УДК 539.3:534.1:629.7.02

**МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ
В ЗАДАЧАХ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ИДЕЯ МЕТОДА***С.А. Халилов**Национальный аэрокосмический университет «ХАИ». Украина, г. Харьков*

Идея метода прослеживается на двух нетривиальных одно- и двумерных задачах, допускающих точное решение. Реализация метода осуществляется в три основных этапа - определение исходного состояния, решение промежуточных задач и решение собственно задач устойчивости какого-либо звена системы.

* * *

Идея методу просліджується на двох нетривіальних одно- і двовимірних задачах, які допускають точне розв'язання. Реалізація методу здійснюється в три основні етапи - знаходження початкового стану, вирішення проміжних задач і розв'язання власно задач стійкості якої-небудь ланки системи.

* * *

The idea of this method is seen in two nontrivial problems one- and two-dimensional, with precise solving. The method applied is fulfilled during three stages: defining the initial state, intermediate problem solving and solving stability problems of any link of the system itself.

Разрушение серийных и опытных изделий при статических испытаниях в результате потери устойчивости происходит в более чем в 50% случаев, а разрушение несущих поверхностей планера – более чем в 60% [1]. Эти объективные данные убедительно подтверждают остроту и актуальность существующей проблемы, что не оспаривается во всем мире ни теоретиками, ни практиками [2].

Два основных исторически сложившихся подхода [3] не в состоянии рационально разрешить проблему в силу их известных недостатков. При первом не без налета академичности подходе математические модели строятся на основе последних достижений науки, однако при их анализе ставятся классические краевые условия, не реализуемые в действительности. При втором более прагматичном подходе, базирующемся главным образом на методе конечных элементов, реальные условия сложного взаимодействия элементов (блоков) системы учитываются не в полной мере.

Альтернативный в известном смысле двум предыдущим подход был предложен автором [3, 4]. Последовательная реализация основных положений

подхода, их теоретическая и практическая проработка привели к формулировке нового метода – метода идентификации краевых условий, в котором рационально сочетаются достоинства классических подходов и который, обладая высокой точностью и оперативностью, позволяет получить двусторонние оценки критических параметров сравнительно простыми средствами.

Главная нерешенная задача в проблеме устойчивости конструкций – это правильное определение условий взаимодействия блоков сложной системы в целях получения достоверных моделей, анализ которых может быть выполнен быстро и с задаваемой точностью. В предлагаемом методе эта задача решается путем постановки и анализа так называемых промежуточных краевых задач. Как только решен определенный набор таких задач, то задача собственно устойчивости формулируется достаточно просто как задача на собственные значения с естественными краевыми условиями, содержащая критический параметр. Математическая сложность последней задачи наряду со сложностью промежуточных задач и служит, по-видимому, основным препятст-

которых (2) являются функциями нагрузки, не приложенной к стойке, и параметров элементов системы: именно через C_i свойства системы “трансформируются” к стойке, параметры которой будут учтены на данном этапе. Таким образом, получаем следующую задачу собственно устойчивости:

$$\begin{aligned} w_5^{IV} &= 0, 0 < x < 1; w_5 = 0, x = 0, x = 1; \\ w_5'' - \rho_1 w_5' &= 0, x = 0; w_5'' + \rho_2 w_5' = 0, x = 1; \\ \rho_1 &= C_1 l / 2D_1 \gamma, \rho_2 = \mu C_2 l / 2D_3 \gamma, \gamma = D_5 l_1 / D_1 H. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая задачу (3) на собственные значения (параметр нагрузки α входит в краевые условия), приходим к трансцендентному уравнению относительно этого параметра:

$$(\text{actg} \alpha + 2\gamma)(\mu\beta\text{cth} \beta + 2\gamma) - \gamma^2 = 0 \quad (4)$$

Параметр γ относится к стойке.

