

МОДЕЛЬ И МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

В.М. Лапотко, канд. техн. наук,

Ю.П. Кухтин,

ЗМКБ «Прогресс», г. Запорожье, Украина

1. Исходные предположения, система уравнений

Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений, описывающую течение вязкого газа [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{V_m} \iint_A \delta_\rho dA; \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_j \omega)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{V_m} \iint_A \delta_\omega dA; \\ \frac{\partial(\rho W_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_j W_k)}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_k} &= -\frac{1}{V_m} \iint_A J \delta_k dA; \\ \frac{\partial(\rho(C_V T + \frac{W^2}{2}))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_j(C_V T + \frac{W^2}{2}))}{\partial x_j} + \frac{\partial(P W_j)}{\partial x_j} &= \\ &= -\frac{1}{V_m} \iint_A \delta_H dA \quad (k=1,2,3). \end{aligned} \quad (1)$$

Дифференциальные операторы, стоящие в левых частях уравнений, описывают бесстолкновительное движение частиц по траекториям в фазовом пространстве. Правые части исходной системы уравнений, представленные интегральными операторами, описывают явления переноса, обусловленные столкновительным перемещением частиц. Идея моделирования явлений тепломассообмена в потоках турбулентных вязких сред посредством математического аппарата источников и стоков была предложена профессором Харьковского авиационного института Д.А. Мунштуковым [1].

2. Способ определения интенсивностей источников и стоков, имитирующих молекулярное воздействие на макродвижение среды

Предложенная система уравнений является незамкнутой из-за неопределенности интегральных составляющих уравнений. В случае явлений переноса, обусловленных хаотическим движением молекул, не-

определенные составляющие могут быть определены исходя из кинетической теории газов [2]:

$$\delta_u = \frac{1}{2} \rho_2 \frac{v}{\ell} - \text{количество массы, поступающей в}$$

объем V_1 из объема V_2 через единицу поверхности за единицу времени в результате молекулярного переноса (рис. 1);

$$\delta_C = \frac{1}{2} \rho_1 \frac{v}{\ell} - \text{количество массы, уходящей из}$$

объема V_1 в объем V_2 через единицу поверхности за единицу времени в результате молекулярного переноса,

где ρ_1, ρ_2 - плотность среды, соответственно в объемах V_1 и V_2 ;

v - коэффициент кинематической вязкости;

ℓ - длина свободного пробега молекулы.

Тогда:

$$\begin{aligned} \delta_\rho &= \frac{1}{S_C} (\delta_C - \delta_u); \\ \delta_\omega &= \frac{1}{S_C} (\delta_C \omega_C - \delta_u \omega_u); \\ \bar{J}_\delta &= \delta_C \bar{W} - \delta_u \bar{W}_u; \\ \delta_H &= \frac{1}{P_r} (\delta_C (C_p T + \frac{W^2}{2})_C - \delta_u (C_p T_u + \frac{W_u^2}{2})_u). \end{aligned} \quad (2)$$

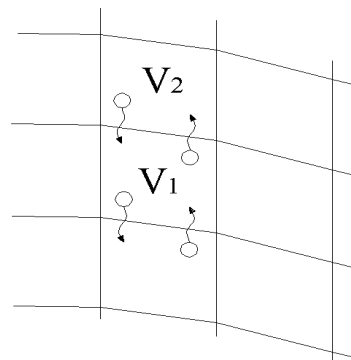


Рис. 1. Схема тепломассообмена между смежными элементами струй тока

3. Способ определения интенсивностей источников и стоков, имитирующих воздействие турбулентных пульсаций на макродвижение среды

В случае явлений переноса, обусловленных хаотическим движением турбулентных молей, исходная система уравнений (1) дополняется, в частности, уравнением для коэффициента турбулентной вязкости. Такое уравнение является аналогом известного уравнения модели переноса турбулентной вязкости Нили и Коважного [3]:

$$\frac{\partial(\rho v_T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W_j v_T)}{\partial x_j} + k_D \rho \frac{v_T(v_T + v)}{L^2} - k_G / J_\delta /_{cp} = -\frac{1}{V_m} \iint_A \delta_v dA \quad (3)$$

В этом уравнении:

L - масштаб турбулентности;

k_D, k_G - универсальные постоянные;

$$\delta_v = \frac{1}{S_C} (\delta_C v_T - \delta_u v_{Tu}) \quad - \quad \text{аналогично}$$

соотношениям (2);

$/J_\delta /_{cp}$ - модуль среднего значения величины J_δ для рассматриваемого элемента.

