

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА В МЕЖЭЛЕКТРОДНОМ ЗАЗОРЕ ИОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЛАЗМЕННО-ИОННОГО УСКОРИТЕЛЯ

Н.В. Белан, д-р. техн. наук, С.Ю. Нестеренко, канд. техн. наук,

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", г. Харьков, Украина

Чжен Маофань, Институт физики Ланчжоу, КНР

Одной из проблем расчета плазменно-ионных двигателей (ПВД) [1] является отсутствие математических моделей, описывающих распределение параметров ионов и поля по радиусу в межэлектродном промежутке (МП) ионно-оптической системы (ИОС).

Одномерные модели не позволяют рассчитать такие характеристики, как коэффициент монохроматичности, тяговый к.п.д., потери ионов на ускоряющем электроде, плотность потока энергии на различные участки поверхности ускоряющего электрода, скорость его эрозии.

Величина изменения потенциала плазмы вдоль внутренней (со стороны РК) поверхности эмиссионного электрода (ЭЭ) и наружной поверхности ускоряющего электрода (УЭ) имеет порядок электронной температуры и мала по сравнению с ускоряющим напряжением. Поэтому граничные условия для потенциала могут быть записаны так:

$$\varphi = 0 \quad (x = 0 \text{ и на поверхности ЭЭ}), \quad (1)$$

$$\varphi = -U_0 \quad (x = L \text{ и на поверхности УЭ}), \quad (2)$$

где L – длина МП, включая толщины электродов;

U_0 – ускоряющее напряжение.

Средняя тепловая скорость движения ионов в разрядной камере (РК) ПВД мала по сравнению со скоростью истечения. Поэтому поток ионов в МП можно считать монохроматичным, а скорость их на входе в МП – равной нулю:

$$\vec{V} = 0. \quad (3)$$

Система уравнений модели, записанная в безразмерных переменных, содержит уравнения неразрывности, движения ионов и уравнение

Пуассона:

$$\nabla \cdot \vec{\Gamma}(x, r) = 0, \quad (4)$$

$$2(\vec{V}(x, r) \cdot \nabla) \vec{V}(x, r) - \nabla U(x, r) = 0, \quad (5)$$

$$\Delta U(x, r) = \frac{4}{9} n(x, r), \quad (6)$$

$$\text{где } \vec{\Gamma}(x, r) = n(x, r) \vec{V}(x, r). \quad (7)$$

Связь между размерными и безразмерными величинами и операторами следующая:

$$\vec{r} = L \vec{r}, \quad \vec{x} = L x, \quad \vec{r} = L r, \quad \vec{\Gamma} = n_0 V_0 \vec{\Gamma}, \quad n = n_0 n,$$

$$\vec{V} = V_0 \vec{V}, \quad \varphi = -U_0 U, \quad \nabla = \frac{1}{L} \nabla \text{ и } \Delta = \frac{1}{L^2} \Delta,$$

где $(\vec{r}, \vec{r})$, (x, x) , (r, r) – радиус-вектор, осевая и радиальная координаты; $(\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma})$ – плотность потока; $(\vec{V}, \vec{V})$ – скорость; (φ, U) – потенциал. Масштабы скорости и концентрации определяются так:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_i}}, \quad n_0 = \frac{9\epsilon_0 U_0}{4eL^2}. \quad (8)$$

Одномерные решения системы уравнений (5) – (7) с граничными условиями (1) – (3) имеют следующий вид:

$$U = x^{4/3}, \quad V_x = x^{2/3}, \quad V_r = 0, \quad n = x^{-2/3}. \quad (9)$$

Сложность построения двумерной модели обусловлена нелинейностью уравнения (5) относительно переменных, входящих в уравнения (4) и (6). В первом приближении, учитывая только линейные поправки к решениям (9), система уравнений (5) – (7) может быть приведена к виду:

$$\frac{\partial(nV_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r n V_r) = 0, \quad (10)$$

$$2V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad V_x = U^{1/2}, \quad (11)$$

$$2V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{4}{9} n. \quad (13)$$

Подстановка (10) в (12) с учетом (9) в первом приближении приводит к выражению:

$$x^{2/3} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{2/3} \frac{\partial (U x^{-4/3} + 2n x^{2/3})}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \quad (14)$$