Эту же задачу можно свести к задаче устойчивости верхней или нижней (растянутой!) панели. Из изложенного выше совершенно очевидно, как это сделать. Приведем лишь решение промежуточных задач:

$$\begin{aligned} M_A &= C_A \Theta_1, M_B = -C_B \Theta_2, \\ C_A &= \frac{2D_5}{H} \frac{2\beta\text{cth} \beta + 3\eta}{\beta\text{cth} \beta + 2\eta}, C_B = \frac{2D_5}{H} \frac{2\text{actg} \alpha + 3\eta}{\text{actg} \alpha + 2\eta}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta = D_5 l_1 / D_2 H.$$

Решая упомянутые задачи, вновь получаем уравнение (4).

Приведем теперь прямое решение задачи при оговоренных ранее граничных условиях в концевых сечениях панелей.

Решения для всех пяти элементов системы имеют вид ($0 \leq x \leq 1$)

$$\begin{aligned} w_1(x) &= W_1 - \Theta_1 l_1 (\cos \alpha - \cos \alpha x) / \alpha \sin \alpha, \\ w_2(x) &= W_1 + \Theta_1 l_1 (\cos \alpha - \cos \alpha(1-x)) / \alpha \sin \alpha, \\ w_3(x) &= W_2 + \Theta_2 l_1 (\text{ch} \beta - \text{ch} \beta x) / \beta \text{sh} \beta, \\ w_4(x) &= W_2 - \Theta_2 l_1 (\text{ch} \beta - \text{ch} \beta(1-x)) / \beta \text{sh} \beta, \\ w_5(x) &= -\Theta_1 H x + H(2\Theta_1 + \Theta_2)x^2 - H(\Theta_1 + \Theta_2)x^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Из равновесия узлов А и В по моментам следует система двух линейных алгебраических уравнений относительно Θ_1 и Θ_2 :

$$\begin{aligned} \Theta_1 (\text{actg} \alpha + 2\gamma) + \Theta_2 \gamma &= 0, \\ \Theta_1 \gamma + \Theta_2 (\mu\beta\text{cth} \beta + 2\gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенство нулю определителя этой системы приводит к уравнению (4). Из уравнений (8) можно исключить Θ_2 (или Θ_1):

$$\Theta_2 = -\Theta_1 (\text{actg} \alpha + 2\gamma) / \gamma = -\Theta_1 \gamma / (\mu\beta\text{cth} \beta + 2\gamma). \quad (9)$$

Далее положим $W_2=0$, что законно; тогда для W_1 получим

$$W_1 = -\frac{H}{15} \Theta_1^2 \left(1 + \left(\frac{\text{actg} \alpha + 2\gamma}{\gamma} \right)^2 + \frac{\text{actg} \alpha + 2\gamma}{2\gamma} \right). \quad (10)$$

Функции (7) с учетом равенств (9), (10) и $W_2=0$ определяют форму потери устойчивости системы. Анализ этой формы показывает, что потеря устойчивости сжатой панели по синусоиде (как обычно принимается) не имеет места, смена знака кривизны осевой линии панели происходит не в узле А, а в точках, равноудаленных от узла на величину $x = \left(1 - \frac{\pi}{\alpha} \right) l_1$; растянутая панель, участвуя в работе системы, также выпучивается, интенсивность этого выпучивания, однако, на порядок ниже, чем для сжатой панели.

Обратимся теперь к двумерной задаче и рассмотрим свободно опертую прямоугольную пластину со

сторонами a и b , подкрепленную одним стрингером параллельно стороне b (на расстоянии $x=c$) и равномерно сжатую погонными усилиями $N_y^0 = \sigma_y \delta$ (δ – толщина пластины). Стрингер имеет ось симметрии, перпендикулярную срединной плоскости пластины, в которой лежит центр тяжести его поперечного сечения, и наделен жесткостями на растяжение-сжатие (EF), изгиб из плоскости пластины (EI_x) и свободное кручение (GI_k). Принимается, что взаимодействие стрингера и пластины происходит по линии и стрингер сжат усилиями $N_c^0 = \sigma_y F$. Кроме того, при рассмотрении кручения стрингера можно пренебречь величиной $N_c^0 r^2$ (r -полярный радиус инерции сечения стрингера) в сравнении с GI_k . Начало правой прямоугольной системы координат расположено в левом верхнем углу пластины (ее плоскость совпадает с плоскостью листа), а оси координат направлены вдоль сторон. Задача устойчивости системы – это обобщенная двумерная краевая задача на собственные значения, допускающая точное решение методом разделения переменных.