Тогда окончательно для турбулентного течения вязкого газа

$$\begin{aligned} \delta_u &= \frac{1}{2} \rho_u \left(\frac{v}{\ell} + \frac{v_{Tu}}{L_u} \right), \\ \delta_C &= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{v}{\ell} + \frac{v_T}{L} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Возможно использование также других, более совершенных моделей турбулентности [1].

4. Метод решения исходной системы уравнений

При решении системы уравнений (1) следует воспользоваться дополнительными связями для C_V , R и P . Для двухкомпонентной среды с компонентами A и B эти связи имеют вид

$$\begin{aligned} C_V &= C_{VA} \omega + C_{VB} (1 - \omega); \\ R &= R_A \omega + R_B (1 - \omega); \\ P &= \rho R T. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (1), дополненная уравнением типа (3) и замкнутая соотношениями (2), (4), (5), решалась по методу расщепления по физическим процессам [4] с использованием метода отслеживания струй тока [5] (Мост) и описанной модели обмена.

В основу разработанного авторами настоящей работы метода отслеживания струй тока положено использование подвижных, так называемых лагранжевых сеток. В этом методе лагранжевые сетки – это ориентированные в направлении течения, бесконечно тонкие, невесомые и непроницаемые для потока сеточные линии. Разработанный универсальный алгоритм обеспечивает совпадение лагранжевых сеток с линиями раздела струй тока. Это исключает численную диффузию. Действенной остается лишь диффузия, обусловленная физической вязкостью и турбулентным движением среды.

Процесс решения исходной системы уравнений на временном шаге можно разделить на два этапа:

Этап 1. *Эйлеров этап*. Моделируется бесстолкновительное перемещение частиц газа по струйкам тока, т.е. методом отслеживания струй тока решается система уравнений (1) без правых частей.

Этап 2. *Диффузионный этап*. Поперек течения между отдельными элементами струй тока моделируются явления переноса, обусловленные хаотическим движением молекул и турбулентных молей.

Краевые условия первого этапа при решении соответствующей прикладной задачи совпадают с краевыми условиями, разработанными для течений совершенного газа [6]. Постановку краевых условий второго этапа рассмотрим подробно лишь на твердом теле. Для свободных границ приемлемо выполнение условий

$$\delta_u = 0, \quad \delta_C = 0. \quad (6)$$

Реализацию краевых условий на твердом теле удобно осуществлять, введя «фиктивные» точки, для которых

$$\begin{aligned}
\rho_T &= \rho_r; \\
\omega_T &= \omega_r; \\
W_{kT} &= 0 \quad (k = 1, 2, 3); \\
W_T & - \text{задано.}
\end{aligned}
\tag{7}$$

Здесь индекс «Т» относится к «фиктивным» точкам, расположенным на теле.

Условие устойчивости полученной явной разностной схемы состоит в том, что допустимый шаг по времени должен удовлетворять не только известному критерию Куранта-Фридрихса-Леви [6]

$$\Delta t \leq \frac{h}{U + a}, \tag{8}$$

но и критериям, которые учитывают процессы переноса, обусловленные физической вязкостью и турбулентным движением среды:

$$\Delta t \leq \frac{h\ell}{3\nu}; \quad \Delta t \leq \frac{hL}{3\nu_T}, \tag{9}$$

где h - шаг разностной сетки,

a - скорость звука.

5. Результаты расчетов

На рис. 2 показано сопоставление результатов расчета обтекания плоской решетки турбомшины по методу, описанному в данной работе с экспериментальными данными, заимствованными из работы [7]. Расчетный КПД профиля СЗХ, определенный по изменению полного давления, составил 0.94.