Таким образом, уравнения (13) и (14) образуют замкнутую систему, решения которой могут записываться в виде:

$$U(x, r) = x^{4/3} + \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r) x^{5/3+2k}, \quad (15)$$

$$n(x, r) = x^{-2/3} + \sum_{k=0}^{\infty} n_k(r) x^{-1/3+2k}. \quad (16)$$

Можно показать, что при подстановке (16) в (13) неучет величин n_k , начиная с $k=1$ приводит к относительной погрешности

$$\delta U_1 \approx 0.026 \text{ при } \delta U_{k+1} \ll \delta U_k. \quad (17)$$

Иначе говоря, влияние неоднородности распределения n на распределение U является существенно более слабым, чем обратное влияние.

Пренебрежение начальной дисперсией по скоростям приводит к решению, в котором существует четкая граница между областью ионного пучка и вакуумом. С учетом (17), эту границу можно считать цилиндрической поверхностью с радиусом, равным радиусу отверстия ЭЭ R_0 (безразмерный –

$R_0 = \frac{R_0}{L}$), а уравнение Лапласа записать так:

$$\Delta U(x, r) = \begin{cases} \frac{4}{9} [x^{-2/3} + n_0(r) x^{-1/3}] & r \leq R_0 \\ 0 & R_0 < r \leq R \end{cases}, \quad (18)$$

где $R = \frac{R_0}{\sqrt{\xi}}$ и ξ – коэффициент прозрачности

(отношения площади отверстий к полной площади) ЭЭ.

Решения уравнения (18) можно искать в виде:

$$n_0(r) = \sum_{k=1}^K N_k \Phi_k(r), \quad (19)$$

$$U(x, r) = x^{4/3} + \sum_{k=1}^K u_k(x) \Phi_k(r), \quad r \leq R_0, \quad (20)$$

$$U(x, r) = \sum_{n=0}^N v_n(x) \Psi_n(r), \quad r > R_0, \quad (21)$$

где:

$$\Phi_k(r) = \frac{I_0(\alpha_k r)}{I_0(\alpha_k R_0)} \text{ и}$$

$$\Psi_n(r) = \frac{I_1(\beta_n R) K_0(\beta_n r) + K_1(\beta_n R) I_0(\beta_n r)}{I_1(\beta_n R) K_0(\beta_n R_0) + K_1(\beta_n R) I_0(\beta_n R_0)},$$

где I_0 и K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [2].

Считая малой толщину ЭЭ, можно записать:

$$v_n(x) = \frac{v_n}{\pi n} \sin \beta_n x, \quad v_n = \text{Const}, \quad v_0 = 1, \quad (22)$$

$$u_k(x) = \frac{2}{5} N_k \frac{\Gamma(8/3)}{\alpha_k^{5/3}} F_{2/3}(\alpha_k x), \quad (23)$$

где Γ – гамма-функция [2], а функции $F_v(x)$

определены так:

$$F_v(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x z^{v-1} \sin(z-x) dx. \quad (24)$$

Коэффициенты α_k и β_n должны выбираться таким образом, чтобы выполнялись граничные условия (1) и (2):

$$\beta_n = \frac{L}{L_0} \pi n, \quad F_{2/3}(\alpha_k) = 0, \quad (25)$$

где L_0 – длина МП, исключая толщины электродов.

Коэффициенты v_n и N_k должны выбираться такими, чтобы выполнялись граничные условия (1) и (2) а также обеспечивалась неразрывность потенциала и радиальной проекции напряженности поля на границе пучка.