Применим рассматриваемый метод и сведем задачу к одномерной – задаче устойчивости стрингера, “погруженного” в упругую среду, создаваемую пластиной и препятствующую изгибу стрингера из плоскости пластины и его кручению. В этих условиях реакции среды сводятся к распределенным по линии (оси стрингера) усилиям $q_0(y)$ (перпендикулярным плоскости пластины) и моментам $m_0(y)$. Тогда искомая одномерная задача (задача собственно устойчивости) получается сразу:

$$\begin{aligned} EI_x w_c^{IV}(y) + N_c^0 w_c''(y) &= -q_0(y), \\ GI_k \theta_c''(y) &= m_0(y), \quad 0 < y < b; \\ w_c = w_c'' = \theta_c(y) &= 0, \quad y = 0, \quad y = b, \end{aligned} \quad (11)$$

где $w_c(y)$, $\theta_c(y)$ – прогиб и угол закручивания сечений стрингера. Определение характеристик упругой среды составляет предмет промежуточной задачи. Более общо: промежуточная задача – это задача установления зависимостей между q_0 , m_0 и w_c , θ_c .

В общем случае упомянутые зависимости можно представить в операторном виде (A_k , B_{ki} – операторы):

$$\begin{aligned} A_1 q_0(y) &= B_{11} w_c(y) + B_{12} \theta_c(y), \\ A_2 m_0(y) &= B_{21} w_c(y) + B_{22} \theta_c(y). \end{aligned} \quad (12)$$

Наличие операторных равенств (12) следует из теоремы существования и единственности краевой задачи изгиба пластины, подверженной действию поперечных нагрузок и усилий в срединной плоскости; однако получение таких зависимостей – задача далеко не простая. Предположим все-таки, что равенства (12) установлены. Тогда, обращая операторы A_k (существование A_k^{-1} также следует из упомянутой теоремы), получим:

$$\begin{aligned} q_0(y) &= A_1^{-1} B_{11} w_c(y) + A_1^{-1} B_{12} \theta_c(y), \\ m_0(y) &= A_2^{-1} B_{21} w_c(y) + A_2^{-1} B_{22} \theta_c(y). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив равенства (13) в уравнения (11), придем к одномерной задаче собственно устойчивости.

В рассматриваемом случае благодаря возможности получить точное решение промежуточной задачи зависимости (12) предельно упрощаются: операторы A_k – это операторы, ставящие в соответствие всякой функции ее ряд Фурье по синусам, а B_{ki} – это операторы, ставящие в соответствие всякой функции ряд Фурье по синусам, коэффициенты которого – суть произведения коэффициентов Фурье исходной функции и некоторых зависящих от номера члена ряда постоянных, т.е. равенства (12) приобретают вид ($0 < y < 1$):

$$q_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{0n} \sin n\pi y = \sum_{n=1}^{\infty} C_{w\omega n} W_n \sin n\pi y + \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} C_{w\theta n} \Theta_n \sin n\pi y, \quad (14)$$

$$m_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{0n} \sin n\pi y = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\theta\omega n} W_n \sin n\pi y + \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} C_{\theta\theta n} \Theta_n \sin n\pi y,$$

где q_{0n} , m_{0n} , W_n , Θ_n – коэффициенты Фурье функций $q_0(y)$, $m_0(y)$, $w_c(y)$, $\theta_c(y)$ соответственно (параметр c введен для удобства выкладок). Величины $C_{\alpha\beta n}$ – коэффициенты жесткости упругой среды (пластины) в месте расположения стрингера, определяемые из решения промежуточной задачи, которая формулируется следующим образом.