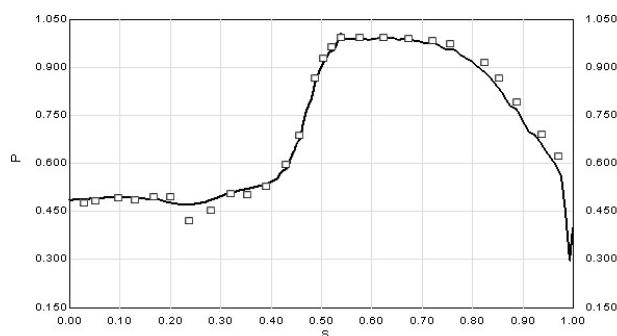


Рис. 2. Распределение статического давления по контуру профиля

На рис. 3 - 6 показаны поля параметров полного давления, безразмерного параметра скорости, турбулентной вязкости и статической температуры.

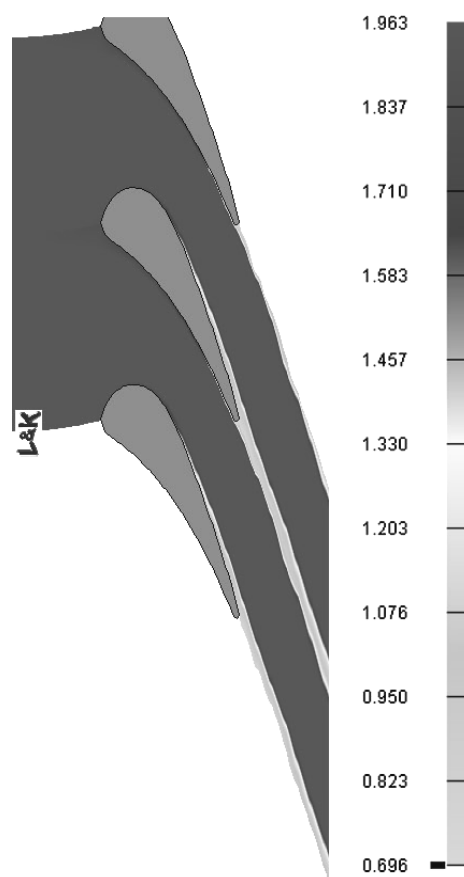


Рис. 3. Поле полного давления

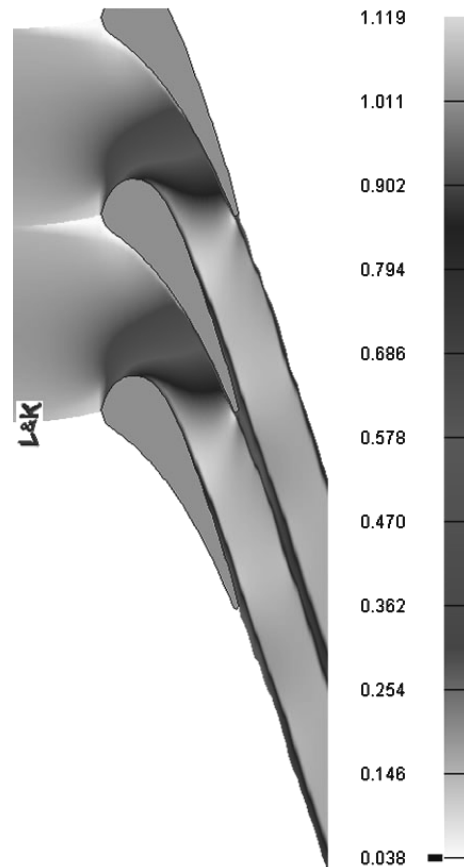


Рис. 4. Безразмерный параметр скорости M

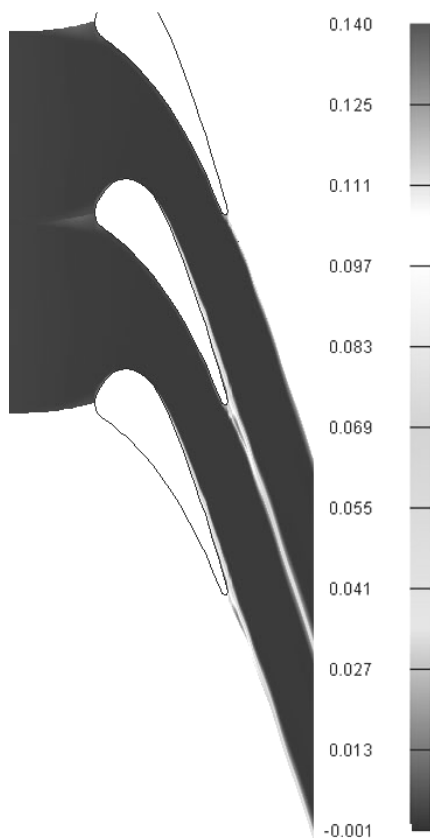


Рис. 5. Поле турбулентной вязкости *1000.0

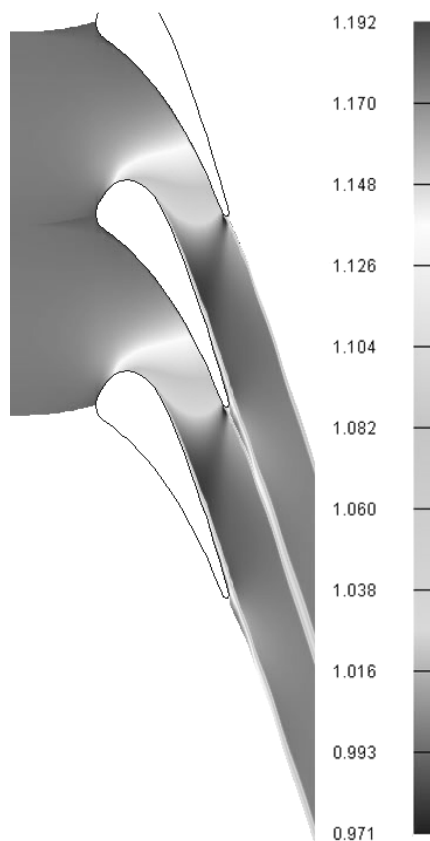


Рис. 6. Поле статической температуры

5. Выводы

Подход к моделированию вязких течений, изложенный в данной работе, позволяет избежать трудностей, связанных с аппроксимацией старших производных уравнений Навье–Стокса. Консервативность данного алгоритма (как для каждой ячейки, так и для всей расчетной области) позволяет проводить численное моделирование сложных нестационарных течений.

Литература

1. Мунштуков Д.А., Лапотко В.М. Модель турбулентного движения среды.- Харьков, 1989.- 12 стр. Деп. в ВИНТИ 22.07.1989 № 7158-B89.
2. Чепмэн С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов.- М.: ИЛ, 1960.- 68 с.
3. Турбулентность / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена.- М.: Мир, 1980.- 126 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- М.: Наука, 1977.- 320 с.
5. Лапотко В.М., Кухтин Ю.П. Преимущества использования подвижных, лагранжевых сеток при численном моделировании течений сплошных сред // Авиационно-космическая техника и технология: Сб. науч. тр.- Харьков: ХАИ, 2000.- Вып. 19. Двигатели и энергоустановки.- С. 88-92.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.- М.: Мир, 1980.- 220 с.
7. Нили Д.А., Михелк М.С. Измерения теплоотдачи на поверхностях высоконагруженных лопаток соплового аппарата турбины // Тр. америк. общ. инж.-мех. Сер. Энергетические машины и установки.- 1984.- Т. 106, № 1.- С. 86-96.

Поступила в редакцию 18.04.03

Рецензенты: д-р техн. наук, зав. каф. теплотехники и гидравлики, профессор Я.А. Егоров, ЗГТУ, г. Запорожье; канд. техн. наук, вед. констр. А.В. Меньяйлов, ЗМКБ «Прогресс», г. Запорожье.