На рис. 1 и 2 показаны распределения потенциала и радиальной проекции напряженности поля вдоль “границы” ионного пучка. Цифрами 0 и 1 обозначены, соответственно, решения для области вакуума и пучка.

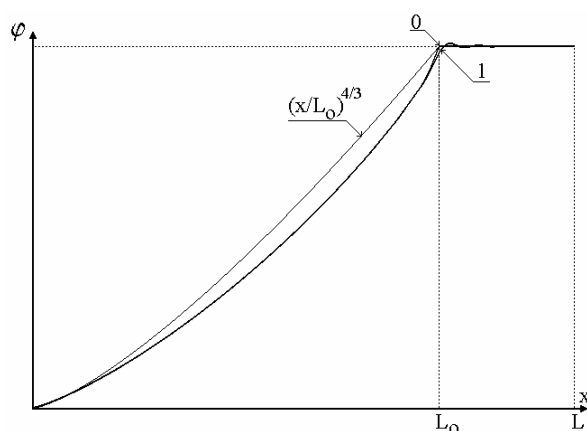


Рис. 1. Распределение потенциала вдоль “границы” ионного пучка

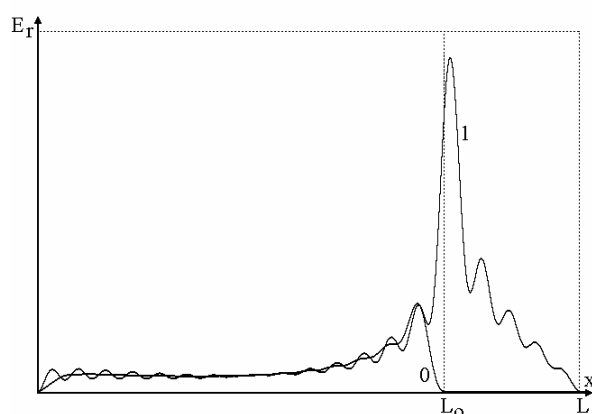


Рис. 2. Распределение электрического поля вдоль “границы” ионного пучка

Кроме того, на рис. 1 для сравнения показано “одномерное” решение.

На рис. 3 показаны линии равных потенциалов.

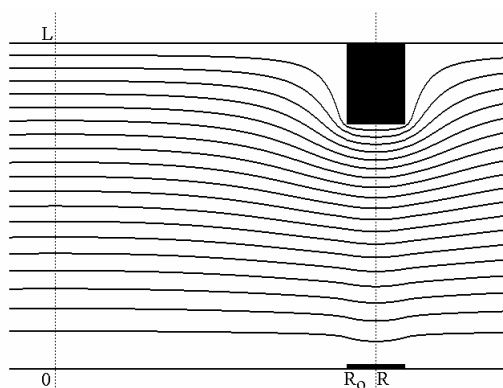


Рис. 3. Распределение потенциала в меж-электродном промежутке

Точка $x = L_0$, $r = R_0$ – внутренняя кромка УЭ является особой для величины E_r – значение этой величины зависит от направления приближения к этой точке. В численном решении это приводит к заметному несовпадению кривых 0 и 1 на рис. 2 в области этой точки с размером порядка L_0/N . Конечность числа слагаемых в (20), (21) приводит также к осцилляциям полученных решений (Рис. 2) с шагом того же порядка.

Закключение

Полученное распределение потенциала в МП ИОС ПИД может быть в дальнейшем использовано для расчета распределения концентрации и скорости течения ионов с использованием приведенных в работе уравнений.

Литература

1. Гришин С.Д., Лесков Л.В., Козлов Н.П. Электрические ракетные двигатели.- М.: Машиностроение, 1975.- 273 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.- М.: Наука, 1984.- 315 с.

Поступила в редакцию 04.06.03

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор А.И. Оранский, Национальный аэрокосмический университет “ХАИ” им. Н.Е. Жуковского, г. Харьков; д-р физ.-мат. наук, зам. директора В.И. Терешин, Институт физики плазмы ННЦ «ХФТИ», г. Харьков.