Пусть при $x=c$, т.е. на линии сочленения стрингера и пластины, для изолированной пластины (стрингер удален) известны функции прогиба и угла поворота в виде

$$w_c(y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin n\pi y, \quad \theta_c(y) = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \sin n\pi y. \quad (15)$$

Требуется определить, какое погонное усилие $q_c(y)$ и какой погонный момент $m_y(y)$ необходимо приложить к пластине, чтобы вызвать в ней заданные в виде равенств (15) прогибы и углы поворота.

Задача решается точно методом разделения переменных, с чем и связана необходимость представления функций $w_c(y)$ и $\theta_c(y)$ в виде (15) и благодаря чему получены зависимости (14). Это решение имеет вид

$$C_{w\omega n} = -D\bar{C}_{w\omega n}/b^3, \quad C_{w\theta n} = -Dc\bar{C}_{w\theta n}/b^3, \quad (16)$$

$$C_{\theta\omega n} = -D\bar{C}_{\theta\omega n}/b^2, \quad C_{\theta\theta n} = -Dc\bar{C}_{\theta\theta n}/b^2,$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, а $\bar{C}_{\alpha\beta n}$ – безразмерные параметры жесткости:

$$\bar{C}_{w\omega n} = \gamma_2^3 p_{2n} - \gamma_3^3 \bar{p}_{2n}, \quad \bar{C}_{w\theta n} = \gamma_2^3 q_{2n} - \gamma_3^3 \bar{q}_{2n}, \quad (17)$$

$$\bar{C}_{\theta\omega n} = \gamma_2^2 \bar{p}_{1n} - \gamma_2^2 p_{1n}, \quad \bar{C}_{\theta\theta n} = \gamma_2^2 \bar{q}_{1n} - \gamma_2^2 q_{1n}.$$

Отметим, что имеет место равенство

$$C_{w\theta n} = C_{\theta\omega n}, \quad (18)$$

что следует из теорем взаимности. В равенствах (17) приняты такие обозначения:

$$p_{1n} = P_n''(1), \quad q_{1n} = Q_n''(1);$$

$$p_{2n} = P_n''(1), \quad q_{2n} = Q_n''(1);$$

$$\bar{p}_{1n} = \bar{P}_n''(0), \quad \bar{q}_{1n} = \bar{Q}_n''(0);$$

$$\bar{p}_{2n} = \bar{P}_n'''(0), \quad \bar{q}_{2n} = \bar{Q}_n'''(0).$$

Здесь $P_n, Q_n, \bar{P}_n, \bar{Q}_n$ – некоторые функции от переменной x (они будут приведены ниже); штрихи означают дифференцирование по x , в скобках указаны значения аргумента, при которых вычисляются производные;

$$\gamma_2 = \frac{b}{c} = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \gamma_3 = \frac{\lambda}{1-\rho}, \quad \rho = \frac{c}{a}, \quad \lambda = \frac{b}{a}.$$

Подставляя теперь равенства (14) и (15) с учетом равенств (16) и (17) в уравнения (11), придем к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно W_n и Θ_n :

$$W_n \left(\gamma_1 n^4 \pi^4 - \xi^2 \gamma_4 n^2 \pi^2 - \gamma_2^3 p_{2n} + \gamma_3^3 \bar{p}_{2n} \right) - \Theta_n \left(\gamma_2^3 q_{2n} - \gamma_3^3 \bar{q}_{2n} \right) = 0, \quad (19)$$

$$W_n \left(\gamma_2^2 p_{1n} - \gamma_3^2 \bar{p}_{1n} \right) + \Theta_n \left(\gamma_2^2 q_{1n} - \gamma_3^2 \bar{q}_{1n} + \gamma_k n^2 \pi^2 \right) = 0,$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{EI_x}{Db}; \gamma_4 = \frac{Fb}{c^2 \delta}; \gamma_k = \frac{GI_k}{Db}; \gamma_2; \xi^2 = \frac{N_y^0 c^2}{D}.$$

Равенство нулю определителя системы (19) дает уравнение относительно параметра нагрузки ξ .

