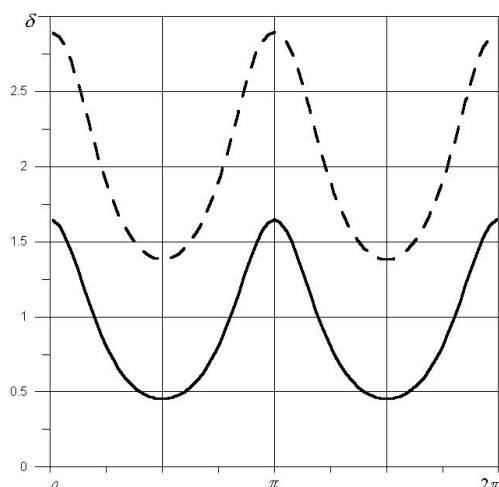


Рис. 2. Распределение относительной величины δ по контуру Γ при $\omega = 10^5 \text{ c}^{-1}$

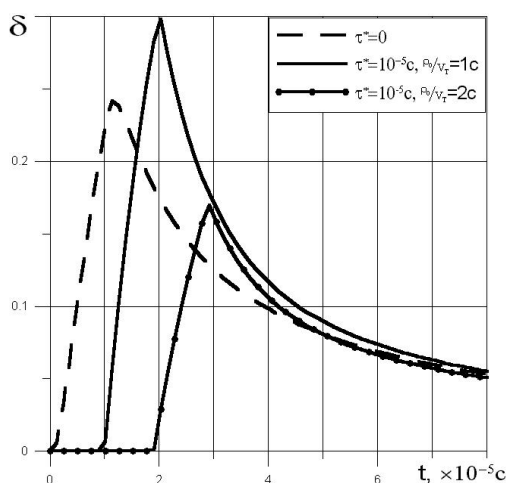


Рис. 3. Изменение безразмерной температуры δ при действии теплового импульса, $t_0 = 10^{-5} \text{ c}$

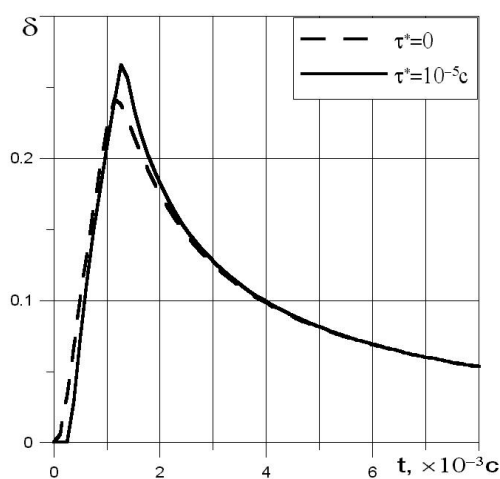


Рис. 4. Изменение безразмерной температуры δ при действии теплового импульса, $t_0 = 10^{-3} \text{ c}$

Из полученных результатов следует, что при значениях круговой частоты $\omega < 10^4 \text{ c}^{-1}$ классическая (параболическая) модель теплопроводности вполне адекватно описывает тепловые волновые поля в слое с полостями. С увеличением ω различие в результатах, полученных в рамках параболи-

ческой и гиперболической моделей, становится существенным. Очевидно, что кривая, соответствующая решению гиперболического уравнения расположена выше, чем кривая, соответствующая температурному полю без релаксации. Это связано с тем, что энергия (теплота) в гиперболической модели локализуется в области действия источника тепла, в то время как классическая модель представляет равновесный, диффузионный процесс переноса энергии.

При импульсном тепловом воздействии температура имеет характер бегущей волны, распространяющейся от носителя сосредоточенных тепловых источников со скоростью V_T . Это иллюстрируется кривыми на рис. 3, которые построены для значения времени релаксации $\tau^* = 10^{-5}$ с и длины теплового импульса $t_0 = 10^{-5}$ с. Однако, в случае, когда время действия импульса несоизмеримо со временем релаксации системы к состоянию равновесия (рис. 4), решения гиперболического и параболического уравнений теплопроводности совпадают, т.е. волновая природа теплопереноса не наблюдается.

Литература

1. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // УФН. – 1991. – 161, № 3. – С. 5 – 29.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
3. Antaki P.J. Solution for Non-Fourier Dual Phase Lag Heat Conduction in a Semi-Infinite Slab With Surface Heat Flux // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1998. – 41 (14). – P. 2253 – 2258.
4. Фильштинский Л.А. Периодические во времени однородные решения уравнения теплопроводности для анизотропного слоя в R^3 // Мат. методы та фізико-мех. поля. – 2003. – 46, № 2. – С. 147 – 154.
5. Lewandowska M., Malinowski L. Hyperbolic heat conduction in the semi-infinite body with the heat source which capacity linearly depends on temperature // Heat and Mass Transfer, 33. – 1998. – P. 389 – 393.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 253 с.
7. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. – М.: Наука, 1976. – 628 с.

Поступила в редакцию 1.04.2005