Приведем теперь прямое решение. Расчленим систему на три элемента - стрингер и две пластины (первая пластина расположена слева от стрингера). Каждую пластину и стрингер отнесем к своей (без-

размерной) системе координат: $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ (y измеряется в долях от b , x – в долях от c для первой пластины и в долях от $(a-c)$ – для второй). На линии сопряжения элементов системы введем перемещения согласно (15). Прогибы пластины определяются равенствами

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (W_n P_n(x) + \Theta_n Q_n(x)) \sin n\pi y, \\ w_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{W}_n \overline{P}_n(x) + \overline{\Theta}_n \overline{Q}_n(x)) \sin n\pi y, \end{aligned} \quad (20)$$

где: $P_n(x) = r_{1n} \operatorname{sh} \alpha_n x + s_{1n} \sin \beta_n x$

$$Q_n(x) = r_{2n} \operatorname{sh} \alpha_n x + s_{2n} \sin \beta_n x,$$

$$\overline{P}_n(x) = \overline{r}_{1n} \operatorname{sh} \eta_n (1-x) + \overline{s}_{1n} \sin \zeta_n (1-x),$$

$$\overline{Q}_n(x) = \overline{r}_{2n} \operatorname{sh} \eta_n (1-x) + \overline{s}_{2n} \sin \zeta_n (1-x),$$

$$r_{1n} \Delta_{1n} = \beta_n \cos \beta_n, \quad r_{2n} \Delta_{1n} = -\sin \beta_n,$$

$$s_{1n} \Delta_{1n} = -\alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n, \quad s_{2n} \Delta_{1n} = \operatorname{sh} \alpha_n,$$

$$\overline{r}_{1n} \Delta_{2n} = -\zeta_n \cos \zeta_n, \quad \overline{r}_{2n} \Delta_{2n} = -\gamma_5 \operatorname{sh} \zeta_n,$$

$$\overline{s}_{1n} \Delta_{2n} = \eta_n \operatorname{ch} \eta_n, \quad \overline{s}_{2n} \Delta_{2n} = \gamma_5 \operatorname{sh} \eta_n,$$

$$\Delta_{1n} = \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n \cos \beta_n - \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n \sin \beta_n,$$

$$\Delta_{2n} = \eta_n \operatorname{ch} \eta_n \sin \zeta_n - \zeta_n \operatorname{sh} \zeta_n \cos \eta_n,$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{matrix} \right\} = \sqrt{\kappa_n (\xi \pm \kappa_n)}, \quad \left. \begin{matrix} \eta_n \\ \zeta_n \end{matrix} \right\} = \gamma_5 \left\{ \begin{matrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{matrix} \right\},$$

$$\kappa_n = n\pi\mu, \quad \mu = \frac{\rho}{\lambda}, \quad \gamma_5 = \frac{1-\rho}{\rho}.$$

Вычислим с помощью решений (20) погонные усилия $q_z(y)$ и момент $m_y(y)$, передаваемые на стрингер пластинами

$$\begin{aligned} q_z(y) &= V_{x2}(0, y) - V_{x1}(1, y), \\ m_y(y) &= M_{x1}(1, y) - M_{x2}(0, y), \end{aligned} \quad (21)$$

где M_{xk} , V_{xk} – погонные изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила (по Кирхгофу), определяемые по известным формулам теории пластин. В систему уравнений (11) после перехода к

безразмерной переменной y подставим равенства (15) и $q_0 = -q_z$, $m_0 = -m_y$. В результате придем к системе (19).

Таким образом, показана принципиальная возможность редукции задачи устойчивости системы к задаче устойчивости ее одного-единственного элемента, в которой через коэффициенты жесткости отражены все свойства системы. Если существует точное решение задачи, то метод приводит также к точному решению.

В случае двумерной проблемы и при наличии в системе одномерных элементов метод дает конструктивный подход к сведению проблемы к одномерной (правда, промежуточные задачи остаются все-таки двумерными; но это – стандартные задачи и потому они могут быть решены только один раз).

Применение метода даже в том случае, когда можно получить прямое точное решение, дает определенные выгоды, так как позволяет получить точные количественные характеристики таких понятий, как “подкрепляемый элемент”, “подкрепляющий элемент”, “эффективность подкрепления”, “провоцирование” потери устойчивости и др. Так, например, из равенств (6) следует, что стойка и растянутая панель будут оказывать поддерживающее влияние на сжатую панель вплоть до их разрушения, а количественная характеристика этого явления содержится в формуле для C_A . Напротив, растянутая панель будет испытывать поддерживающее влияние со стороны стойки и сжатой панели вплоть до выполнения равенства: $2\alpha \operatorname{ctg} \alpha + 3\gamma = 0$ ($D_5 \neq 0$, $H \neq \infty$). Аналогичные качества и их количественные характеристики можно получить из равенств (2) и (17).

Данным методом решен ряд сложных задач устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники. Опубликованы лишь результаты исследования устойчивости силовых нервюр в работах

[6, 7], виконаних під керівництвом автора. Соответствующее программное обеспечение успешно эксплуатируется на АНТК им. О.К.Антонова и ТАНТК им. Г.М.Бериева.

Заклучение

В заключение можно сделать такие выводы:

- метод идентификации краевых условий позволяет свести задачу устойчивости системы к задаче для одного ее элемента;
- если краевые условия для элемента установлены (идентифицированы) точно, то метод приводит к точному решению;
- решения промежуточных задач содержат неизвестный параметр, что вносит определенные сложности в применение метода для двумерных задач;
- задачи собственно устойчивости формулируются стандартным образом и включаются в некий каталог;
- высокая точность и оперативность метода достигается благодаря возможности использования математических моделей любой сложности и постановке задачи для одного-единственного элемента, «погруженного» в упругую среду.

Литература

1. Кутыинов В.Ф., Замула Г.Н., Мохов В.Ф. Методология исследования разрушений авиационных конструкций при статических испытаниях // Расчет НДС и рациональное проектирование авиац. констр. Труды ЦАГИ. – 1992. – Вып. 2495. – С.87–91.
2. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика/Под ред. Дж.Томпсона и Дж.Ханта. – М.:Наука, 1991. – 424 с.
3. Халилов С.А. Проблема устойчивости несущей конструкции большегрузных самолетов // Авиационно-космическая техника и технология Труды

Харьковского авиационного института им. Н.Е.Жуковского за 1993 г. – Харьков, 1994. – С.358-369.

4. Халилов С.А. Развитие альтернативного подхода к решению проблемы устойчивости силовых элементов конструкции самолета // Авиационно-космическая техника и технология/ Труды Харьковского авиационного института им. Н.Е.Жуковского за 1994 г. – Харьков, 1995. – С.223-227.

5. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

6. Минтюк В.Б. Устойчивость типовой нервюры с криволинейными поясами. Определение исходного состояния // Авиационно-космическая техника и технология/ Труды Харьковского авиационного института им. Н.Е.Жуковского за 1997 г. – Харьков, 1998. – С.339-345.

7. Минтюк В.Б. Исследование устойчивости нервюры с криволинейными поясами при произвольных нагрузках с учетом влияния панелей посредством компенсаторов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Темат.сб.науч.тр. Вып.19(2). – Харьков, 2000. – С.82-88.

Поступила в редакцию 11.04.03

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор Проценко В.С., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков; канд. физ.-мат. наук, доцент Несвит М.И., ХГТУС, г. Харьков.